Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3019, Fax: 210 772-3025
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Associate Professor
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3019, Fax: +30 210 772-3025
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch
html://www.physics.ntua.gr/Faculty/theoalex

Αναγνώριση Προτύπων & Νευρωνικά Δίκτυα

Προβλήματα 1

(Κεφάλαιο: Στατιστική Θεωρία του Bayes)

(Επιστροφή: 24 Νοεμβρίου 2003)

0.1

Ο ακόλουθος πίνακας του Σχήματος (1) μας δίνει τις υπό συνθήκη πιθανότητες μιας τυχαίας μεταβλητής X για τρεις κατηγορίες ω_1, ω_2, και ω_3. Έστω ότι γνωρίζουμε τις a priori πιθανότητες $p(\omega_1) = 0,3$ και $p(\omega_2) = 0,3$.
Υπολογίστε το ολικό σφάλμα της κατηγοριοποίησης χρησιμοποιώντας τον κανόνα απόφασης Bayes.
Παρατηρείστε ότι $\sum_x p(x/\omega_i) = 1,0$ και η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές στο διάστημα $[1,6]$.

0.2

Υπολογίστε το ολικό σφάλμα της κατηγοριοποίησης κατά Bayes για δυο κατηγορίες όπου θεωρούμε δείγματα σε 2-διαστάσεις από γκαουσιανές κατανομές που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$p(\vec{x}/\omega_1) \sim N(\vec{\mu}_1, \overline{\overline{\Sigma}}_1),$$

με

$$\vec{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{\Sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

και

$$p(\vec{x}/\omega_2) \sim N(\vec{\mu}_2, \overline{\overline{\Sigma}}_2),$$

$p(X=x/\omega_i)$						
ω_i \ x	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5	X=6
ω_1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1
ω_2	0,2	0,2	0,4	0,05	0,1	0,05
ω_3	0,1	0,3	0,15	0,05	0,3	0,1

Σχήμα 1: Παρατηρείστε ότι $\sum_x p(x/\omega_i) = 1,0$ και η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές στο διάστημα $[1,6]$.

με

$$\vec{\mu}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{\Sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Θεωρήστε ότι η πιθανότητα $p(\omega_1) = 0,25$.

0.3

Θεωρείστε μια μέτρηση σε τρεις διαστάσεις $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t$. Έστω ότι έχουμε 4 δείγματα από την κατηγορία ω_1 και 4 δείγματα από την κατηγορία ω_2:

$$\omega_1 : \left\{(1\ 0\ 1)^t,\ (0\ 0\ 0)^t,\ (1\ 0\ 0)^t,\ (1\ 1\ 0)^t\right\}$$

$$\omega_2 : \left\{(0\ 0\ 1)^t,\ (0\ 1\ 1)^t,\ (1\ 1\ 1)^t,\ (0\ 1\ 0)^t\right\}$$

Να υποθέσετε ότι η μεταβλητή $\vec{x}$ είναι γκαουσιανή, όπου μπορείτε να χρησιμοποιείσετε τις ακόλουθες σχέσεις για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής και της διασποράς:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{x}_k,$$

$$\overline{\overline{\Sigma}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{x}_k \vec{x}_k^t - \vec{\mu}\vec{\mu}^t,$$

όπου N είναι το πλήθος των δειγμάτων.
Να χρησιμοποιείσετε τον κανόνα απόφασης Bayes για τον προσδιορισμό της επιφάνειας απόφασης. Προσδιορίστε την ολική πιθανότητα για την σωστή κατηγοριοποίηση του κανόνα απόφασης Bayes.

0.4

Έστω τα δείγματα:

$$(1\ 2)^t,\ (2\ 2)^t,\ (3\ 1)^t,\ (3\ 2)^t,\ (2\ 3)^t$$

ανήκουν σε μια κατηγορία ω_1. Επιπλέον, έστω τα δείγματα:

$$(7\ 9)^t,\ (8\ 9)^t,\ (9\ 8)^t,\ (9\ 9)^t,\ (8\ 10)^t$$

ανήκουν σε μια κατηγορία ω_2. Έστω ότι τα δείγματα των δυο κατηγοριών προέρχονται από γκαουσιανές πυκνότητες πιθανότητας.
Να βρείτε την επιφάνεια απόφασης εφαρμόζοντας τον κανόνα Bayes.

0.5

Η επιφάνεια απόφασης για δυο κατηγορίες ω_1 και ω_2 που είναι κατανεμημένες κατά γκάους με πίνακες διασποράς:

$$\overline{\overline{\Sigma}}_1 = \overline{\overline{\Sigma}}_2 \neq \sigma^2 \overline{\overline{I}},$$

μέσες τιμές μ_1, μ_2, και

$$p(\omega_1) \neq p(\omega_2),$$

είναι μια υπερεπιφάνεια που περιγράφεται από την ακόλουθη γραμμική εξίσωση:

$$\vec{A}^t(\vec{x} - A_0) = 0.$$

Να εκφράσετε τις παραμέτρους $\vec{A}$ και A_0 ως συνάρτηση των $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$, $\overline{\overline{\Sigma}}$, $p(\omega_1)$, και $p(\omega_2)$.
Ο ίδιος κανόνας απόφασης Bayes για δυο κατηγορίες με πίνακες διασποράς:

$$\overline{\overline{\Sigma}}_1 \neq \overline{\overline{\Sigma}}_2, \quad p(\omega_1) \neq p(\omega_2)$$

θα δώσει μια επιφάνεια απόφασης που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{x}^t \overline{\overline{B}} \vec{x} + \vec{A}^t \vec{x} + C = 0.$$

Να καθορίσετε τις παραμέτρους $\overline{\overline{B}}$, $\vec{A}$, και C.

0.6

Θεωρείστε ένα πρόβλημα αναγνώρισης προτύπων με M-κατηγορίες μιας διάστασης όπου κάθε κατηγορία χαρακτηρίζεται από μια κατανομή πυκνότητας πιθανότητας Rayleigh:

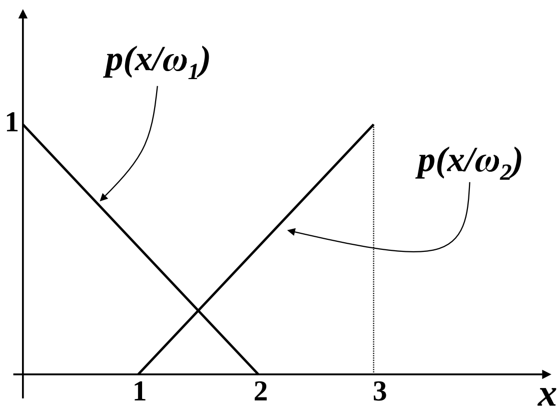
$$p(x/\omega_i) = \begin{cases} (x/\sigma_i^2)\, e^{-x^2/2\sigma_i^2} & \textbf{για} \quad x \geq 0 \\ 0 & \textbf{για} \quad x < 0 \end{cases}$$

Βρείτε τη συνάρτηση απόφασης Bayes του προβλήματος, υποθέτοντας ότι οι a priori πιθανότητες είναι $p(\omega_i) = 1/M$.
Επαναλάβατε το ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση για την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας:

$$p(x/\omega_i) = \begin{cases} (x/T_i)\, e^{-x/T_i} & \textbf{για} \quad x \geq 0 \\ 0 & \textbf{για} \quad x < 0 \end{cases}$$

0.7

Έστω ότι δυο κατηγορίες περιγράφονται από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας του Σχήματος (2). Βρείτε το σύνορο απόφασης Bayes.



Σχήμα 2:

0.8

Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες δυο κατηγορίες (ω_1, ω_2) περιγράφονται από γκαουσιανές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$\omega_1 : \left\{(0\ 0)^t,\ (2\ 0)^t,\ (2\ 2)^t,\ (0\ 2)^t\right\}$$

και

$$\omega_2 : \left\{(4\ 4)^t,\ (6\ 4)^t,\ (6\ 6)^t,\ (4\ 6)^t\right\}.$$

Έστω ότι οι a priori πιθανότητες είναι ίσες, $p(\omega_1) = p(\omega_2)$. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει το σύνορο απόφασης Bayes μεταξύ των δυο αυτών κατηγοριών.

0.9

Επαναλάβατε το πρόβλημα (0.8) για τις ακόλουθες κατηγορίες:

$$\omega_1 : \left\{(-1\ 0)^t,\ (0\ -1)^t,\ (1\ 0)^t,\ (0\ 1)^t\right\}$$

και

$$\omega_2 : \left\{(-2\ 0)^t,\ (0\ -2)^t,\ (2\ 0)^t,\ (0\ 2)^t\right\}.$$

Παρατηρείστε ότι οι δυο αυτές κατηγορίες δεν είναι γραμμικά διαχωρισμένες.