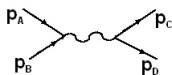


Ο διαδότης

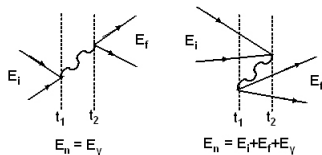
Έχουμε δει ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δει ότι

$$T_{fi} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi \delta(E_f - E_i)$$



Πώς θα πάμε από το $1/(E_i - E_n)$ στο $1/(p_A + p_B)^2$. Ας θυμηθούμε ότι το διάγραμμα Feynman είναι το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων



Επομένως, το αναλλοίωτο πλάτος θα είναι ($E_i = E_f$)

$$\mathcal{M} \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - (2E_i + E_\gamma)} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni}$$

Το $2E_\gamma$ σχετίζεται με τον νορμαλισμό. Η παραπάνω μέθοδος είναι η λεγόμενη “παλαιά μέθοδος διαταραχών”. Σ’ αυτήν η τρι-ορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά όχι η ενέργεια (πράγμα μη συναλλοίωτο). Τα σωματίδια είναι πάντα στο “κέλυφος μάζας” (mass shell), δηλαδή το τετράγωνο της τετρ-ορμής είναι ίσο με το τετράγωνο της μάζας.

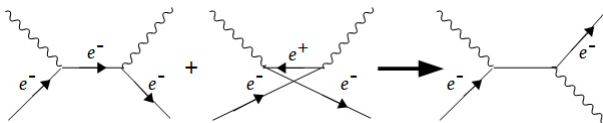
Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$E_i^2 = (p_A + p_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 \quad \text{και} \quad E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + \mathbf{p}_\gamma^2$$

όπου βάλαμε μια μάζα στο φωτόνιο για την περίπτωση που το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα. Επίσης $\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$. Οπότε, ο παρονομαστής της προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$E_i^2 - E_\gamma^2 = (p_A + p_B)^2 - m_\gamma^2 = q^2 - m_\gamma^2$$

που στην περίπτωση του άμαζου φωτονίου γίνεται απλά q^2 . Δηλαδή, αθροίζοντας τα δύο διαγράμματα παίρνουμε συναλλοίωτο αποτέλεσμα. Μπορούμε να δούμε το ίδιο γεγονός και στην σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο.



Αριστερά έχουμε το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων όπου η τριορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή και για το ενδιάμεσο σωματίδιο ισχύει $p^2 = m^2$. Αλλά η ενέργεια δεν διατηρείται σε κάθε κορυφή. Στο δεξιό διάγραμμα η τετρορμή (ορμή και ενέργεια) διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά $p^2 \neq m^2$.

... τα κουάρκ και τα λεπτόνια όμως έχουν spin $1/2$ και δεν περιγράφονται από την απλή κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί την Klein-Gordon. Πρέπει να βρούμε μια εξίσωση με λύσεις που να μπορούν να περιγράφουν το spin των σωματιδίων και αντισωματιδίων.

Ο Dirac προσπάθησε να γράψει μια εξίσωση γραμμική ως προς το $\partial/\partial t$, επομένως γραμμική και ως προς ∇ (συναλλοιωτήτα). Η πιο γενική μορφή είναι

$$H\psi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \beta m)\psi = 0$$

Οι παράμετροι $\mathbf{a}$ και β πρέπει να είναι κατάλληλοι ώστε για το ελεύθερο σωματίδιο να πληρούται η σχέση

$$H^2\psi = (P^2 + m^2)\psi$$

Βέβαια, η αρχική προσπάθεια του Dirac ήταν να αποφύγει την αρνητική πυκνότητα πιθανότητας. Αλλά αυτό για μας δεν είναι πλέον πρόβλημα. Αντίθετα, έχουμε το κέρδος περιγραφής των αντισωματιδίων. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} H^2\psi &= (a_i P_i + \beta m)(a_j P_j + \beta m)\psi = \\ &= ((a_i P_i)(a_j P_j) + \beta^2 m^2 + (a_i P_i)\beta m + \beta(a_j P_j)m)\psi = \\ &= \left(a_i^2 P_i^2 + \underbrace{(a_i a_j + a_j a_i)}_{i \neq j} P_i P_j + \beta^2 m^2 + (a_i P_i)\beta m + \beta(a_j P_j)m \right) \psi \end{aligned}$$

Επομένως, θα πρέπει

$$\begin{aligned} a_i^2 &= 1 \quad \text{και} \quad a_i \beta + \beta a_i = 0 \quad \text{για } i = 1, 2, 3 \\ \beta^2 &= 1 \quad \text{και} \quad a_i a_j + a_j a_i = 0 \quad \text{για } i \neq j \end{aligned}$$

Τα a_i και β δεν μπορεί να είναι απλοί αριθμοί. Θα πρέπει να πάμε σε πίνακες που δρουν στην κυματοσυνάρτηση ψ που γίνεται πια πίνακας- στήλη με συνιστώσες.

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1 .

Η ελάχιστη διάσταση, λοιπόν, είναι 4. Η περίπτωση 2 διαστάσεων πρέπει να απορριφθεί διότι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μόνο 3 ανεξάρτητοι 2×2 πίνακες (του Pauli) ενώ εμείς χρειαζόμαστε 4 πίνακες. Μια άπο τις δυνατές αναπαραστάσεις των a_i και β είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Pauli-Dirac (όπου σ οι πίνακες του Pauli)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \text{όπου}$$
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μια άλλη αναπαράσταση είναι αυτή του Weyl

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια, η επιλογή των a_i και β δεν είναι μοναδική. Θυμίζοντας ότι ένας μοναδιακός μετασχηματισμός διατηρεί τις αντιμεταθετικές ιδιότητες, έπεται ότι οι μετασχηματισμοί

$$a'_i = U a_i U^{-1}, \quad \beta' = U \beta U^{-1}$$

όπου U ένας μοναδιακός πίνακας 4×4 , δίνει μια νέα αναπαράσταση των a_i και β . Φυσικά, όλα τα μετρήσιμα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από την αναπαράσταση. Το διάνυσμα ψ έχει τέσσερις συνιστώσες και ονομάζεται spinor του Dirac.

Συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Πίνακες γ
 Από την $H\psi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \beta m)\psi$ παίρνουμε, πολλαπλασιάζοντας
 επί β ,

$$\beta i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\beta \mathbf{a} \cdot \nabla + \beta^2 m) \psi \rightarrow \left(\beta i \frac{\partial}{\partial t} + i\beta \mathbf{a} \cdot \nabla \right) \psi = \beta^2 m \psi \rightarrow$$

$$(\beta, \beta \mathbf{a}) \left(i \frac{\partial}{\partial t}, i \nabla \right) \psi = m \psi \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

όπου ορίσαμε $\gamma^\mu = (\beta, \beta \mathbf{a})$ τους πίνακες γ . Αυτή είναι η
 συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Αντιστοιχεί σε τέσσερις
 διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_k \left(i (\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m \delta_{jk} \right) \psi_k = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των $\mathbf{a}$ και β πινάκων, βρίσκουμε
 εύκολα ότι

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I$$

και επίσης τις σχέσεις

$$\gamma^0 = \beta \rightarrow (\gamma^0)^2 = 1, \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$
$$\gamma^{k\dagger} = (\beta a^k)^\dagger = a^k \beta = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = \beta a^k \beta a^k = -1, \quad k = 1, 2, 3$$

ή, πιο γενικά $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

Διατηρήσιμο ρεύμα και η συζυγής εξίσωση Dirac

Η ερμητιανή συζυγής της εξίσωση Dirac

$(i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^k \partial_k - m)\psi = 0$ είναι

$$-i(\partial_t \psi^\dagger) \gamma^{0\dagger} - i(\partial_k \psi^\dagger) \gamma^{k\dagger} - m\psi^\dagger = 0$$
$$-i(\partial_t \psi^\dagger) \gamma^0 + i(\partial_k \psi^\dagger) \gamma^k - m\psi^\dagger = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με γ^0 και χρησιμοποιώντας ότι $\gamma_0 \gamma_k = -\gamma_k \gamma_0$

$$\begin{aligned}
 & -i\partial_t(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^0 - i\partial_k(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^k - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0 \\
 & i\partial_t\bar{\psi}\gamma^0 + i\partial_k\bar{\psi}\gamma^k + m\bar{\psi} = 0 \rightarrow i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0
 \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ που είναι ένας spinor γραμμή.
 Τώρα χρησιμοποιώντας την $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$ επί $(\bar{\psi}\cdot)$
 και την $i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$ επί $(\cdot\psi)$
 και αθροίζοντας παίρνουμε

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \rightarrow \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

Επομένως, ορίζουμε το ρεύμα πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ και βέβαια τώρα

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \geq 0$$

δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας στον Dirac είναι θετική (στην εξίσωση Klein-Gordon ήταν ανάλογη της ενέργειας).

Χρησιμοποιώντας την Pauli-Weiskopf περιγραφή, το j^μ γίνεται πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Το γ^μ είναι τετραδιάνυσμα με την έννοια ότι το j^μ είναι τετραδιάνυσμα.

Spinor ελεύθερου σωματιδίου

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon.

Ψάχνουμε για λύσεις ελεύθερων σωματιδίων (ιδιοσυναρτήσεις της ορμής) της μορφής

$$\psi = u(p)e^{-ip^\mu x_\mu}$$

με $u(p)$ ένας spinor με 4 συνιστώσες. Χρησιμοποιώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση Dirac (το $u(p)$ δεν εξαρτάται από το x^μ)

$$\begin{aligned} i\gamma^\nu \partial_\nu \psi - m\psi &= 0 \rightarrow i\gamma^\nu u(p)(-ip_\nu)e^{-ip^\mu x_\mu} - mu(p)e^{-ip^\mu x_\mu} = 0 \\ (\gamma^\nu p_\nu - m)u(p) &= 0 \rightarrow (\not{p} - m)u(p) = 0 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\gamma^\mu u_\mu = \not{u}$, με u_μ τετραδιάνυσμα. Μιας και ψάχνουμε για ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας πάμε στην αρχική εξίσωση

$$Hu = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu$$

Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις για $\mathbf{p} = 0$. Οπότε

$$Hu = m\beta u = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u$$

με ιδιοτιμές $E = m, m, -m, -m$ και ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις, με $E > 0$, περιγράφουν ηλεκτρόνιο ενώ οι δύο άλλες, με $E < 0$ το ποζιτρόνιο. Για $\mathbf{p} \neq 0$ έχουμε

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

όπου χωρίσαμε το u σε 2 spinor με 2 συνιστώσες το καθένα. Οπότε

$$\left. \begin{aligned} mu_A + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B &= Eu_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A - mu_B &= Eu_B \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B &= (E - m)u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A &= (E + m)u_B \end{aligned}$$

Για $E > 0$ επιλέγουμε τη μορφή του u_A , για παράδειγμα

$$u_A = \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ή γραμμικό συνδυασμό τους) και το u_B το παίρνουμε από την δεύτερη εξίσωση

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)}, \quad s = 1, 2$$

Επομένως, για $E > 0$, έχουμε (με N σταθερά νορμαλισμού)

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

Αντίστοιχα, για $E < 0$, επιλέγουμε $u_B = \chi^{(s)}$ και τότε παίρνοντας το u_A από την πρώτη εξίσωση

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

Ας αποδείξουμε μια πολύ χρήσιμη σχέση: $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2 I$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \sum_{i,j} (\sigma_i p_i)(\sigma_j p_j) = \sum_i \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i,j(i \neq j)} (\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) p_i p_j = p^2$$

μιας και το τετράγωνο $\sigma_i^2 = 1$ για κάθε πίνακα και επίσης $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0$ για $i \neq j$.

Η σχέση μπορεί να αποδειχθεί επίσης με άμεση αντικτάσταση της μορφής των πινάκων του Pauli.

Άσκηση 18 Δείξτε ότι οι 4 λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι ορθογώνιες

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0, \quad r \neq s$$

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1 . (Π)

Λύση

Τα a_i και β , όντας στην Χαμιλτονιανή, θα πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες.

$$\begin{aligned} \text{Tr}[a_i] &= \text{Tr}[\beta^2 a_i] = \text{Tr}[(\beta)(\beta a_i)] = \text{Tr}[(\beta a_i)(\beta)] = \\ &= -\text{Tr}[\beta \beta a_i] = -\text{Tr}[\beta^2 a_i] = -\text{Tr}[a_i] \rightarrow \text{Tr}[a_i] = 0 \end{aligned}$$

από την αντιμεταθετικότητα των a_i και β και $\beta^2 = 1$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνεται ότι $\text{Tr}[\beta] = 0$.

Μιας $\beta^2 = a_i^2 = 1$, γράφοντας τους πίνακες σε διαγώνια μορφή (με έναν μοναδιακό (unitary) μετασχηματισμό), θα πρέπει το τετράγωνο κάθε ιδιοτιμής να είναι ίσο με $+1$. Άρα, κάθε ιδιοτιμή είναι ίση με ± 1 .

Επειδή $\text{Tr}[\beta \text{ ή } a_i] = \Sigma[\text{ιδιοτιμών}] = 0$, θα πρέπει να έχουμε ίσο αριθμό $+1$ και -1 . Δηλαδή άρτιες διαστάσεις.

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon. (Π)

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του Dirac επί $\gamma^\nu \partial_\nu$ από αριστερά

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0 \rightarrow i\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0 \\ &\rightarrow i\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \psi - \gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0 \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τους ‘τυφλούς’ δείκτες $\mu \leftrightarrow \nu$ στον πρώτο όρο παίρνουμε

$$i\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi - \gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0$$

και αθροίζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, χρησιμοποιώντας ότι $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ και $\gamma^\nu \partial_\nu \psi = -im\psi$, έχουμε

$$2ig^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \psi - 2\gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0 \rightarrow \square^2 \psi + m^2 \psi = 0$$