Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3019, Fax: 210 772-3025
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Associate Professor
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3019, Fax: +30 210 772-3025
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch
html://www.physics.ntua.gr/Faculty/theoalex

Αναγνώριση Προτύπων & Νευρωνικά Δίκτυα

Προβλήματα 2

(Επιστροφή: 12 Ιανουαρίου 2004)

0.1

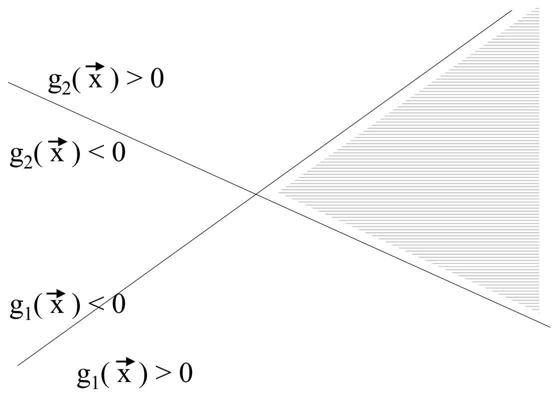
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να γενικεύσουμε την ιδέα των συναρτήσεων διάκρισης δύο κλάσεων σε C κλάσεις $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Ένας τρόπος θα είναι να χρησιμοποιήσουμε $(C-1)$ συναρτήσεις διάκρισης, έτσι ώστε αν $g_k(\overrightarrow{x}) > 0$ τότε το δείγμα $\overrightarrow{x} \in \omega_k$, ενώ αν $g_k(\overrightarrow{x}) < 0$ τότε $\overrightarrow{x} \notin \omega_k$. Με τη βοήθεια ενός παραδείγματος σε δύο διαστάσεις για $C = 3$ (τρεις κλάσεις), να δείξετε ότι αυτός ο τρόπος ταξινόμησης μπορεί να οδηγήσει σε περιοχές στο δειγματοχώρο των $\overrightarrow{x}$ για τις οποίες η ταξινόμηση θα είναι ασαφής. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση διάκρισης $g_{jk}(\overrightarrow{x})$ για κάθε δυνατό ζεύγος κλάσεων ω_j και ω_k, έτσι ώστε για $g_{jk}(\overrightarrow{x}) > 0$ το $\overrightarrow{x} \in \omega_j$ και για $g_{jk}(\overrightarrow{x}) < 0$ το $\overrightarrow{x} \in \omega_k$. Για C κλάσεις, απαιτούνται $C(C-1)/2$ συναρτήσεις διάκρισης. Με ένα απλό παράδειγμα σε δύο διαστάσεις για $C = 3$, να δείξετε ότι και αυτός ο τρόπος θα οδηγήσει σε ασαφείς περιοχές ταξινόμησης.

Λύση:

Για τρεις κλάσεις $C = 3$, θα υπάρχουν δύο γραμμικές συναρτήσεις διάκρισης $g_1(\overrightarrow{x}) g_2(\overrightarrow{x})$. θα ισχύει:
για $\overrightarrow{x} \in C_1$, τότε $g_1(\overrightarrow{x}) > 0$ και
για $\overrightarrow{x} \in C_2$, τότε $g_2(\overrightarrow{x}) > 0$.
Αυτό θα οδηγήσει στο ακόλουθο πρόβλημα. Πώς θα μπορέσουμε να ταξινομήσουμε δείγματα $\overrightarrow{x}$ τα οποία έχουν την ιδιότητα:

$$g_1(\overrightarrow{x}) > 0 \qquad \text{ΚΑΙ} \qquad g_2(\overrightarrow{x}) > 0.$$

Προφανώς τέτοια $\overrightarrow{x}$ θα ανήκουν και στις δύο κλάσεις, δηλαδή C_1 ΚΑΙ C_2. Το σχήμα 1 περιγράφει αυτό το πρόβλημα. Ακόμη και στην περίπτωση που θεωρήσουμε τις δύο συναρτήσεις διάκρισης παράλληλες μεταξύ



Σχήμα 1: Οι δύο γραμμικές συναρτήσεις διάκρισης προφανώς ορίζουν περιοχή του χώρου (γραμμοσκιασμένη περιοχή) που ταξινομείται στις δύο κλάσεις συγχρόνως.

τους, δε θα έχουμε λύση του προβλήματος, καθότι η τομή των $g_1(\overrightarrow{x}) > 0$ ΚΑΙ $g_2(\overrightarrow{x}) > 0$ είναι ένα μη-κενό σύνολο. Παρατηρείστε οτι η τομή των $g_1(\overrightarrow{x}) > 0$ ΚΑΙ $g_2(\overrightarrow{x}) > 0$ είναι ένα κενό σύνολο μόνο στην περίπτωση που οι δύο γραμμικές συναρτήσεις διάκρισης συμπίπτουν, που σημαίνει $g_1(\overrightarrow{x}) = g_2(\overrightarrow{x})$.
Για τρεις κλάσεις $C = 3$, θα υπάρχουν $C(C-1)/2 = 3$ συναρτήσεις διάκρισης, $g_{12}(\overrightarrow{x}), g_{13}(\overrightarrow{x}), g_{23})(\overrightarrow{x})$. Ο κανόνας ταξινόμησης θα είναι ως ακολούθως:

1. Αν $g_{12}(\overrightarrow{x}) > 0$ ΚΑΙ $y_{13}(\overrightarrow{x}) > 0$, τότε $\overrightarrow{x} \in C_1$.

2. Αν $g_{12}(\overrightarrow{x}) < 0$ ΚΑΙ $y_{23}(\overrightarrow{x}) > 0$, τότε $\overrightarrow{x} \in C_2$.

3. Αν $g_{13}(\overrightarrow{x}) < 0$ ΚΑΙ $y_{23}(\overrightarrow{x}) < 0$, τότε $\overrightarrow{x} \in C_3$.

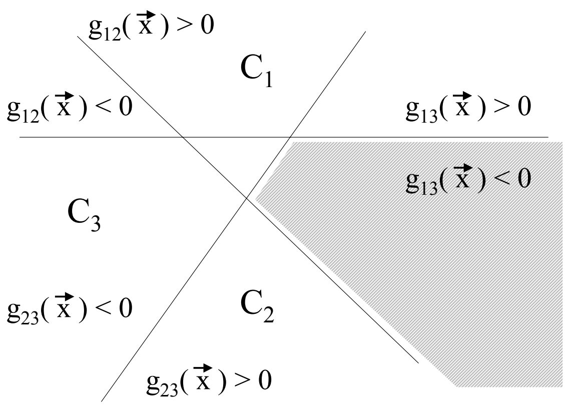
Αυτός ο κανόνας ταξινόμησης οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα, όπως φαίνεται στο σχήμα 6. Η ακόλουθη περιοχή δε μπορεί να ταξινομηθεί.

1. $g_{12}(\overrightarrow{x}) < 0$ ΚΑΙ $g_{13}(\overrightarrow{x}) > 0$.

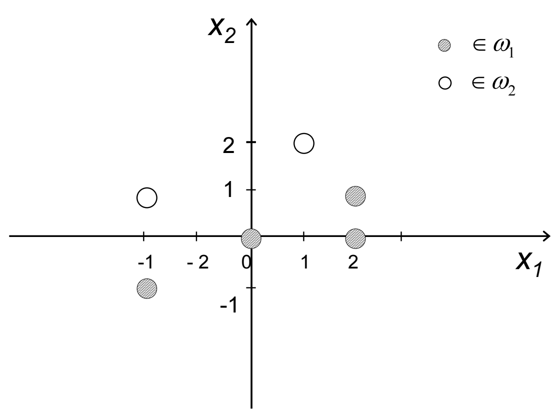
2. $g_{12}(\overrightarrow{x}) > 0$ ΚΑΙ $g_{23}(\overrightarrow{x}) > 0$ ΚΑΙ $g_{13}(\overrightarrow{x}) < 0$.

0.2

Έστω τα 6 δείγματα εκπαίδευσης που ανήκουν σε δύο κλάσεις ω_1, ω_2, όπως φαίνονται στο σχήμα (3):



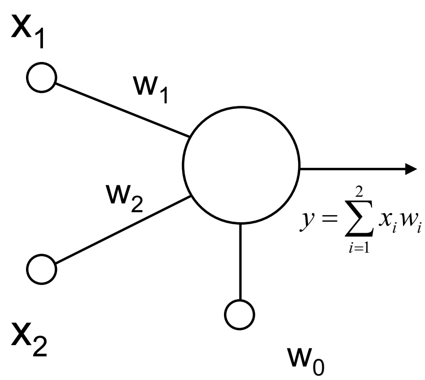
Σχήμα 2: Οι τρεις συναρτήσεις διάκρισης προφανώς ορίζουν περιοχή του χώρου που δεν ταξινομείται.



Σχήμα 3:

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\omega_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\omega_1} \right\}.$$

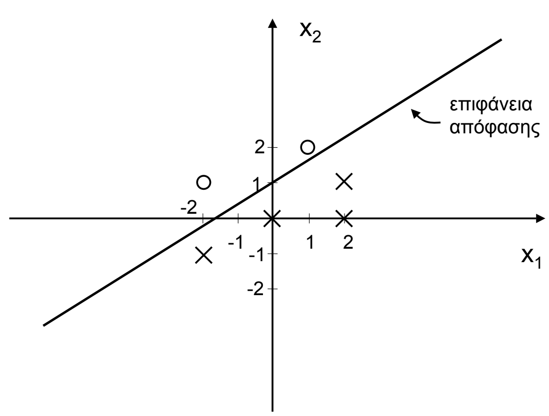
Να ορίσετε ένα νευρώνα (perceptron) που να ορίσει την ταξινόμηση αυτών των δύο κλάσεων. Δηλαδή, ορίστε τις συνάψεις w_1, w_2 και το κατώφλι w_0.



$$y = \sum_{i=1}^{2} x_i w_i + w_0 \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} 0$$

Σχήμα 4:

Λύση:



Σχήμα 5:

Προφανώς η επιφάνεια απόφασης είναι:

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x_1 - x_2 + 1 = 0,$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Επομένως η εξίσωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως :

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0 = 0, \tag{1}$$

όπου

$$w_1 = \frac{1}{2}, \quad w_2 = -1, \quad \text{και } w_0 = -1,$$

ή

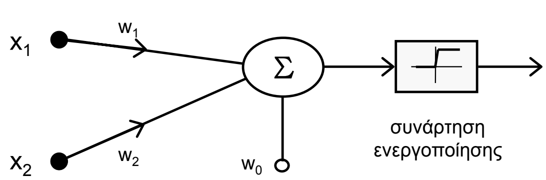
$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ w_0 = -1,$$

και η εξίσωση (1) είναι:

$$\overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = 0,$$

με

$$\overrightarrow{x} = (\ x_1\ x_2\ )^t.$$



Σχήμα 6:

Άρα η ταξινόμηση έχει ως ακολούθως:

$$\omega_1 : \left\{ \begin{array}{c} (\ -2\ \ +1\ ) \rightarrow \overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = -1 < 0 \\ (\ 1\ 2\ ) \rightarrow \overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = -1/2 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\omega_2 : \left\{ \begin{array}{c} (\ 0\ 0\ ) \rightarrow \overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = 1 > 0 \\ (\ -2\ \ -1\ ) \rightarrow \overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = 1 > 0 \\ (\ 2\ 0\ ) \rightarrow \overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = 2 > 0 \\ (\ 2\ 1\ ) \rightarrow \overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} + w_0 = 1 > 0 \end{array} \right\}.$$

0.3

Θεωρείστε τον αλγόριθμο της απότομης πτώσης (steepest descent) όπου η συνάρτηση κόστους $J(w) = k_1(w - w_0)^2 + k_2$.
(α) Βρείτε τη βέλτιστη λύση w^* που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους $J(w)$.
(β) Με τη βοήθεια του αλγορίθμου της απότομης πτώσης:

$$w(i+1) = w(i) + \varrho \frac{dJ}{dw},$$

να βρείτε μια αναλυτική έκφραση του $w(i)$. Θυμηθείτε πώς επιλύαμε διαφοροεξισώσεις από την Ανάλυση Σήματος! Να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να υπακούει η παράμετρος του ρυθμού εκμάθησης ϱ, ώστε ο αλγόριθμος της απότομης πτώσης να συγκλίνει.
(γ) Να βρείτε το όριο του $w(i)$ για $i \rightarrow \infty$.

Λύση:

(α)

$$\frac{dJ}{dw} = 2k_1(w - w_0) = 0$$

$$\Rightarrow w^* = w_0.$$

(β)

Ο αλγόριθμος της απότομης πτώσης θα είναι:

$$w(i+1) = w(i) + 2\varrho k_1 \left(w(i) - w_0\right)$$

$$\Rightarrow w(i+1) = (1 - 2\varrho k_1) w(i) + 2\varrho k_1 w_0$$

$$\Rightarrow w(i) = (1 - 2\varrho k_1)^i w(0) + \sum_{j=0}^{i-1} (1 - 2\varrho k_1)^j 2\varrho k_1 w_0$$

$$\Rightarrow w(i) = (1-2\varrho k_1)^i w(0) + \frac{2\varrho k_1 w_0}{1-(1-2\varrho k_1)}$$

$$\Rightarrow w(i) = (1-2\varrho k_1)^i w(0) + w_0. \tag{2}$$

Επομένως το w_i για να συγκλίνει, θα πρέπει να ισχύει:

$$|1-2\varrho k_1| < 1$$

$$-1 < 1-2\varrho k_1 < 1$$

$$\frac{1}{k_1} < \varrho < 0$$

(γ)

Από τη σχέση (2):

$$\lim_{i\to\infty} w(i) = w(0).$$

0.4

Έστω $\overrightarrow{x}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\overrightarrow{\mu}$ και πίνακα διασποράς $\overline{\overline{\Sigma}}$. Να δείξετε ότι ο $\overline{\overline{\Sigma}}$ είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{y}^t \overline{\overline{\Sigma}} \overrightarrow{y} > 0 \ \forall \ \overrightarrow{y} \neq 0.$$

Λύση:

Έστω $\overrightarrow{y}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε:

$$\overrightarrow{y}^t \overline{\overline{\Sigma}} \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}^t E\left[(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\mu})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\mu})^t\right] \overrightarrow{y}$$

$$= E\left[\overrightarrow{y}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\mu})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\mu})^t \overrightarrow{y}\right]. \tag{3}$$

Ορίζουμε μια νέα βαθμωτή μεταβλητή:

$$A = \overrightarrow{y}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\mu}). \tag{4}$$

Παρατηρούμε οτι το A είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν. Από τις σχέσεις (3) και (4) θα έχουμε:

$$\overrightarrow{y}^t \overline{\overline{\Sigma}} \overrightarrow{y} = E[A^2] = \sigma_A^2 > 0,$$

όπου σ_A είναι η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής A.

0.5

Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{x} = (x_1\ x_2)^t$ είναι κατανεμημένο κατά Gauss με πυκνότητες πιθανότητας $p(\overrightarrow{x}/\omega_i) \sim N(\overrightarrow{\mu}_i, \sigma^2 I)$. Να σχεδιάσετε τις επιφάνειες απόφασης για ένα ταξινομητή ελάχιστης ευκλείδειας απόστασης αν έχουμε 5 κλάσεις με τις ακόλουθες μέσες τιμές:

$$\overrightarrow{\mu}_1 = (0\ 0)^t,$$

$$\overrightarrow{\mu}_2 = (2\ 0)^t,$$

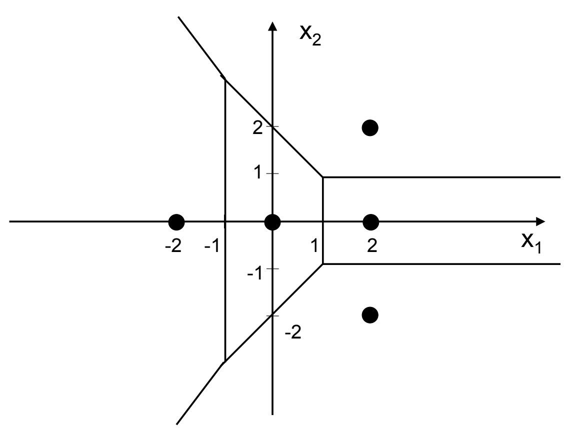
$$\overrightarrow{\mu}_3 = (-2\ 0)^t,$$

$$\overrightarrow{\mu}_4 = (2\ 2)^t,$$

$$\overrightarrow{\mu}_5 = (2\ \ -2)^t.$$

Λύση:

Οι επιφάνειες απόφασης για τις πέντε κλάσεις φαίνονται στο σχήμα 7.



Σχήμα 7:

0.6

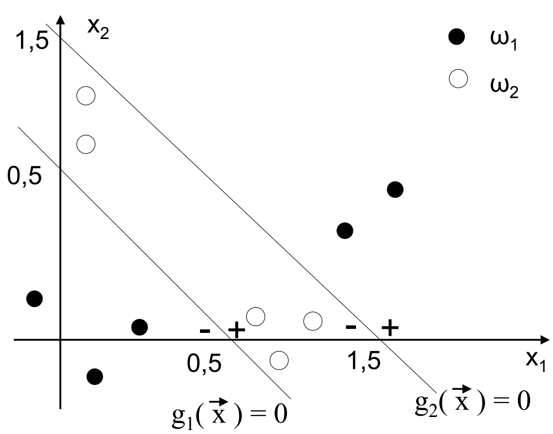
Δίνονται τα παρακάτω διανύσματα εκπαίδευσης:

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,15 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,1 \end{pmatrix}}_{\omega_1}, \right.$$

$$\left. \underbrace{\begin{pmatrix} 1,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0,15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,9 \end{pmatrix}}_{\omega_2} \right\}.$$

Να δείξετε γραφικά ότι αυτά δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα γεγονότα, και να σχεδιαστεί μια κατάλληλη αρχιτεκτονική Perceptron που να τα διαχωρίζει.

Λύση:



Σχήμα 8:

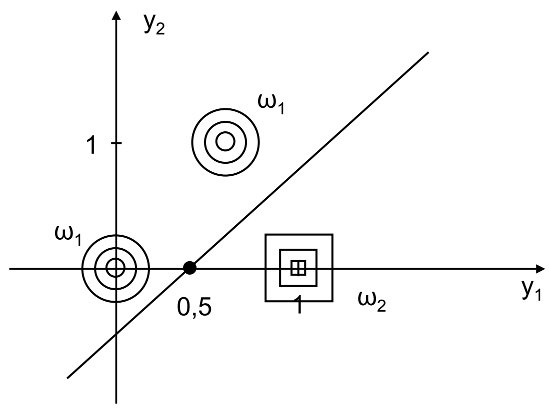
Από το σχήμα 8, προφανώς οι δύο κλάσεις δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμες. Μπορούμε να διαλέξουμε δύο ευθείες:

$$2x_1 + 2x_2 - 1 = 0, \qquad \text{και}$$

$$2x_1 + 2x_3 - 3 = 0,$$

ώστε τα δείγματα της κλάσης ω_1 να βρεθούν μεταξύ των δύο επιφανειών διάκρισης. Θα χρειαστούμε δύο στρώματα για τη σχεδίαση του Perceptron. Το κρυφό στρώμα θα περιέχει δύο νευρώνες με εξόδους y_1, y_2. Ο χώρος y_1, y_2 φαίνεται στο σχήμα 9.

x_1	x_2	y_1	y_2
0,1	-0,2	0	0
0,2	0,1	0	0
-0,15	0,2	0	0
1,1	0,8	1	1
1,2	1,1	1	1
1,1	-0,1	1	0
1,25	0,16	1	0
0,9	0,1	1	0
0,1	1,2	1	0
0,2	0,9	1	0



Σχήμα 9:

Δηλαδή θα μπορέσουμε να έχουμε μια επιφάνεια απόφασης:

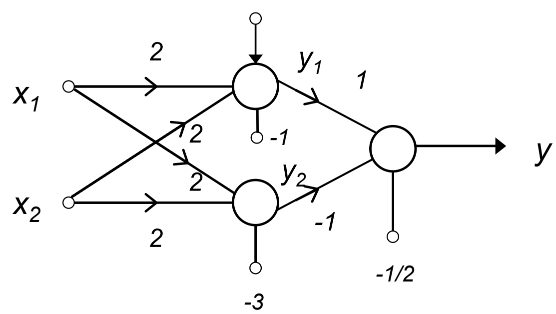
$$y_1 - y_2 - \frac{1}{2} = 0,$$

που μπορεί να διαχωρίσει τα ω_1, ω_2, όπως φαίνεται στο σχήμα.Επομένως το νευρωνικό δίκτυο θα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 10.

0.7

Υποθέστε ότι δύο σύνολα S_1 και S_2 στο χώρο $\mathbb{R}^l$ είναι γραμμικά διαχωρίσιμα. Δηλαδή, υπάρχει ένα διάνυσμα $\overrightarrow{w}' \in \mathbb{R}^l$ και ένα βαθμωτό $w_0 \in R$, έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{w}'^t \overrightarrow{x} + w_0 = \begin{cases} > 0 & \forall\ \overrightarrow{x} \in S_1 \\ < 0 & \forall\ \overrightarrow{x} \in S_2 \end{cases}$$



Σχήμα 10:

Θεωρείστε τα νέα διανύσματα ως ακολούθως:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}' \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

(α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{w}^t \hat{x} > 0 \ \forall \hat{x}$, αν το πρόσημο των διανυσμάτων $\hat{x}$ του συνόλου S_2 αλλάζει.
(β) Να περιγράφετε γραφικά τί συμβαίνει στο ερώτημα (α) όταν $l = 1, S_1 = \{-3, -2, -1\}$, και $S_2 = \{5, 6, 7\}$.

Λύση:

(α)

Προφανώς ισχύει:

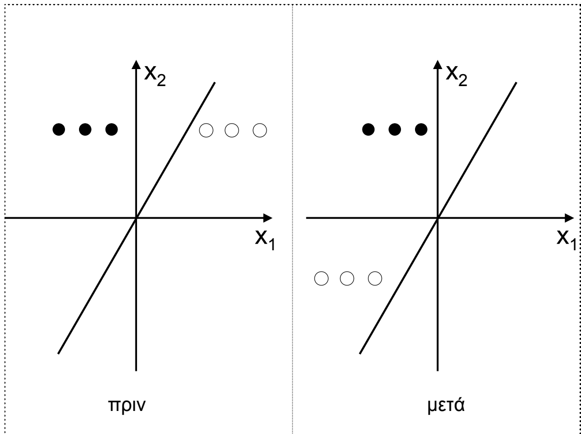
$$\overrightarrow{w}^t \overrightarrow{x} - w_0 = (\overrightarrow{w}' \ w_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{w}^t \hat{x}.$$

Αν $\overrightarrow{x} \in S_1 \Rightarrow \overrightarrow{w}^t \hat{x} > 0$.
Αν $\overrightarrow{x} \in S_2 \Rightarrow \overrightarrow{w}^t \hat{x} < 0 \Rightarrow \overrightarrow{w}^t (-1) \hat{x} > 0$.
Επομένως αν το πρόσημο του $\hat{x}$ αλλάζει όταν το $\overrightarrow{x} \in S_2$, θα ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{w}^t \hat{x} > 0 \ \ \forall \hat{x}.$$

(β)

Η αλλαγή του προσήμου περιγράφεται στο σχήμα 11. Μετά από την αλλαγή της μεταβλητής σε $\hat{x}$ και την αλλαγή του προσήμου όλα τα δείγματα βρίσκονται στην ίδια πλευρά της επιφάνειας απόφασης.



Σχήμα 11:

0.8

Στον αλγόριθμο του νευρώνα (Perceptron) έχουμε:

$$\overrightarrow{w}(i+1) = \overrightarrow{w}(i) + \varrho(i)\overrightarrow{x}_i,$$

όταν το $\overrightarrow{x}_i$ έχει ταξινομηθεί λανθασμένα, δηλαδή,

$$\overrightarrow{w}^t\overrightarrow{x}_i < 0.$$

Να βρείτε τη συνθήκη που διέπει την παράμετρο του ρυθμού εκμάθησης $\varrho(i)$, έτσι ώστε το $\overrightarrow{x}$ να ταξινομηθεί ορθά στο βήμα $i+1$.

Λύση:

Αν $\overrightarrow{w}(i)^t\overrightarrow{x}_i < 0$, τότε το $\hat{x}_i$ έχει ταξινομηθεί λανθασμένα στο $i-$οστό βήμα του αλγορίθμου. Επομένως για να έχουμε τη σωστή ταξινόμηση του $\overrightarrow{x}_i$ στο επόμενο βήμα, το $\overrightarrow{w}(i)$ θα πρέπει να αλλάξει με τέτοιο τρόπο ώστε $\overrightarrow{w}(i+1)^t\overrightarrow{x}_i > 0$. Ο αλγόριθμος είναι:

$$\overrightarrow{w}(i+1) = \overrightarrow{w}(i) + \rho\overrightarrow{x}_i$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{w}(i+1)^t\overrightarrow{x}_i = \left(\overrightarrow{w}(i) + \rho\overrightarrow{x}_i\right)^t\overrightarrow{x}_i$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\omega}(i+1)\overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{w}^t\overrightarrow{x}_i + \rho\left\|x_i\right\|^2 > 0$$

$$\Rightarrow \rho > \frac{-\overrightarrow{w}^t\overrightarrow{x}_i}{\|\overrightarrow{x}_i\|^2}.$$

0.9

Έστω ότι τα σύνολα S_1, S_2 είναι γραμμικά διαχωρίσιμα, και έχουμε γεγονότα εκπαίδευσης $x_1 = -2 \in S_1$, $x_2 = -1 \in S_2$ και $x_3 = 2 \in S_2$. Η αρχική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{w}$ είναι $\overrightarrow{w}(0) = (1,1)^t$, και η παράμετρος του ρυθμού εκμάθησης είναι $\varrho = 0,5$. Να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\overrightarrow{w}$ ώστε ο αλγόριθμος του Perceptron να μας δώσει την ορθή ταξινόμηση.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Perceptron. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, θα κανονικοποιούμε τα διανύσματα βάρους $\hat{w} = \overrightarrow{w} / \|\overrightarrow{w}\|$. Η ορθότητα της ταξινόμησης θα ελέγχεται για κάθε βήμα. Τα διανύσματα βάρους θα δίνονται από τη σχέση:

$$\hat{w}(i+1) = \hat{w}(i) - 0,5 \sum_{i=1}^{3} \sigma_{x_i} \overrightarrow{x}_i,$$

όπου $\sigma_{x_i} = -1$ αν το δείγμα $\overrightarrow{x}_i \in \omega_1$ αλλά ταξινομείται στην κλάση ω_2, ή $\sigma_{x_i} = +1$ αν το δείγμα $\overrightarrow{x}_i \in \omega_2$ αλλά ταξινομείται στην κλάση ω_1, και σε όλες τις περιπτώσεις $\sigma_{x_i} = 0$.

Βήμα αλγορίθμου	Διάνυσμα βάρους	Κανονικοποιημένο διάνυσμα βάρους	Δείγματα με λάθος ταξινόμηση
0	$\overrightarrow{w} = (1\ 1)^t$	$(0,707\ 0,707)^t$	x_1, x_3
1	$\overrightarrow{w} = (-1,29\ 0,71)^t$	$(-0,88\ 0,48)^t$	x_2
2	$\overrightarrow{w} = (-0,38\ \ -0,02)^t$	$(-1,00\ \ -0,05)^t$	x_2
3	$\overrightarrow{w} = (-0,50\ \ -0,55)^t$	$(-0,67\ \ -0,74)^t$	κανένα

0.10

(α) Να εφαρμόσετε τον απλό αλγόριθμο εύρεσης των προτύπων για τα διανύσματα:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Θεωρείστε ότι το κατώφλι $T = 3$.
(β) Να εφαρμόσετε τη μέθοδο $MaxMin$ στο δειγματοχώρο S του ερωτήματος (α).
(γ) Να εφαρμόσετε τη μέθοδο των K-μέσων (K-means) στο δειγματοχώρο S του ερωτήματος (α).

Λύση:

(α) Είναι παρόμοια της άσκησης **;;**

(β) βλέπε άσκηση **;;**

(γ) βλέπε άσκηση **;;**