

Φωτόνια - Διάνυσμα πόλωσης

Γνωρίζουμε ήδη ότι οι νόμοι του Maxwell γράφονται με συναλλοίωτο τρόπο (Άσκηση 7)

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu$$

ή ακόμα, ορίζοντας τον τανυστή του πεδίου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, μπορούμε να γράψουμε

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Η διατήρηση του ρεύματος j^ν είναι ενσωματωμένη στη μορφή αυτή: $\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Τα πεδία **E** και **B** παραμένουν αναλλοίωτα στον μετασχηματισμό $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$ όπου χ τυχαία συνάρτηση. Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση χ μπορούμε να επιτύχουμε $\partial_\nu A^\nu = 0$ (συνθήκη Lorentz), οπότε

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu \rightarrow \square^2 A^\mu = j^\mu$$

Ακόμα και σ' αυτήν την περίπτωση, παραμένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής της χ , αρκεί βέβαια $\square^2 \chi = 0$. Δηλαδή, μένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής του $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ με $\square^2 \Lambda = 0$.

Η κυματοσυνάρτηση του ελεύθερου φωτονίου ικανοποιεί την $\square^2 A^\mu = 0$ με λύση $A^\mu = \epsilon^\mu(\mathbf{q})e^{-iqx}$, με $q^2 = 0$ ($m_\gamma = 0$). Το $\epsilon^\mu(\mathbf{q})$ είναι το διάνυσμα πόλωσης, το οποίο έχει, βέβαια, 4 συνιστώσες. Αλλά, η συνθήκη $\partial_\mu A^\mu = 0$ μας υποχρεώνει $q^\mu \epsilon_\mu = 0$, οπότε έχουμε μειώσει σε τρεις τις ανεξάρτητες συνιστώσες. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχουμε ακόμα μια ελευθερία για το $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ με $\square^2 \Lambda = 0$. Αν επιλέξουμε $\Lambda = iae^{-iqx}$, οπότε $\square^2 \Lambda = -iq^2 ae^{-iqx} = 0$, τότε $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda = A^\mu + aq^\mu e^{-iqx}$ που αντιστοιχεί στην αλλαγή $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + aq^\mu$. Δηλαδή, τα ϵ^μ και ϵ'^μ είναι ισοδύναμα, περιγράφουν το ίδιο φωτόνιο. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο a ώστε να έχουμε $\epsilon^0 = 0$. Και η σχέση $\epsilon^\mu q_\mu = 0$ γίνεται $\epsilon \cdot \mathbf{q} = 0$ (βαθμίδα Coulomb ή εγκάρσια βαθμίδα).

Τελικά, λοιπόν, έχουμε μόνο δύο ανεξάρτητες συνιστώσες (spin=1 με μηδενική μάζα), π.χ. $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$ και $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, θεωρώντας ότι $\mathbf{q} = (0, 0, q)$. Τα $\mathbf{q}$ και ϵ^μ περιγράφουν πλήρως το φωτόνιο.

Άσκηση 33 Δείξτε πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2), \quad \epsilon_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$

σε μια στροφή με γωνία θ γύρω από τον άξονα z . Τα διανύσματα αυτά ονόμαζονται διανύσματα κυκλικής πόλωσης και το δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα.

Άσκηση 34 Δείξτε ότι στην βαθμίδα Coulomb, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2), \quad \epsilon_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$
$$\epsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \epsilon_2 = (0, 1, 0)$$

Διανύσματα πόλωσης για spin=1 και $M \neq 0$

Στο σύστημα ηρεμίας έχουμε 3 δυνατές καταστάσεις για spin=1. Για παράδειγμα, μπορούν να περιγραφούν από τα τρία διανύσματα $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$ και $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$, και βέβαια ισχύει $\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \delta_{ij}$. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τα διανύσματα

$$\epsilon_{\lambda=1} = -\sqrt{1/2}(1, i, 0) = -\sqrt{1/2}(\epsilon_1 + i\epsilon_2)$$

$$\epsilon_{\lambda=0} = (0, 0, 1) = \epsilon_3$$

$$\epsilon_{\lambda=-1} = \sqrt{1/2}(1, -i, 0) = \sqrt{1/2}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$

με $\epsilon_\lambda^* \cdot \epsilon_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$. Ας φτιάξουμε τώρα τετραδιανύσματα. Στο σύστημα ηρεμίας μπορώ να διαλέξω $\epsilon_\lambda^\mu = (0, \epsilon_\lambda)$. Σ' αυτό το σύστημα βέβαια, η ορμή είναι $p^\mu = (M, 0, 0, 0)$ και ισχύει $p_\mu \epsilon^\mu = 0$.

Η τελευταία είναι μια αναλλοίωτη συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς. Τώρα θα πρέπει να βρούμε το αντίστοιχο διάνυσμα πόλωσης όταν πάμε από $(M, 0, 0, 0) \rightarrow (E, 0, 0, p)$. Η ταχύτητα του νέου συστήματος είναι $(0, 0, -p/E)$ και το διάνυσμα πόλωσης $(0, \epsilon_{\lambda=0})$ γίνεται

$$0 \rightarrow \frac{0 - (-v)}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{p/E}{\sqrt{1 - p^2/E^2}} = \frac{p}{M}$$

$$1 \rightarrow \frac{1 - (-v)0}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{E}{M}$$

Άρα, $\epsilon_{\lambda=0}^{\mu} = (0, 0, 0, 1) \rightarrow \frac{1}{M}(p, 0, 0, E)$ και βέβαια ισχύει $(E, 0, 0, p) \cdot \frac{1}{M}(p, 0, 0, E) = 0$. Τα διανύσματα για $\lambda = \pm 1$ δεν αλλάζουν μιας και το σύστημα μας κινείται στον άξονα των z . Την σχέση $p^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0$ μπορούμε να τη δούμε και από άλλη πλευρά. Γενικεύοντας την εξίσωση για το φωτόνιο, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\square^2 A_{\mu} - \partial_{\mu}(\partial_{\nu} A^{\nu}) = 0 \rightarrow [g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_{\mu} \partial_{\nu}] A^{\nu} = 0$$

και εισάγοντας μάζα M

$$[g_{\mu\nu} (\square^2 + M^2) - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu = 0 \quad (21)$$

Παραγωγίζοντας ως προς ∂^μ

$$\begin{aligned} \partial^\mu [g_{\mu\nu} (\square^2 + M^2) - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu &= 0 \\ [\partial_\nu (\square^2 + M^2) - \square^2 \partial_\nu] A^\nu &= 0 \\ \partial_\nu A^\nu &= 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή, η συνθήκη Lorentz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, για τα φωτόνια ($M = 0$), είναι ταυτότητα για $M \neq 0$. Και βέβαια η σχέση $p^\mu \epsilon_\mu = 0$ έπεται άμεσα ($A^\mu = \epsilon^\mu e^{-ip \cdot x}$).

Άσκηση 35 Δείξτε ότι η σχέση πληρότητας για τα spin=1 με μάζα

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_\mu^* (\epsilon_\lambda)_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \quad (22)$$

Ο διαδότης του ηλεκτρονίου

Από την μη σχετικιστική θεωρία είχαμε δει

$$T_{fi} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \left[\langle f|V|i \rangle + \sum_{n \neq i} \langle f|V|n \rangle \frac{1}{E_i - E_n} \langle n|V|i \rangle + \dots \right]$$

όπου $H_0|n \rangle = E_n|n \rangle$. Φορμαλιστικά μπορούμε να γράψουμε

$$T_{fi} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \langle f|(-iV) + (-iV) \frac{i}{E_i - H_0} (-iV) + \dots|i \rangle$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\sum_{n \neq i} |n \rangle \langle n| = 1$. Η επιλογή του $-iV$, αντί του V , γίνεται από την παρουσία του V στην εξίσωση του Schroedinger, $i\partial\Psi/dt = V\Psi$, που δίνει και την χρονική εξάρτηση $\exp(-iVt)$ στην “εικόνα αλληλεπίδρασης” (interaction picture). Οπότε, αντιστοιχούμε **κορυφή** $\rightarrow (-iV)$ και **διαδότης** $\rightarrow \frac{i}{E_i - H_0}$.

Αν γράψουμε την εξίσωση Schrödinger

$$(H_0 + V)\Psi = E\Psi \rightarrow (H_0 - E)\Psi = -V\Psi \rightarrow i(H_0 - E)\Psi = -iV\Psi$$

βλέπουμε ότι ο διαδότης “είναι” το αντίστροφο του τελεστή στο αριστερό σκέλος της τελευταίας ισότητας

$$\frac{1}{i(H_0 - E)} = \frac{i}{E - H_0}$$

Ο διαδότης του βαθμωτού σωματιδίου

Στο βαθμωτό πεδίο, η Klein-Gordon γράφεται

$$(\square^2 + m^2)\phi = -V\phi \rightarrow i(\square^2 + m^2)\phi = -iV\phi$$

και, με τον παραπάνω κανόνα, ο διαδότης τους βαθμωτού πεδίου είναι

$$\frac{1}{i(\square^2 + m^2)} = \frac{-i}{-p^2 + m^2} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Ο διαδότης του σωματιδίου Dirac

Για το ηλεκτρόνιο θα έχουμε ανάλογα

$$(\not{p} - m)\psi = \gamma^0 V\psi \rightarrow -i(\not{p} - m)\psi = -i\gamma^0 V\psi$$

όπου $\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu$. Και ο διαδότης του ηλεκτρονίου είναι

$$\frac{1}{-i(\not{p} - m)} = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

Θυμηθείτε ότι $\not{p} + m = \sum u^{(s)} \bar{u}^{(s)}$. Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που θα τον δούμε ξανά στο διαδότη του φωτονίου.

Ο διαδότης του φωτονίου

Η εξίσωση που πληρεί το φωτόνιο είναι

$$[g_{\mu\nu}\square^2 - \partial_\mu\partial_\nu] A^\nu = j^\mu \quad (23)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι έχουμε μια ελευθερία επιλογής του πεδίο: $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$. Αν δεν “αφαιρέσουμε” αυτήν την ελευθερία δεν θα καταφέρουμε να βρούμε τον αντίστροφο του τελεστή.

Άσκηση 36 Δείξτε ότι δεν μπορείτε να ορίσετε τον αντίστροφο του $g_{\mu\nu}\square^2 - \partial_\mu\partial_\nu$

Μόλις όμως επιλέξουμε την βαθμίδα Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$, η εξίσωση γίνεται $g^{\mu\nu} \square^2 A_\nu = j^\mu$, και μιας και $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, βλέπουμε άμεσα ότι το αντίστροφο του $-ig_{\mu\nu} \square^2$ είναι

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Αυτός είναι ο διαδότης του Feynman (ή στη βαθμίδα Feynman).

Άσκηση 37 Η συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$ αφήνει ακόμα μια ελευθερία επιλογής του A^μ : $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ όπου $\square^2 \Lambda = 0$. Οπότε, η Εξ.(23) μπορεί να γραφεί

$$\left[g_{\mu\nu} \square^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = j^\mu$$

και τότε ο αντίστροφος του τελεστή είναι

$$\frac{i}{q^2} \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]$$

Για $\xi = 1$ πηγαίνουμε στον διαδότη Feynman. Στην QED ο δεύτερος όρος μηδενίζεται στους υπολογισμούς μιας και το δυνητικό φωτόνιο αλληλεπιδρά με διατηρούμενο ρεύμα j^μ για το οποίο ισχύει $q_\mu j^\mu = 0$.

Ο διαδότης διανυσματικού, spin=1, με μάζα

Όπως είχαμε αναφέρει, Εξ.(21), η εξίσωση που πληροί ένα ελεύθερο διανυσματικό σωματίδιο με μάζα είναι

$$[g_{\mu\nu} (\square^2 + m^2) - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu = 0$$

Το αντίστροφο του τελεστή (επι i) είναι

$$\frac{i \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \right)}{p^2 - M^2}$$

οπότε αυτός είναι και ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα. Προσέξτε ότι ο αριθμητής είναι η σχέση πληρότητας Εξ.(22).

Άσκηση 33 Δείξτε πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2), \quad \epsilon_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$

σε μια στροφή με γωνία θ γύρω από τον άξονα z . Τα διανύσματα αυτά ονόμαζονται διανύσματα κυκλικής πόλωσης και το δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα. (Π)

Λύση

$$\begin{aligned} \epsilon_R &= -\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) = -\sqrt{\frac{1}{2}}((1, 0, 0) + i(0, 1, 0)) \rightarrow \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2}}[(\cos \theta, \sin \theta, 0) + i(-\sin \theta, \cos \theta, 0)] = \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2}}[e^{-i\theta}, ie^{-i\theta}, 0] = -\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}(1, i, 0) = e^{-i\theta}\epsilon_R \end{aligned}$$

Όμοια, $\epsilon_L \rightarrow e^{+i\theta}\epsilon_L$. Οπότε

$$\epsilon_{R,L} \rightarrow e^{-i\lambda_{R,L}\theta}\epsilon_{R,L} \quad \mu\epsilon \quad \begin{cases} \lambda_R = +1 \\ \lambda_L = -1 \end{cases}$$

Άσκηση 34 Δείξτε ότι για άμαζα σωματιδία με $\text{spin}=1$ στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_{\lambda})_i^* (\epsilon_{\lambda})_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\begin{aligned} \epsilon_R &= -\sqrt{\frac{1}{2}} (\epsilon_1 + i\epsilon_2), & \epsilon_L &= +\sqrt{\frac{1}{2}} (\epsilon_1 - i\epsilon_2) \\ \epsilon_1 &= (1, 0, 0), & \epsilon_2 &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

(Π)

Λύση

Φαίνεται εύκολα ότι

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_{\lambda})_i^* (\epsilon_{\lambda})_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa j}$$

Αυτός ο τελεστής, που έχει δύο δείκτες, i, j , θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο τελεστών που μπορούμε να φτιάξουμε: δ_{ij} και $q_i q_j$

$$\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa j} = A \delta_{ij} + B q_i q_j$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\sum_i \epsilon_{\xi i}$, $\xi = 1, 2$, και γνωρίζοντας ότι $\epsilon \cdot \mathbf{q} = \sum_i \epsilon_{\kappa i} q_i = 0$ και $\epsilon_{\xi} \cdot \epsilon_{\kappa} = \sum_i \epsilon_{\xi i} \epsilon_{\kappa i} = \delta_{\xi \kappa}$ έχουμε

$$\sum_i \epsilon_{\xi i} \left[\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa j} \right] = A \sum_i \epsilon_{\xi i} \delta_{ij} + B \sum_i \epsilon_{\xi i} q_i q_j$$

$$\sum_{\kappa=1,2} \delta_{\xi \kappa} \epsilon_{\kappa j} = A \epsilon_{\xi j} \rightarrow \epsilon_{\xi j} = A \epsilon_{\xi j}$$

Άρα, $A = 1$. Τώρα πολλαπλασιάζουμε, την αρχική σχέση, επί δ_{ij}

$$\sum_{i,j} \delta_{ij} \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa j} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \delta_{ji} + \sum_{i,j} B \delta_{ij} q_i q_j \Rightarrow$$

$$\sum_i \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa i} = 3 + B \mathbf{q}^2 \Rightarrow 1 + 1 = 3 + B \mathbf{q}^2$$

Άρα $B = -1/\mathbf{q}^2$, και $-q_i q_j / \mathbf{q}^2 = -\hat{q}_i \hat{q}_j$

Επομένως, έχουμε

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_{\lambda})_i^* (\epsilon_{\lambda})_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa j} = A \delta_{ij} + B q_i q_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$