ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

9ο ΕΞΑΜΗΝΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

Νίκος Τράκας

Περιεχόμενα

Quarks and Leptons: An introductory course in Modern Particle Physics,
F. Halzen and A.D. Martin

Gauge Theories in Particle Physics,
I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hay

Relativistic Quantum Mechanics,
J.D. Bjorken and S.D. Drell

Introduction to Elementary Particles,
D. Griffiths

Field Theory, A Modern Primer,
P. Ramond

Σχετικιστική Κβαντομηχανική,
Σ. Τραχανάς

Σωματιδιακή Φυσική. Μια Εισαγωγή στην Βασική Δομή της Ύλης,
Κ.Ε. Βαγιωνάκης

Οι περισσότερες αλληλεπιδράσεις, π.χ.

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-, \quad eq \to eq, \quad \gamma q \to e^+e^-q$$

αποτελούν συστήματα πολλών σωματιδίων και από τα πειράματα που έχουμε στη διάθεσή μας βρισκόμαστε στην περιοχή της σχετικιστικής κινηματικής. Επί πλέον εμφανίζονται και αντισωματίδια που δεν απαιτούνται στην μη σχετικιστική θεωρία.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών θα χρησιμοποιούμε τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν ελεύθερο σωματίδιο (IN και OUT καταστάσεις) και την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων θα τη θεωρούμε ως διαταραχή σε περιορισμένο χώρο και χρόνο.

Χρησιμοποιούμε σχετικιστικό φορμαλισμό της θεωρίας διαταραχών. Σημαντικό ρόλο παίζουν τα ''διαγράμματα Feynman''. Με τη χρήση των ''κανόνων Feynman'' μπορούμε να υπολογίσουμε φυσικές ποσότητες (ενεργές διατομές, ρυθμούς μετάβασης κ.λπ.) χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στη θεωρία πεδίου. Βέβαια, οι κανόνες αυτοί καθορίζονται από τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό και τη θεωρία πεδίου.
Αρχικά θα αγνοήσουμε το spin των σωματιδίων, που κάπως περιπλέκει την εικόνα, και θα ασχοληθούμε με ''ηλεκτρόνια'' χωρίς spin.

Μη σχετικιστική Κβαντομηχανική

Με τις αντικαταστάσεις

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

η κλασική σχέση $E = \frac{p^2}{2m}$ γίνεται ($\hbar = 1$)

$$E = \frac{p^2}{2m} \to i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi = 0$$

όπου $\rho = |\Psi|^2$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας ($|\Psi|^2 d^3x$ δίνει την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στον όγκο d^3x). Αυτή είναι η εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωματίδιο μάζας m.

Ανάλογα με την διατήρηση φορτίου στον ηλεκτρομαγνητισμό, η διατήρηση της πιθανότητας μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{διαφορική μορφή}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv + \oint_{S(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{da} = 0 \quad \text{ολοκληρωτική μορφή}$$

όπου $\mathbf{j}$ είναι η πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Ας βρούμε τη μορφή του. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Schrödinger με $-i\Psi^*$ και την συζυγή της με $i\Psi$ και αθροίζουμε

$$-i\Psi^* \left(i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\Psi \right) + i\Psi \left(-i\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\Psi^* \right) = 0 \rightarrow$$

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{i}{2m}\Psi^*\nabla^2\Psi + \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{i}{2m}\Psi\nabla^2\Psi^* = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} - \frac{i}{2m}\left(\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\underbrace{\left[-\frac{i}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)\right]}_{\mathbf{j}} = 0$$

Η λύση της εξ. Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο $\Psi = N\exp\left[i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et\right)\right]$ δίνει $\rho = |N|^2$ και

$$\mathbf{j} = \frac{-i|N|^2}{2m}\left(\nabla(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) - \nabla(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\right) = \frac{|N|^2}{2m}2\mathbf{p} = \frac{|N|^2}{m}\mathbf{p}$$

Τετραδιανύσματα και αναλλοίωτα Lorentz

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία $i\theta$ στον χώρο (ict, x)

Ό,τι μετασχηματίζεται όπως το $(ct, \mathbf{x})$ καλείται τετραδιάνυσμα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$$

Επίσης, το E/c και $\mathbf{p}$ συγκροτούν τετραδιάνυσμα

$$(E/c, \mathbf{p}) = (E/c, p^1, p^2, p^3) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu$$

Ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο δύο τετραδιανυσμάτων $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ και $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Ορίζοντας το $A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$ μπορούμε να γράψουμε το βαθμωτό γινόμενο ως (επαναλαμβανόμενος δείκτης άνω και κάτω αθροίζεται)

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 =$$
$$A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζουμε τον (μετρικό) τανυστή $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ \text{οι άλλοι όροι μηδενικοί}$$

Ο αντίστροφός του $g^{\mu\nu}$ (δηλαδή $g^{\mu\nu} g_{\nu\mu'} = \delta^\mu_{\mu'}$) εύκολα φαίνεται ότι έχει τους ίδιους όρους. Το γινόμενο των δύο τετραδιανυσμάτων μπορεί να γραφεί

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

Με το $g_{\mu\nu}$ και το $g^{\mu\nu}$ μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες ενός τετραδιανύσματος

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Το διάνυσμα με άνω δείκτη ονομάζεται ανταλλοίωτο (contravariant), ενώ με κάτω δείκτη συναλλοίωτο (covariant). Για να σχηματιστεί ένα αναλλοίωτο, ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, μέγεθος θα πρέπει για κάθε άνω δείκτη να υπάρχει ο αντίστοιχος κάτω. Επίσης, μια σχέση είναι Lorentz συναλλοίωτη όταν οι μη επαναλαμβανόμενοι (άνω και κάτω) δείκτες στις δυο πλευρές της ισότητας αντιστοιχίζονται ένας προς έναν.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$

Παραδείγματα βαθμωτών γινομένων είναι

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, \quad p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$$

Άσκηση 3 Δύο σωματίδια με ίση μάζα M συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι E_{cm}. Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια E_{lab} του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση (υπολογίστε το s στο σύστημα εργαστηρίου)

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

Προσοχή στο τετραδιάνυσμα

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) = \partial^\mu \text{ και } \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) = \partial_\mu$$

Μπορείτε να δείξετε ότι το πρώτο μετασχηματίζεται όπως το $(t, \mathbf{x})$ ενώ το δεύτερο όπως το $(t, -\mathbf{x})$.
Η αντικατάσταση της ενέργειας και της ορμής με τους αντίστοιχους τελεστές γενικεύεται

$$p^\mu \to i\partial^\mu$$

Τέλος, χρησιμοποείται ο συμβολισμός

$$\Box^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

Η εξίσωση Klein-Gordon

Χρησιμοποιώντας της σχετικιστική εξίσωση $E^2 = p^2 + m^2$ και τις αντικαταστάσεις $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ και $\mathbf{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, οδηγούμεθα στην ($\hbar = 1$)

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = \left((-i\boldsymbol{\nabla})^2 + m^2\right)\phi$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \nabla^2\phi = m^2\phi$$

που αποτελεί την εξίσωση Klein-Gordon.

Θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και να αναγνωρίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας και την πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Klein-Gordon επί $-i\phi^*$ και την συζυγή της επί $i\phi$ και προσθέτουμε

$$-i\phi^* \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \nabla^2\phi\right) + i\phi\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* + \nabla^2\phi^*\right) = 0 \rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)\right] = 0$$

οπότε αναγνωρίζουμε ότι

$$\rho = i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right) \text{ και } \mathbf{j} = -i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)$$

Αν πάρουμε για ϕ τη λύση της εξίσωσης Klein-Gordon που αντιστοιχεί σε ελεύθερο σωματίδιο $\phi = Ne^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$, τότε

$$\rho = i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2 \text{ και } \mathbf{j} = -i(2i\mathbf{p})|N|^2 = 2\mathbf{p}|N|^2$$

Η Klein-Gordon μπορεί να γραφεί με τετραδιανύσματα

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (-i\boldsymbol{\nabla})^2\right]\phi = m^2\phi \to -\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right]\phi = m^2\phi \to$$
$$-\partial^\mu\partial_\mu\phi = m^2\phi \to \left(\Box^2 + m^2\right)\phi = 0$$

και

$$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}) = 2(E, \mathbf{p})|N|^2 = 2p^\mu|N|^2$$

Προσέξτε ότι η ρ δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz, αφού είναι ανάλογη με την ενέργεια, αλλά το $\rho\, d^3x$ είναι αναλλοίωτο.
Τις ιδιοτιμές ενέργειας της Klein-Gordon τις παίρνουμε αντικαθιστώντας τη λύση $\phi = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$ στην εξίσωση και παίρνουμε

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Με αρνητικές ενέργειες μπορούμε να έχουμε μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλώτερες ενέργειες και επιπλέον η πιθανότητα ρ μπορεί να γίνει αρνητική. Δεν μπορούμε απλά να αγνοήσουμε τις αρνητικές ενέργειες γιατί πρέπει να έχουμε πάντοτε το πλήρες σύνολο των καταστάσεων.

Ιστορική αναδρομή

''Εξήγηση'' του Dirac για τις αρνητικές ενέργειες της εξίσωσής του.

''Εξήγηση'' των Pauli και Weisskopf για τις αρνητικές ενέργειες της Klein-Gordon. Μετέτρεψαν το j^μ σε πυκνότητα ρεύματος ηλεκτρικού φορτίου $j^\mu = -ie\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$.

Η περιγραφή των λύσεων με $E < 0$ από τους Feynman-Stückelberg

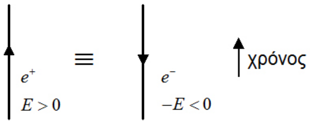
Η βασική ιδέα είναι ότι η κατάσταση με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ περιγράφει σωματίδιο που ''διαδίδεται'' πίσω στο χρόνο, ή ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΙΔΙΟ που διαδίδεται κανονικά με τον χρόνο.
Ας ξεχάσουμε τη ''δυσκολία'' του σπιν και ας θεωρήσουμε ότι η KG περιγράφει ηλεκτρόνια με φορτίο $-e$. Οπότε, το τετραδυάνυσμα του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος γίνεται

$$j^{\mu}(e^{-}) = -2e|N|^2(E, \mathbf{p})$$

Για το αντισωματίδιο, με φορτίο $+e$ θα γράφαμε

$$j^{\mu}(e^{+}) = +2e|N|^2(E, \mathbf{p}) = -2e|N|^2(-E, -\mathbf{p})$$

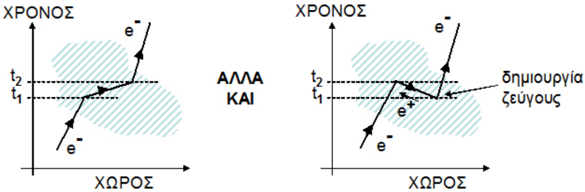
Αυτό περιγράφει σωματίδιο φορτίου $-e$ με ενέργεια $-E$ και ορμή $-\mathbf{p}$. Δηλαδή



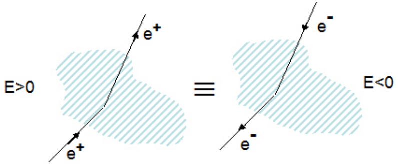
Προσέξτε ότι

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

Γι΄ αυτό ακριβώς μπορούμε να περιγράφουμε αρνητικής ενέργειας σωματίδια που πηγαίνουν ‘‘πίσω’’ στο χρόνο ως θετικής ενέργειας αντισωματίδια που πηγαίνουν ‘‘μπροστά’’ στον χρόνο.



Διπλή σκέδαση ηλεκτρονίου από πεδίο. Στο δεύτερο διάγραμμα, μεταξύ των t_1 και t_2, η κατάσταση περιγράφει 3 σωματίδια!!



Μπορούμε να περιγράψουμε τα πάντα με την κυματοσυνάρτηση του e^-. Δεν χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του e^+.

Μη σχετικιστική θεωρία διαταραχών

Ας θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις ϕ_n της εξίσωσης Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο. Η χαμιλτονιανή H_0 είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n \qquad \text{με} \quad \int_V \phi_m^*\phi_n d^3x = \delta_{mn}$$

(νορμαλισμός=1 σωματίδιο/όγκο, $\rho = |\phi|^2 \rightarrow N = V^{-1/2}$)
Ζητάμε να λύσουμε την

$$\left(H_0 + V(\mathbf{x}, t)\right)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1}$$

Οι λύσεις ϕ_n αποτελούν πλήρες σύνολο, οπότε μπορούμε να αναλύσουμε την ψ

$$\psi = \sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t}$$

Βάζοντας αυτήν την έκφραση στην εξ.1 παίρνουμε

$$(H_0 + V(\mathbf{x},t))\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} = i\frac{\partial}{\partial t}\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} \rightarrow$$

$$\sum_n a_n(t)E_n\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} + V(\mathbf{x},t)\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} =$$

$$i\sum_n \frac{da_n}{dt}\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} + i\sum_n a_n(t)(-iE_n)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t}$$

Απαλοίφοντας τον πρώτο και τελευταίο όρο στην παραπάνω ισότητα καταλήγουμε στην σχέση

$$V(\mathbf{x},t)\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} = i\sum_n \frac{da_n}{dt}\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t}$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_f^* και ολοκληρώνοντας

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \int d^3x\, \phi_f^*(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} =$$

$$\sum_n \int d^3x\, V(\mathbf{x},t)a_n(t)\phi_f^*(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} \rightarrow$$

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int d^3x\, \phi_f^*(\mathbf{x})V(\mathbf{x},t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-i(E_n-E_f)t} \qquad (2)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το V δρα σε μια ορισμένη κατάσταση ϕ_i της ελεύθερης χαμιλτονιανής την χρονική στιγμή $t = -T/2$, δηλαδή

$$\text{για} \quad t = -\frac{T}{2}, \qquad \phi_n = \phi_i \rightarrow \begin{array}{ll} a_n = 1, & n = i \\ a_n = 0, & n \neq i \end{array}$$

και τότε

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x\, \phi_f^*(\mathbf{x})V(\mathbf{x},t)\phi_i(\mathbf{x})e^{-i(E_i-E_f)t} \qquad (3)$$

Θεωρώντας ότι το V είναι ασθενές και αργά μεταβαλόμενο, η μεταβολή κάθε a_n είναι μικρή και επομένως κάθε a_n με $n \neq i$ θα παραμένει κοντά στο μηδέν. Με αυτό το συλλογισμό η εξ.3 ισχύει για κάθε χρονική στιγμή (και όχι μόνο για $t = -T/2$). Ολοκληρώνοντας την εξ.3 παίρνουμε

$$a_f = -i \int_{-T/2}^{t} dt' \int d^3x \, \phi_f^* V \phi_i e^{-i(E_i - E_f)t'} \to \tag{4}$$

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \left(\phi_f e^{-iE_f t}\right)^* V \left(\phi_i e^{-iE_i t}\right) \to$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x \, \phi_f^*(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}, t)$$

Για να ισχύει η προσέγγιση θα πρέπει $a_f(t) << 1$. Μπορούμε να αποδόσουμε στο $|T_{fi}|^2$ την έννοια της πιθανότητας ότι το σωματίδιο από την αρχική κατάσταση i πηγαίνει στην τελική f;

Ας υποθέσουμε ότι $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$. Τότε

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -\, i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x\, \phi_f^* e^{iE_f t} V(\mathbf{x}) \phi_i e^{-iE_i t} = \\ &= -\, i \left[\int d^3x\, \phi_f^* V \phi_i \right] \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i(E_i - E_f)t} = \\ &= -\, iV_{fi}\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i) \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε V_{fi} το ολοκλήρωμα μέσα στην αγκύλη της δεύτερης σειράς ενώ η συνάρτηση δ δείχνει την διατήρηση της ενέργειας. Αλλά για $E_f = E_i$, η αρχή της αβεβαιότητας μας λέει ότι χρειαζόμαστε άπειρο χρόνο για να μεταβούμε από τη μια κατάσταση στην άλλη. Γι΄ αυτό καλύτερα ορίζουμε την ποσότητα

$$W = \lim_{T \to \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2\, 4\pi^2\, \left[\delta(E_f - E_i)\right]^2$$

που αποτελεί την πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδου χρόνου (transition probability per unit time).

Ο τετραγωνισμός της συνάρτησης δ δίνει

$$(2\pi)^2 \left[\delta(E_f - E_i)\right]^2 = 2\pi \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt$$
$$= T\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)$$

οπότε παίρνουμε

$$W = |V_{fi}|^2\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση έχει έννοια αν ολοκληρωθεί σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων. Συνήθως ξεκινάμε από μια καθορισμένη κατάσταση και καταλήγουμε σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων με πυκνότητα $\rho(E_f)$ (δηλαδή $\rho(E_f)dE_f$ είναι ο αριθμός καταστάσεων με ενέργεια μεταξύ των E_f και $E_f + dE_f$). Οπότε ορίζουμε ως ρυθμό μετάπτωσης (transition rate)

$$W_{fi} = \int dE_f\, \rho(E_f) W = 2\pi \int dE_f\, \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) =$$
$$= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

Μπορούμε να πάμε μία τάξη προσέγγισης παρακάτω βάζοντας την λύση για το a_f, εξ.4, στην διαφορική εξίσωση του a_f, εξ.2

$$\frac{da_f}{dt} = ... + (-i) \sum_{n \neq i} \left[(-i) \int_{-T/2}^{t} dt' \, V_{ni} e^{-i(E_i - E_n)t'} \right] V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t}$$

όπου ... είναι ο όρος πρώτης τάξης και η έκφραση μέσα στις αγκύλες είναι ο συντελεστής a_n. Οπότε, έχουμε

$$T_{fi} = ... + (-i)^2 \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, e^{-i(E_n - E_f)t} \int_{-T/2}^{t} dt' \, e^{-i(E_i - E_n)t'}$$

Για να έχει νόημα η δεύτερη ολοκλήρωση εισάγουμε μια απειροστή ποσότητα $\epsilon > 0$ και στο τέλος βέβαια $\epsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i(E_i - E_n + i\epsilon)t'} = i \frac{e^{-i(E_i - E_n + i\epsilon)t}}{(E_i - E_n + i\epsilon)}$$

και το T_{fi} γράφεται

$$T_{fi} = ... + (-2\pi i) \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} \delta(E_f - E_i)$$

Άσκηση 4 Δείξτε ότι ο ρυθμός μετάβασης i→f για την προσέγγιση 2ης τάξης δίνεται από τη σχέση $W_{fi} = 2\pi \left|V_{fi}\right|^2 \rho(E_i)$, όπου το V_{fi} αντικαθίσταται από τη σχέση

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} + ...$$

Ποιά είναι η σχέση για την επόμενη διόρθωση (3ης τάξης σε V).

Δηλαδή για κάθε σημείο αλληλεπίδρασης έχουμε έναν παράγοντα V_{ij} και για κάθε ενδιάμεση διάδοση έχουμε ένα διαδότη $\sim 1/(E_i - E_j)$. Αυτή η ενδιάμεση κατάσταση είναι ''εικονική'' (virtual) με την έννοια ότι $E_i \neq E_j$ (δεν διατηρείται η ενέργεια) αλλά βέβαια $E_f = E_i$ που φαίνεται από την παρουσία της $\delta(E_f - E_i)$. Όλα τα παραπάνω πρέπει να γενικευτούν για σχετικιστικά σωματίδια και αντισωματίδια.

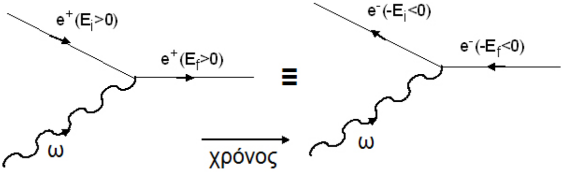
Κανόνες για πλάτης σκέδαση στην εικόνα Feynman-Stückelberg

Πρέπει λοιπόν να εισάγουμε αντισωματίδια που πηγαίνουν πίσω στο χρόνο. Βέβαια έως τώρα δεν έχουμε δουλέψει σε ‘‘συναλλοίωτο περιβάλλον’’ (το δυναμικό $V(\mathbf{x})$ ήταν στατικό). Πώς θα περιγράψουμε κρούσεις σωματιδίων;
Ας κάνουμε μερικά προθύστερα σχήματα. Ας εισάγουμε το φωτόνιο ως το σωμάτιο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και ας δούμε την επίδραση του δυναμικού ως σκέδαση του σωματιδίου με το φωτόνιο. Τότε χρειαζόμαστε μια χρονική εξάρτηση για το φωτόνιο: $e^{-i\omega t}$. Το χρονικό ολοκλήρωμα στο T_{fi} γίνεται

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\,\left(e^{-iE_f t}\right)^*\,e^{-i\omega t}\,e^{-iE_i t}=\delta(E_f-\omega-E_i)$$

απ΄ όπου φαίνεται ότι $E_f=E_i+\omega$. Για αντισωματίδιο θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\,\left(e^{-i(-E_i)t}\right)^*\,e^{-i\omega t}\,e^{-i(-E_f)t}=\delta(E_f-\omega-E_i)$$



οπότε και πάλι έχουμε $E_f = E_i + \omega$. Δηλαδή ο κανόνας είναι

$$\int d^4x \, \phi^*_{\varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma} \, V \, \phi_{\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma}$$

όπου ϕ είναι για σωματίδια και όχι για αντισωματίδια.

Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο κανόνας $\int \phi^*_{\text{outgoing}} V \phi_{\text{ingoing}} \, d^4x$ πληροί τη διατήρηση ενέργειας στην περίπτωση της δημιουργίας ζεύγους e^+e^- ή στην αντίστοιχη εξαΰλωση. Να γίνει το ίδιο και για την διατήρηση της ορμής. Ο όρος του φωτονίου είναι $e^{-i(\omega t - \mathbf{px})}$.

Η εξίσωση Klein-Gordon και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από ένα διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ και ένα βαθμωτό δυναμικό V. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$$

επειδή η δεύτερη ικανοποιείται αν θέσουμε $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, η πρώτη γράφεται

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

και επομένως η ποσότητα στην παρένθεση μπορεί να γραφεί ως η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} V \to \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} V$$

(το αρνητικό πρόσημο στο όρο $\boldsymbol{\nabla} V$ επιλέγεται για να δείνει τη γνωστή σχέση στην ηλεκτροστατική περίπτωση). Τα δυναμικά $\mathbf{A}$ και V δεν ορίζονται μονοσήμαντα.

Θα πάρουμε τα ίδια **E** και **B** με τα **A**′ και V' που ορίζονται από τους **μετασχηματισμούς βαθμίδας**

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \qquad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\text{ή σε τετραδιανύσματα} \quad A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} f, \quad \text{για} \quad A^{\mu} = (V, \mathbf{A})$$

όπου f μια τυχαία συνάρτηση των **x** και t. Πράγματι

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla V' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla f}{\partial t} - \nabla V + \nabla \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$$

Ο τρόπος εισαγωγής των δυναμικών στην Klein-Gordon θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε αυτή η ελευθερία επιλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Αυτός ο τρόπος είναι ο λεγόμενος της ‘‘ελάχιστης αντικατάστασης’’ (minimal substitution)

$$E \to E - qV = i\frac{\partial}{\partial t} - qV, \qquad \mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A} = -i\nabla - q\mathbf{A}$$

$$\text{ή σε τετραδιανύσματα} \quad p^{\mu} \to p^{\mu} - qA^{\mu} = i\partial^{\mu} - qA^{\mu}$$

με q το φορτίο του σωματιδίου. Η Klein-Gordon γίνεται

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)^2 \phi = (-i\mathbf{\nabla} - q\mathbf{A})^2 \phi + m^2\phi$$

$$\left[(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2\right]\phi = 0$$

Αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας αν η κυματοσυνάρτηση αλλάξει με μια φάση

$$\phi' = \phi e^{iqf}$$

Άσκηση 6 Δείξτε την παραπάνω πρόταση

Στην ηλεκτροστατική περίπτωση, $\mathbf{A} = 0$, ο όρος qV είναι η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου U. Με την γνωστή αντικατάσταση $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})e^{-iEt}$, όπου E η ενέργεια του σωματιδίου, παίρνουμε την χρονοανεξάρτητη εξίσωση

$$
\begin{aligned}
&(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi + m^2\phi = 0 \\
&(\partial_t + iqV, -\boldsymbol{\nabla})(\partial_t + iqV, \boldsymbol{\nabla})\phi + m^2\phi = 0 \\
&\left[(\partial_t + iqV)^2 - \nabla^2\right]\phi + m^2\phi = 0 \\
&\left[(\partial_t + iqV)^2 - \nabla^2\right]\phi(\mathbf{x})e^{-iEt} + m^2\phi(\mathbf{x})e^{-iEt} = 0 \\
&(E - U)^2\phi(\mathbf{x}) = -\nabla^2\phi(\mathbf{x}) + m^2\phi(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{5}
$$

Η εξίσωση Klein-Gordon και το πεδίο Coulomb

Η δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πρωτονίου είναι $U = -e^2/r$. Η σφαιρική συμμετρία του προβλήματος μας οδηγεί άμεσα στο να γράψουμε τη λύση με τη μορφή χωριζομένων μεταβλητών

$$
\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{6}
$$

όπου $Y_l^m(\theta,\varphi)$ οι σφαιρικές αρμονικές (όπως ακριβώς στην εξίσωση του Schrödinger). Αν συγκρίνουμε το τετράγωνο του τελεστή της στροφορμής

$$\mathbf{l}^2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

με την Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\mathbf{l}^2}{r^2}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $Y_m^l(\theta,\varphi)$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\mathbf{l}^2$ με ιδιοτιμές $l(l+1)$: $\mathbf{l}^2 Y_m^l(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_m^l(\theta,\varphi)$. Οπότε, αντικαθιστώντας την εξ.6 στην εξ.5, παίρνουμε

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rR)}{\partial r^2}Y_m^l - \frac{l(l+1)}{r^2}RY_m^l + \left[(E-U)^2 - m^2\right]RY_m^l = 0$$

Η Y_m^l απαλοίφεται. Πολλαπλασιάζοντας επί r και ορίζοντας $y(r) = rR(r)$, παίρνουμε την διαφορική εξίσωση ως προς $y(r)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[(E-U)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right] y = 0 \rightarrow \\
&\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[E^2 - m^2 + \frac{2Ee^2}{r} - \frac{l(l+1) - e^4}{r^2}\right] y = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

όπου αντικαταστήσαμε την δυναμική ενέργεια με $-e^2/r$. Επειδή ψάχνουμε για δέσμιες καταστάσεις, θα πρέπει $y(r \rightarrow \infty) = 0$ και βέβαια $y(r = 0) = 0$ από τον ορισμό του $y(r)$. Για τη λύση της, ακολουθούμε την γνωστή διαδικασία που ακολουθείται για την αντίστοιχη λύση της Schrödinger. Για μεγάλα r, η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{\partial^2 y_\infty}{\partial r^2} + \left[E^2 - m^2\right] y_\infty = 0 \tag{8}$$

Στις δέσμιες καταστάσεις που αναζητούμε, η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική, οπότε η ολική ενέργεια είναι μικρότερη από την ελάχιστη m. Οπότε, $E^2 - m^2 = -\gamma^2$. Η λύση της εξ.8 είναι

$$y_\infty = e^{\pm\gamma r}$$

Κρατάμε βέβαια την φθίνουσα λύση και ξαναγράφουμε

$$y(r) = e^{-\gamma r} F(r)$$

όπου η F θα θέλαμε να είναι ένα πολυώνυμο. Η εξίσωση για την $F(r)$, βάζοντας την προηγούμενη λύση στην εξ.7, γίνεται

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\gamma \frac{\partial F}{\partial r} + \left[\frac{2Ee^2}{r} - \frac{l(l+1) - e^4}{r^2} \right] F = 0$$

Αν η F είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού, για μεγάλα r θα έχουμε $F(r) \sim r^n$, και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$n(n-1)r^{n-2} - 2\gamma n r^{n-1} + 2Ee^2 r^{n-1} - (l(l+1) - e^4)r^{n-2} = 0 \xrightarrow{r\to\infty}$$

$$-2\gamma n r^{n-1} + 2Ee^2 r^{n-1} = 0 \to \gamma = \frac{Ee^2}{n}$$

Αν τώρα s είναι η μικρότερη δύναμη του πολυωνύμου F, τότε για μικρά r θα είναι $F(r) \sim r^s$ και η διαφορική εξίσωση θα δίνει

$$s(s-1)r^{s-2} - 2\gamma s r^{s-1} + 2Ee^2 r^{s-1} - (l(l+1) - e^4)r^{s-2} = 0 \xrightarrow{r\to 0}$$
$$s(s-1)r^{s-2} - (l(l+1) - e^4)r^{s-2} = 0 \to$$
$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1) - 4e^4}}{2}$$

Κρατάμε την θετική λύση

$$s = \frac{1 + \sqrt{1 + 4l(l+1) - 4e^4}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}$$

Βέβαια, ο ανώτερος βαθμός του πολυωνύμου n και ο κατώτερος s συνδέονται με την σχέση $n = s + k$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Από την $E^2 - m^2 = -\gamma^2$ και την $\gamma = \frac{Ee^2}{n}$ προκύπτει η σχέση για τις ενέργειες

$$E^2 - m^2 = -E^2 \frac{e^4}{n^2} \to E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{n^2}}}$$

Αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του e^4 παίρνουμε

$$E = m - \frac{me^4}{2n^2} + \frac{3me^8}{8n^4} + \ldots$$

Αλλά, το n είναι συνάρτηση του s ($n = s + k$) ενώ το s είναι κι αυτό συνάρτηση του e^4, επομένως θα πρέπει και αυτό να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του e^4

$$n = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4} + k = \frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{e^4}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}} + k =$$

$$\frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{e^4}{2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right) + k = l + k + 1 - \frac{e^4}{2l + 1} + \ldots$$

Ονομάζοντας $4N = l + k + 1$ παίρνουμε

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{N^2\left(1 - \frac{e^4}{N(2l+1)}\right)^2} = \frac{1}{N^2}\left(1 + \frac{2e^4}{N(2l+1)}\right)$$

και η έκφραση για την ενέργεια γίνεται

$$E = m - \frac{me^4}{2N^2} - \frac{me^8}{2N^4}\left(\frac{N}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$$

Ο τρίτος όρος αποτελεί την σχετικιστική διόρθωση η οποία όμως δεν συμφωνεί με την αντίστοιχη του τύπου του Sommerfeld και ο λόγος είναι ότι το ηλεκτρόνιο έχει ιδιοστροφορμή (spin). Η Klein-Gordon περιγράφει σωματίδια με μηδενικό spin, π.χ. σωματίδια π (πιόνια).

Δεν υπάρχουν στοιχειώδη σωματίδια με σπιν μηδέν. Βέβαια υπάρχουν αδρόνια με σπιν μηδέν αλλά δεν είναι στοιχειώδη, είναι συμπλέγματα από κουάρκ.
Για να αποφύγουμε τις δυσκολίες του σπιν θα θεωρήσουμε ''ηλεκτρόνια'' με σπιν=0, για να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία διαταραχών με συναλλοίωτο τρόπο.

Ένα ''ηλεκτρόνιο'' σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A^μ

Όπως είδαμε η Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο γράφεται σε συναλλοίωτη μορφή

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right) \phi = 0$$

Η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = \left(A^0, \mathbf{A}\right)$ οδηγεί στην αντικατάσταση

$$p^\mu \to p^\mu - (-e)A^\mu$$

και στην κβαντομηχανική

$$i\partial^\mu \to i\partial^\mu + eA^\mu$$

όπου θεωρήσαμε το φορτίο του ''ηλεκτρονίου'' ίσο με $-e$. Τότε η KG γράφεται

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2\right)\phi = -V\phi$$

όπου

$$V = -ie\left(\partial^{\mu}A_{\mu} + A^{\mu}\partial_{\mu}\right) - e^2A^2 \tag{9}$$

Το πρόσημο του V επιλέγεται σε συμφωνία με το σχετικό πρόσημο της κινητικής και δυναμικής ενέργειας στην εξίσωση του Schrödinger.

Το δυναμικό χαρακτηρίζεται από την ποσότητα e που σχετίζεται με την σταθερά λεπτής υφής α

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

Ακριβώς, η μικρή αυτή τιμή μας επιτρέπει να αναπτύξουμε το δυναμικό σε δυνάμεις του α και να εφαρμόσουμε θεωρία διαταραχών. Η χαμηλότερης τάξης (σε δυνάμεις του α) συνεισφορά σε ένα πλάτος σκέδασης θα αποτελεί μια καλή προσέγγιση.

Ακριβώς, δουλεύοντας στην χαμηλότερη τάξη, παραλείπουμε το όρο ανάλογο του e^2 στην εξ.9. Το πλάτος σκέδασης T_{fi} από ϕ_i σε ϕ_f από το δυναμικό A^μ είναι

$$T_{fi} = -i\int d^4x\, \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) =$$
$$= -i\int d^4x\, \phi_f^*(x)(-ie)\left(A^\mu\partial_\mu + \partial_\mu A^\mu\right)\phi_i(x)$$

Χρησιμοποιώντας, για τον δεύτερο όρο, ολοκλήρωση κατά μέρη (και διώχνοντας το επιφανειακό ολκλήρωμα μιας και το δυναμικό πηγαίνει στο μηδέν όταν $|\mathbf{x}| \to \infty$ και $t \to \pm\infty$)

$$\int d^4x\, \phi_f^*(x)\partial_\mu\left(A^\mu\phi_i(x)\right) = -\int d^4x\, \left(\partial_\mu\phi_f^*(x)\right)A^\mu\phi_i(x)$$

το T_{fi} γίνεται

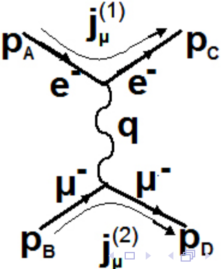
$$T_{fi} = -i\int d^4x\,(-ie)\left(\phi_f^* A^\mu\partial_\mu\phi_i - (\partial_\mu\phi_f^*)A^\mu\phi_i\right) =$$
$$= -i\int d^4x\,(-ie)\left(\phi_f^*\partial_\mu\phi_i - \phi_i\partial_\mu\phi_f^*\right)A^\mu = -i\int d^4x\, j_\mu^{(fi)}A^\mu$$

όπου $j_\mu^{(fi)} = -ie\left(\phi_f^*\partial_\mu\phi_i - \phi_i\partial_\mu\phi_f^*\right)$ είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα για την μετάβαση από $i \to f$. Αν $\phi_i = N_i e^{-ip_i x}$ και $\phi_f = N_f e^{-ip_f x}$, τότε

$$j_\mu^{(fi)} = -eN_iN_f(p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i)x}$$

Σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’ και ‘‘μιονίου’’

Με τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’ από άλλο σωματίδιο, για παράδειγμα ‘‘μιόνιο’’ (για να αποφύγουμε όμοια σωματίδια). Το σχετικό διάγραμμα Feynman μας καθοδηγεί για το πώς θα γράψουμε τη σκέδαση. Το όλο ‘‘πρόβλημα’’ είναι να βρούμε το δυναμικό A^μ που αντιστοιχεί στο ρεύμα του ‘‘μιονίου’’.



Άσκηση 7 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε συναλλοίωτη μορφή $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ όπου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία επιλογής της βαθμίδας μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι $\Box^2 A^\mu = j^\mu$.

Από την εξίσωση του Maxwell έχουμε $\Box^2 A^\mu = j^\mu$ όπου, ακριβώς αντίστοιχα με το ρεύμα του ''ηλεκτρονίου'', γράφουμε

$$j^{\mu(2)} = -eN_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B)x}$$

Αλλά, $\Box^2 e^{iqx} = -q^2 e^{iqx}$. Άρα, η λύση της $\Box^2 A^\mu = j^{\mu(2)}$ είναι

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j^{\mu(2)} \qquad \text{με} \quad q = p_D - p_B$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας αυτό το A^μ παίρνουμε υπ' όψη μας το ρεύμα του ''μιονίου''

$$T_{fi} = -i \int d^4x\, j^{\mu(1)} \left(-\frac{1}{q^2}\right) j^{(2)}_\mu =$$

$$= -i \int d^4x\, (-e)^2 N_A N_B N_C N_D (p_D + p_B)^\mu \left(-\frac{1}{q^2}\right) (p_A + p_C)_\mu \times$$

$$e^{i(p_D - p_B)x} e^{i(p_C - p_A)x} =$$

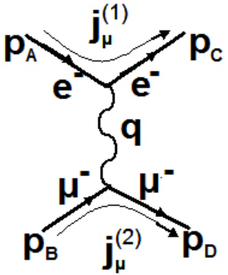
$$
\begin{aligned}
= -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_A - p_B) \times \\
(i) \left[(ie)(p_A + p_C)^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie)(p_B + p_D)^\nu \right]
\end{aligned}
$$

Η έκφραση μέσα στην αγκύλη της τελευταίας σχέσης συμβολίζεται συνήθως με $-i\mathcal{M}$

$$
-i\mathcal{M} = (ie)(p_A + p_C)^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie)(p_B + p_D)^\nu
$$

Το $\mathcal{M}$ ονομάζεται αναλλοίωτο πλάτος (invariant amplitude) της συγκεκριμένης σκέδασης. Η συνάρτηση δέλτα εκφράζει την διατήρηση ενέργειας και ορμής. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα αν είχαμε το ‘‘μιόνιο’’ στο πεδίο A^μ του ‘‘ηλεκτρονίου’’.

Προσπαθώντας να κατατάξουμε τους διάφορους όρους στην διαταρακτική ανάπτυξη, ανάλογα με τα διαγράμματα στην μη σχετικιστική περίπτωση, κάνουμε και εδώ ανάλογα διαγράμματα. Στο προηγούμενο διάγραμμα, που το ξαναδείχνουμε, η μεσαία κυματοειδής γραμμή αναπαριστά τον διαδότη του φωτονίου και αντιστοιχεί στον όρο $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ (οι εκθέτες Lorentz αφείλονται στο ότι το φωτόνιο έχει σπιν=1). Το q καθορίζεται από την διατήρηση της ορμής - ενέργειας στις δύο κορυφές $q = p_C - p_A = p_D - p_B$. Άρα $q^2 \neq 0$: το φωτόνιο είναι ''εκτός του φλοιού μάζας'' (off mass shell).



Σε κάθε κορυφή αντιστοιχούμε τον όρο $ie(p_A + p_C)^\mu$ και $ie(p_B + p_D)^\nu$ που περιέχει τη σταθερά σύζευξης του ηλεκτρομαγνητισμού e. Οι δείκτες μ και ν θα ζευγαρωθούν με τους αντίστοιχους του διαδότη του φωτονίου. Οι διάφοροι παράγοντες i απλά μπαίνουν για να μπορέσουμε να γενικεύσουνε εύκολα αυτούς τους κανόνες για ανώτερης τάξης διαγράμματα.
Έτσι φτιάχνουμε τους κανόνες Feynman που μας βοηθούν να υπολογίζουμε γρήγορα τις συνεισφορές των αντίστοιχων διαγραμμάτων.

Η ενεργός διατομή και το αναλλοίωτο πλάτος

Για να συνεχίσουμε θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον νορμαλισμό της κυματοσυνάρτησης $\phi = Ne^{-ipx}$. Υπενθυμίζουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι $\rho = 2E|N|^2$. Ακριβώς, το ότι η ρ είναι ανάλογη της ενέργειας E, είναι αυτό που χρειάζεται για να παραμείνει η πιθανότητα σχετικιστικά αναλλοίωτη: ο όγκος d^3x συστέλλεται κατά Lorentz και η ενέργεια E αποκαθιστά αυτή την μεταβολή στο γινόμενο $d^3x\,\rho$. Επομένως, είναι προτιμότερο να νορμαλίσουμε, αντί του "ένα σωματίδιο σε V", σε "$2E$ σωματίδια σε όγκο V"

$$\int_V d^3x\,\rho = 2E \qquad \text{αντί του} \quad \int d^3x\,\rho = 1$$

οπότε έχουμε ότι $N = 1/\sqrt{V}$.

Τρία βήματα για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής:
1. Ο ''ρυθμός μετάπτωσης ανά μονάδα όγκου'', για την αλληλεπίδραση $A + B \to C + D$, είναι

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{VT}$$

όπου T είναι η χρονική διάρκεια της αλληλεπίδρασης και, βέβαια,

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}$$

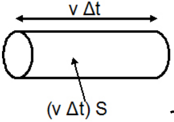
Ο τετραγωνισμός της δ, σε τέσσερις διαστάσεις, θα δώσει

$$\left(\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\right)^2 =$$
$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(p_C + p_D - p_A - p_B)} =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^4}(VT)\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

Επομένως,

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) |\mathcal{M}|^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^4 \right]^2$$

2. Για να συγκρίνουμε πειράματα πρέπει να ``απομονώσουμε''



την εξάρτηση από την ροή των εισερχομένων σωματιδίων και από την πυκνότητα των σωματιδίων του στόχου.

α) Ροή προσπιπτόντων σωματιδίων

$$\frac{\text{αριθμ. σωματ.}}{S\,\Delta t} = \frac{(\text{πυκν.})\cdot(\text{όγκος})}{S\,\Delta t} = \frac{2E_A/V \cdot v_A\,\Delta t S}{S\,\Delta t} = \frac{2E_A}{V} v_A$$

β) Πυκνότητα σωματιδίων στόχου $2E_B/V$

3. Θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλες τις επιτρεπτές καταστάσεις των τελικών σωματιδίων. Υποθέτουμε την ''σύγκρουση'' ενός σωματιδίου του στόχου με ένα σωματίδιο της δέσμης σε όγκο $V = L^3$ $(-L/2 \leq x, y, z \leq) L/2$. Επιβάλουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες στις κυματοσυναρτήσεις

$$\begin{aligned}
\Psi(x - L/2, y, z) &= \Psi(x + L/2, y, z) \\
\Psi(x, y - L/2, z) &= \Psi(x, y + L/2, z) \\
\Psi(x, y, z - L/2) &= \Psi(x, y, z + L/2)
\end{aligned}$$

και στο τέλος $L \to \infty$. Αλλά $\Psi = e^{-i\mathbf{kx}}$, και επομένως $k_x(x + L/2) = k_x(x - L/2) + 2\pi n_x$ με n_x ακέραιο. Άρα $k_x = (2\pi/L)n_x$ και ανάλογα $k_y = (2\pi/L)n_y$ και $k_z = (2\pi/L)n_z$. Αυτή είναι ακριβώς η κβάντωση της ορμής.
Επομένως, ο αριθμός των δυνατών ακεραίων Δn_x στην περιοχή k_x, $k_x + dk_x$ είναι $\Delta n_x = (L/2\pi)dk_x$ και όμοια για τις άλλες συνιστώσες. Για τις πιθανές καταστάσεις στην περιοχή $\mathbf{k}$, $\mathbf{k} + \mathbf{dk}$ είναι

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k$$

Για το δικό μας νορμαλισμό ($2E$ σωματίδια στον όγκο V), θα έχουμε $\frac{V}{2E(2\pi)^3} d^3k$. Αν ορίσουμε λοιπόν ως

$$\text{ενεργός διατομή } \sigma = \int \frac{W_{fi}}{(\text{αρχική ροή})} (\text{αριθμ. τελ. καταστάσων})$$

μπορούμε να γράψουμε (θεωρώντας το σωματίδιο B ακίνητο)

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)|\mathcal{M}|^2 \frac{1}{V^4}}{\frac{2E_A v_A}{V} \frac{2E_B}{V}} \frac{V d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{V d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} =$$

$$= \frac{1}{F} |\mathcal{M}|^2 dQ \qquad (10)$$

όπου

$$F = v_A 2E_A 2E_B,$$

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C}\frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

Ο όρος $d^3p/2E$ είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz, αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι και το F είναι επίσης. Να σημειώσουμε ότι για γενική κρούση (το B να μην είναι ακίνητο) θα πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση $v_A \to |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$.

Ας δούμε ξανά τι μας λέει η βασική σχέση: το γινόμενο

$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)|\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C}\frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

μας δίνει τον αριθμό των σκεδαζομένων σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και όγκου. Για να κάνουμε την ενεργό διατομή ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο πείραμα, διαιρούμε με την ροή των αρχικών σωματιδίων (που για ακίνητο σωματίδιο είναι η πυκνότητά του). Σχηματικά

$$\frac{\text{αριθμ.σκεδαζ.σωματ.}}{(\text{όγκο})(\Delta t)} = (\text{πυκν.σωματ.στόχου})(\text{πυκν.σωματ.}\cdot v_A)\sigma$$

$$n_S = (n_t)(n_A v_A)\sigma \quad \text{διαστατικά } 1/(L^3 T) = (1/L^3)(1/L^3 \cdot L/T)\sigma$$

όπου, στην τελευταία σχέση, η πρώτη παρένθεση αντιστοιχεί στον στόχο και η δεύτερη στη δέσμη. Πάντοτε το n_S θα είναι ανάλογο του $(n_t)(n_A v_A)$. **Στο σ κρύβεται όλη η Φυσική**. Διαστατικά, το σ είναι εμβαδόν(L^2). Γι' αυτό και το προσομοιάζουμε ως την ''ενεργό επιφάνεια'' της δέσμης που βλέπει ο στόχος, δηλαδή η επιφάνεια αλληλεπίδρασης των Α και Β.

Άσκηση 8 Δείξτε ότι η έκφραση $F = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B$ είναι, για $\mathbf{p}_A$ και $\mathbf{p}_B$ συγγραμικά και με αντίθετη φορά, ίση με $4\left(|\mathbf{p}_A|E_B + |\mathbf{p}_B|E_A\right)$ και στη συνέχεια ότι είναι ίση με $4\left[\left(p_A^\mu p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2}$, οπότε και σχετικιστικά αναλλοίωτη.

Άσκηση 9 Δείξτε ότι στο σύστημα Κ.Μ. της $A + B \to C + D$ οι όροι F και dQ στον τύπο της ενεργού διατομής, εξ.10, γίνονται

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega, \qquad \text{και} \quad F = 4p_i\sqrt{s}$$

όπου $d\Omega$ είναι η στερεά γωνία γύρω από το p_C, $s = (E_A + E_B)^2$, $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| \equiv p_i$ και $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| \equiv p_f$.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9, η ενεργός διατομή στο Κ.Μ. γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s}$$

Άσκηση 10 Δείξτε ότι για υψηλές ενέργειες, η ενεργός διατομή για την σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’-‘‘μιονίου’’ δίνεται από τη σχέση

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = \frac{\alpha^2}{4s} \left(\frac{3 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$$

Ο ρυθμός διάσπασης ως συνάρτηση του $|\mathcal{M}|$

Για διασπάσεις της μορφής $A \to 1+2+3+...+n$ ακολουθούμε την ίδια μέθοδο

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A}|\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_n(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_A - p_1 - p_2 - ... - p_n)$$

Το $d\Gamma$ ονομάζεται διαφορικός ρυθμός (differential rate).

Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1+2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2}\int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

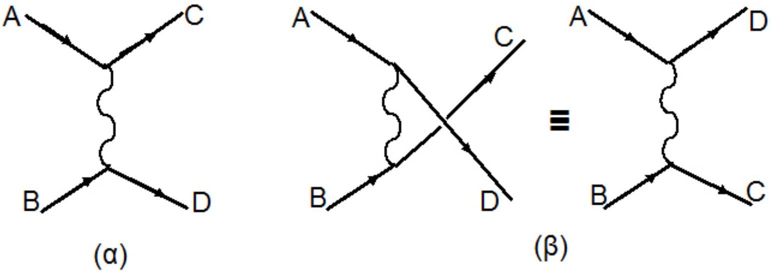
Ο ολικός ρυθμός διάσπασης είναι το άθροισμα των Γ για όλες τις δυνατές διασπάσεις του συγκεκριμένου σωματιδίου. Βέβαια, το Γ δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = -\frac{dN_A}{dt}\frac{1}{N_A} \rightarrow N_A(t) = N_A e^{-\Gamma t}$$

Χρόνος ζωής ονομάζεται η ποσότητα Γ^{-1}.

Σκέδαση ''ηλεκτρονίου''-''ηλεκτρονίου''

Η διαφορά με την αντίστοιχη σκέδαση ''ηλεκτρονίου'' - ''μιονίου'' είναι ότι τώρα έχουμε όμοια σωματίδια. Επομένως, θα πρέπει το πλάτος $\mathcal{M}$ για $A + B \rightarrow C + D$ να παραμένει αναλλοίωτο στην αλλαγή $A \longleftrightarrow B$ και $C \longleftrightarrow D$. Έτσι, εκτός από το διάγραμμα (α) του Σχ.57, θα πρέπει να πάρουμε υπ' όψη μας και το διάγραμμα (β) του ιδίου σχήματος. Ο λόγος είναι ότι έχοντας όμοια σωματίδια, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν το ηλεκτρόνιο C έρχεται από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο A ή από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο B.



Επομένως, θα πρέπει να αθροίσουμε τα πλάτη και όχι τις πιθανότητες, μιας και οι δύο περιπτώσεις έχουν τις ίδιες αρχικές και τελικές καταστάσεις. Για το (α) έχουμε ήδη γράψει ότι δίνει πλάτος

$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2}$$

Τώρα λοιπόν το πλάτος $\mathcal{M}$ θα περιέχει και τη συνεισφορά από το διάγραμμα (β)

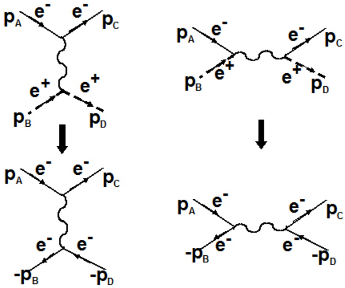
$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\left[\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2} + \frac{(p_A + p_D)^\mu (p_B + p_C)_\mu}{(p_C - p_B)^2}\right]$$

Βλέπουμε ότι η αλλαγή $p_C \longleftrightarrow p_D$ μετατρέπει τον ένα όρο του αθροίσματος στον άλλο. Σημειώστε ότι η αναλλοιώτητα του $\mathcal{M}$ στην αλλαγή $p_c \longleftrightarrow p_D$ είναι αρκετή για την αναλλοιώτητα και ως προς $p_A \longleftrightarrow p_B$

Σκέδαση ''ηλεκτρονίου''-''ποζιτρονίου'' (crossing)

Στο σχήμα βλέπουμε τα δύο πιθανά διαγράμματα στην σκέδαση ''ηλεκτρονίου''-''ποζιτρονίου'' καθώς και τα αντίστοιχα όπου τα ποζιτρόνια έχουν αντικατασταθεί από ηλεκτρόνια με αντίθετη ορμή (πηγαίνουν πίσω στο χρόνο και έχουν αρνητική ενέργεια).

Το αναλλοίωτο πλάτος θα δίνεται από τη σχέση



$$\mathcal{M} = (-e^2)\left[\frac{(p_A + p_C)^\mu(-p_B - p_D)_\mu}{(-p_B - (-p_D))^2} + \frac{(p_A - p_B)^\mu(p_C - p_D)_\mu}{(p_C - (-p_D))^2}\right] \tag{11}$$

Υπενθυμίζεται ότι η διατήρηση ενέγειας-ορμής $p_A + p_B = p_C + p_D \to p_A + (-p_D) = p_C + (-p_B)$. Προσέξτε ότι η κορυφή $+ie(p_B + p_D)$ στην σκέδαση e^-e^- γίνεται $-ie(p_B + p_D)$ για την περίπτωση e^-e^+ (το φορτίο του ποζιτρονίου είναι $+e$). Τέλος, το πλάτος είνα αναλλοίωτο στην αλλαγή $p_C \longleftrightarrow -p_B$ που αντιστοιχεί σε ανταλλαγή δύο εξερχόμενων ηλεκτρονίων. Θα μπορούσαμε να πάρουμε το $\mathcal{M}_{e^-e^+\to e^-e^+}$ από το $\mathcal{M}_{e^-e^-\to e^-e^-}$ απλά μέσω της σχέσης

$$\mathcal{M}_{e^-e^+\to e^-e^+}(p_A, p_B, p_C, p_D) = \mathcal{M}_{e^-e^-\to e^-e^-}(p_A, -p_D, p_C, -p_B) \tag{12}$$

Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ και $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

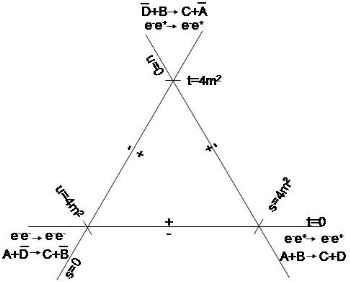
Αναλλοίωτες μεταβλητές

Για την σκέδαση $AB \to CD$ έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ., στο Κ.Μ. έχουμε την ορμή και τη γωνία σκέδασης). Αλλά είναι χρήσιμο να εκφράσουμε το $\mathcal{M}$ ως συνάρτηση ποσοτήτων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις τέσσερις ορμές μπορούμε να φτιάξουμε 3 αναλλοίωτες ποσότητες: $p_A p_C$, $p_A p_D$ και $p_D p_B$, από τις οποίες βέβαια μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε συνήθως τις σταθερές του Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2, \qquad t = (p_A - p_C)^2, \qquad u = (p_A - p_D)^2$$

Άσκηση 13 Δείξτε ότι $s + t + u = \sum m_i^2$

Για να αναπαραστήσουμε τις επιτρεπτές (φυσικές) περιοχές των s, t και u χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα δύο διαστάσεων (βλ. σχήμα). Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει ύψος ισο με $\sum_i m_i^2$. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα της γεωμετρίας ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του τριγώνου.



Για την σκέδαση $e^+e^- \to e^+e^-$, στο Κ.Μ., έχουμε

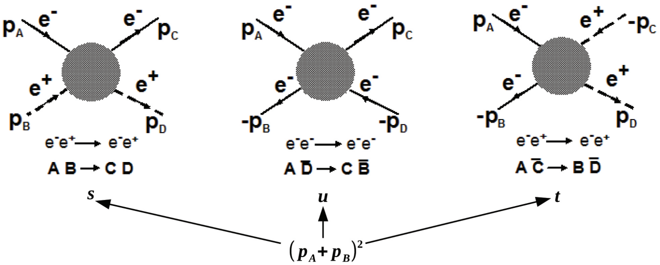
$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E + E, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i)^2 = 4E^2 = 4(m^2 + k^2)$$
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (E - E, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2 = -(2k^2 - 2k^2 \cos\theta)$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = (E - E, \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f)^2 = -(2k^2 + 2k^2 \cos\theta)$$

Τα σωματίδια έχουν στο Κ.Μ. έχουν ίδιο μέτρο ορμής, $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = k$ και επειδή έχουν ίδια μάζα έχουν και ίδια ενέργεια. Άρα, $s \geq 0$ και $t, u \leq 0$. Αλλά επειδή $s + t + u = 4m^2$ συμπεραίνουμε ότι $s \geq 4m^2$.

Βλέπουμε από το Σχήμα ότι για την $e^+e^- \to e^+e^-$, η μεταβλητή $u = (p_A - p_D)^2$ αποτελεί την s μεταβλητή της $e^-e^- \to e^-e^-$

$$s_{e^+e^- \to e^+e^-} = u_{e^-e^- \to e^-e^-}$$

οπότε, για την $e^-e^- \to e^-e^-$, η φυσική περιοχή είναι $t, s \leq 0$ και $u \geq 4m^2$



Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, η φυσική περιοχή των μεταβλητών είναι $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)^2$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam.

Άσκηση 15 Ελέγξτε ότι η Εξ.12 είναι της μορφής

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s,t,u) = \mathcal{M}_{e^-e^-}(u,t,s)$$

Ας υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ως συνάρτηση των σταθερών s, t και u. Από τη Εξ.11 έχουμε

$$\begin{aligned}
&-(p_A + p_C)(p_B + p_D) = -(2p_A - p_A + p_C)(p_B + p_D) = \\
&= -(2p_A + p_B - p_D)(p_B + p_D) = -2p_A(p_B + p_D) + p_B^2 - p_D^2 \\
&= -2p_A(p_B + p_D)
\end{aligned}$$

και
$s-u=(p_A+p_B)^2-(p_A-p_D)^2=2p_Ap_B+2p_Ap_d=2p_A(p_B+p_D)$
Όμοια, $t-u=(p_A-p_C)^2-(p_A-p_D)^2=-2p_Ap_C+2p_Ap_d=$
$2p_A(-p_C+p_D)$, και

$$\begin{aligned}&(p_A-p_B)(p_C-p_D)=(2p_A-p_A-p_B)(p_C-p_D)=\\&=(2p_A-p_C-p_D)(p_C-p_D)=-2p_A(-p_C+p_d)-p_C^2+p_B^2=\\&=-2p_A(-p_C+p_D)\end{aligned}$$

και βέβαια $t=(p_D-p_B)^2$ και $s=(p_A+p_B)^2=(p_C+p_D)^2$.
Οπότε η Εξ.11 παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{M}_{e^+e^-}=e^2\left(\frac{s-u}{t}+\frac{t-u}{s}\right) \tag{13}$$

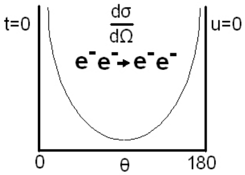
Γιατί το πλάτος παρουσιάζει συμμετρία στην εναλλαγή $s\longleftrightarrow t$;

$$\begin{array}{ll}AB\to CD & A\bar{C}\to \bar{B}D\\ e^+e^-\to e^+e^- & e^+e^-\to e^+e^-\end{array}$$

Δηλαδή, στην περίπτωσή μας, η $AB \to CD$ και η $A\bar{C} \to \bar{B}D$ είναι η ίδια σκέδαση. Οι σκεδάσεις $AB \to CD$ και $A\bar{C} \to \bar{B}D$ έχουν συσχέτιση $s \longleftrightarrow t$. Αντίστοιχα, η σκέδαση $A\bar{D} \to \bar{B}C$ (δηλαδή $e^+e^+ \to e^+e^+$) και η $\bar{C}B \to \bar{A}D$ (δηλαδή $e^-e^- \to e^-e^-$) έχουν σχέση με την αρχική $s \longleftrightarrow u$. Δηλαδή το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^-e^- \to e^-e^-$ γράφεται αμέσως, χρησιμοποιώντας την Εξ(13),

$$\mathcal{M}_{e^-e^-} = e^2 \left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u} \right) \tag{14}$$

Βλέπουμε ότι το αναλλοίωτο πλάτος, άρα και η ενεργός διατομή, απειρίζονται για $t \to 0$ και $u \to 0$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το τεράγωνο της τετρορμής του εικονικού φωτονίου τείνει στο μηδέν και ουσιαστικά δεν έχουμε αλληλεπίδραση.

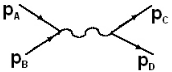


Ο διαδότης

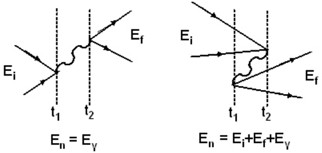
Έχουμε δεί ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δεί ότι

$$T_{fi} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi\delta(E_f - E_i)$$



Πώς θα πάμε από το $1/(E_i - E_n)$ στο $1/(p_A + p_B)^2$. Ας θυμηθούμε ότι το διάγραμμα Feynman είναι το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων



Επομένως, το αναλλοίωτο πλάτος θα είναι

$$\mathcal{M} \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - (2E_i + E_\gamma)} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni}$$

Το $2E_\gamma$ σχετίζεται με τον νορμαλισμό. Η παραπάνω μέθοδος είναι η λεγόμενη ''παλαιά μέθοδος διαταραχών''. Σ' αυτήν η τρι-ορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά όχι η ενέργεια (πράγμα μη συναλλοίωτο). Τα σωματίδια είναι πάντα στο ''κέλυφος μάζας'' (mass shell), δηλαδή το τετράγωνο της τετρ-ορμής είναι ίσο με το τετράγωνο της μάζας.

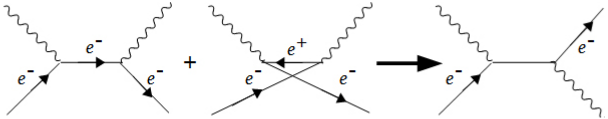
Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$E_i^2 = (p_A + p_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 \quad \text{και} \quad E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + \mathbf{p}_\gamma^2$$

όπου βάλαμε μια μάζα στο φωτόνιο για την περίπτωση που το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα. Ο όρος $(p_A + p_B)^2$ είναι η συνολική μάζα. Επίσης $\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$. Οπότε, ο παρονομαστής της προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$E_i^2 - E_\gamma^2 = (p_A + p_B)^2 - m_\gamma^2 = q^2 - m_\gamma^2$$

που στην περίπτωση του άμαζου φωτόνιου γίνεται απλά q^2. Δηλαδή, αθροίζοντας τα δύο διαγράμματα παίρνουμε συναλλοίωτο αποτέλεσμα. Μπορούμε να δούμε το ίδιο γεγονός και στην σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο.



Αριστερά έχουμε το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων όπου η τριορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή και για το ενδιάμεσο σωματίδιο ισχύει $p^2 = m^2$. Αλλά η ενέργεια δεν διατηρείται σε κάθε κορυφή. Στο δεξιό διάγραμμα η τετρορμή (ορμή και ενέργεια) διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά $p^2 \neq m^2$.

... τα κουάρκ και τα λεπτόνια όμως έχουν spin 1/2 και δεν περιγράφονται από την απλή κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί την Klein-Godon. Πρέπει να βρούμε μια εξίσωση με λύσεις που να μπορούν να περιγράφουν το spin των σωματιδίων και αντισωματιδίων.
Ο Dirac προσπάθησε να γράψει μια εξίσωση γραμμική ως προς το $\partial/\partial t$, επομένως γραμμική και ως προς $\boldsymbol{\nabla}$ (συναλλοιώτητα).
Η πιο γενική μορφή είναι

$$H\psi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \beta m)\,\psi = 0$$

Οι παράμετροι $\mathbf{a}$ και β πρέπει να είναι κατάλληλοι ώστε για το ελεύθερο σωματίδιο να πληρούται η σχέση

$$H^2\psi = \left(P^2 + m^2\right)\psi$$

Βέβαια, η αρχική προσπάθεια του Dirac ήταν να αποφύγει την αρνητική πυκνότητα πιθανότητας. Αλλά αυτό για μας δεν είναι πλέον πρόβλημα. Αντίθετα, έχουμε το κέρδος περιγραφής των αντισωματιδίων. Έχουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
&H^2\psi = (a_i P_i + \beta m)(a_j P_j + \beta m)\psi = \\
&= \left((a_i P_i)(a_j P_j) + \beta^2 m^2 + (a_i P_i)\beta m + \beta(a_j P_j)m\right)\psi = \\
&= \left(a_i^2 p_i^2 + (\underbrace{a_i a_j + a_j a_i}_{i \neq j})P_i P_j + \beta^2 m^2 + (a_i P_i)\beta m + \beta(a_j P_j)m\right)\psi
\end{aligned}
$$

Επομένως, θα πρέπει

$$
\begin{aligned}
&a_i^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i\beta + \beta a_i = 0 \quad \text{για } i = 1, 2, 3 \\
&\beta^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i a_j + a_j a_i = 0 \quad \text{για } i \neq j
\end{aligned}
$$

Τα a_i και β δεν μπορεί να είναι απλοί αριθμοί. Θα πρέπει να πάμε σε πίνακες που δρουν στην κυματοσυνάρτηση ψ που γίνεται πια διάνυσμα με συνιστώσες.

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1.

Η ελάχιστη διάσταση, λοιπόν, είναι 4. Η περίπτωση 2 διαστάσεων πρέπει να απορριφθεί διότι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μόνο 3 ανεξάρτητοι 2×2 πίνακες (του Pauli) ενώ εμείς χρειαζόμαστε 4 πίνακες. Μια άπο τις δυνατές αναπαραστάσεις των a_i και β είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Pauli-Dirac (όπου $\boldsymbol{\sigma}$ οι πίνακες του Pauli)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \text{όπου}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μια άλλη αναπαράσταση είναι αυτή του Weyl

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια, η επιλογή των a_i και β δεν είναι μοναδική. Θυμίζοντας ότι ένας μοναδιακός μετασχηματισμός διατηρεί τις αντιμεταθετικές ιδιότητες, έπεται ότι οι μετασχηματισμοί

$$a_i' = U a_i U^{-1}, \quad \beta' = U \beta U^{-1}$$

όπου U ένας μοναδιακός πίνακας 4×4, δίνει μια νέα αναπαράσταση των a_i και β. Φυσικά, όλα τα μετρήσιμα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από την αναπαράσταση. Το διάνυσμα ψ έχει τέσσερις συνιστώσες και ονομάζεται spinor του Dirac.

Συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Πίνακες γ

Από την $H\psi = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{P} + \beta m)\psi$ παίρνουμε, πολλαπλασιάζοντας επί β,

$$\beta i \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\beta\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta^2 m\right)\psi \to \left(\beta i \frac{\partial}{\partial t} + i\beta\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\psi = \beta^2 m\psi \to$$

$$(\beta, \beta\mathbf{a})\left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\boldsymbol{\nabla}\right)\psi = m\psi \to \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

όπου ορίσαμε $\gamma^\mu = (\beta, \beta\mathbf{a})$ τους πίνακες γ. Αυτή είναι η συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Αντιστοιχεί σε τέσσερις διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_k \left(i\left(\gamma^\mu\right)_{jk}\partial_\mu - m\delta_{jk}\right)\psi_k = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των $\mathbf{a}$ και β πινάκων, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I$$

και επίσης τις σχέσεις

$$\gamma^0 = \beta \to \left(\gamma^0\right)^2 = 1, \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$
$$\gamma^{k\dagger} = (\beta a^k)^\dagger = a^k\beta = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = \beta a^k \beta a^k = -1, \quad k = 1,2,3$$

ή, πιο γενικά $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

Διατηρήσιμο ρεύμα και η συζυγής εξίσωση Dirac

Η ερμητιανή συζυγής της εξίσωση Dirac
$(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^k\partial_k - m)\psi = 0$ είναι

$$-i(\partial_t\psi^\dagger)\gamma^{0\dagger} - i(\partial_k\psi^\dagger)\gamma^{k\dagger} - m\psi^\dagger = 0$$
$$-i(\partial_t\psi^\dagger)\gamma^0 + i(\partial_k\psi^\dagger)\gamma^k - m\psi^\dagger = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με γ^0 και χρησιμοποιώντας ότι $\gamma_0\gamma_k = -\gamma_k\gamma_0$

$$-i\partial_t(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^0 - i\partial_k(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^k - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0$$
$$i\partial_t\bar{\psi}\gamma^0 + i\partial_k\bar{\psi}\gamma^k + m\bar{\psi} = 0 \to i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

όπου ορίσαμε $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ που είναι ένας spinor γραμμή.
Τώρα χρησιμοποιώντας την $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$ επί $(\bar{\psi}\cdot)$
και την $i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$ επί $(\cdot\psi)$
και αθροίζοντας παίρνουμε

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \to \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

Επομένως, ορίζουμε το ρεύμα πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ και βέβαια τώρα

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{4}|\psi_i|^2 \geq 0$$

δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας στον Dirac είναι θετική (στην εξίσωση Klein-Gordon ήταν ανάλογη της ενέργειας).

Χρησιμοποιώντας την Pauli-Weiskopf περιγραφή, το j^μ γίνεται πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Το γ^μ είναι τετραδιάνυσμα με την έννοια ότι το j^μ είναι τετραδιάνυσμα.

Spinor ελεύθερου σωματιδίου

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon.

Ψάχνουμε για λύσεις ελεύθερων σωματιδίων (ιδιοσυναρτήσεις της ορμής) της μορφής

$$\psi = u(p)e^{-ip^\mu x_\mu}$$

με $u(p)$ ένας spinor με 4 συνιστώσες. Χρησιμοποιώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση Dirac (το $u(p)$ δεν εξαρτάται από το x^μ)

$$i\gamma^\nu\partial_\nu\psi - m\psi = 0 \rightarrow i\gamma^\nu u(p)(-ip_\nu)e^{-ip^\mu x_\mu} - mu(p)e^{-ip^\mu x_\mu} = 0$$

$$(\gamma^\nu p_\nu - m)u(p) = 0 \rightarrow (\not{p} - m)u(p) = 0$$

χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\gamma^\mu u_\mu = \not{u}$, με u_μ τετραδιάνυσμα. Μιας και ψάχνουμε για ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας πάμε στην αρχική εξίσωση

$$Hu = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu$$

Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις για $\mathbf{p} = 0$. Οπότε

$$Hu = m\beta u = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u$$

με ιδιοτιμές $E = m, m, -m, -m$ και ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις, με $E > 0$, περιγράφουν ηλεκτρόνιο ενώ οι δύο άλλες, με $E < 0$ το ποζιτρόνιο. Για $\mathbf{p} \neq 0$ έχουμε

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

όπου χωρίσαμε το u σε 2 spinor με 2 συνιστώσες το καθένα. Οπότε

$$\left.\begin{array}{r} mu_A + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = Eu_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A - mu_B = Eu_B \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = (E-m)u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A = (E+m)u_B \end{array}$$

Για $E > 0$ επιλέγουμε τη μορφή του u_A, για παράδειγμα

$$u_A = \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ή γραμμικό συνδυασμό τους) και το u_B το παίρνουμε από την δεύτερη εξίσωση

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)}, \quad s = 1, 2$$

Επομένως, για $E > 0$, έχουμε (με N σταθερά νορμαλισμού)

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

Αντίστοιχα, για $E < 0$, επιλέγουμε $u_B = \chi^{(s)}$ και τότε παίρνοντας το u_A από την πρώτη εξίσωση

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

Άσκηση 18 Δείξτε ότι οι 4 λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι ορθογώνιες
$$u^{(r)\dagger}u^{(s)} = 0, \quad r \neq s$$

Ας αποδείξουμε μια πολύ χρήσιμη σχέση: $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = p^2 I$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \sum_{i,j}(\sigma_i p_i)(\sigma_j p_j) = \sum_i \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i,j(i\neq j)}(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)p_i p_j = p^2$$

μιας και το τετράγωνο $\sigma_i^2 = 1$ για κάθε πίνακα και επίσης $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$ για $i \neq j$.
Η σχέση μπορεί να αποδειχθεί επίσης με άμεση αντικτάσταση της μορφής των πινάκων του Pauli.

Οι γενικές λύσεις της εξίσωσης Dirac (Gauge Theories in Particle Physics, Aitchison and Hey)

Από την αρχική μορφή της Dirac

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi$$

και γράφοντας $\psi = \omega\, e^{-ip^\mu x_\mu}$ όπου $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (-i\mathbf{a}\cdot(i)\mathbf{p} + \beta m)\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{p} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E\phi &= m\phi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi \\ E\chi &= -m\chi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi$.

Επομένως, $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}$ χωρίς νορμαλισμό. Χρησιμοποιώντας την μορφή του χ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi$$

$$E = m + \frac{p^2}{E+m} \to (E-m)(E+m) = p^2$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \to E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$$

Ποια είναι η φυσική σημασία του ω με τις δύο συνιστώσες; Στη σχέση που δίνει το ω, το ϕ είναι αυθαίρετο. Μπορεί να πάρει τις τιμές $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ με ιδιοτιμές $\pm\frac{1}{2}$. Βέβαια, η πιο γενική μορφή του ϕ είναι $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ με a, b μιγαδικοί αριθμοί.

Έχουμε λοιπόν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, όπως ακριβώς ένα σύστημα με στροφορμή $j = 1/2$ ($2j + 1$ καταστάσεις).
Στο σύστημα ηρεμίας ($\mathbf{p}$=0), η ερμηνεία είναι άμεση. Το $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} = 0$, άρα και $\chi = 0$, και οι δύο λύσεις γίνονται

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

Και οι δύο λύσεις έχουν ίδια ενέργεια. Άρα υπάρχει κάποιος τελεστής που μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας (την χαμιλτονιανή) και ξεχωρίζει τις δύο καταστάσεις. Αυτός είναι ο

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

που βέβαια μετατίθεται με την χαμιλτονιανή που στην περίπτωσή μας ($\mathbf{p} = 0$) είναι απλά βm (είναι και οι δύο διαγώνιοι). Οι δύο καταστάσεις έχουν ιδιοτιμές ± 1.

Γενικεύοντας $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ με την ιδιότητα $\left[\frac{1}{2}\Sigma_x, \frac{1}{2}\Sigma_y\right] = i\frac{1}{2}\Sigma_z$ και $\left(\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}\right)^2 = \frac{3}{4}I$. Αυτές ακριβώς είναι οι ιδιότητες ενός κβαντομηχανικού τελεστή στροφορμής με $j = 1/2$. Επομένως, ο $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο spin 1/2 κατάλληλος τελεστής για το σύστημα ηρεμίας. Ακριβώς, για το σύστημα ηρεμίας η εξίσωση Dirac περιγράφει ένα σωματίδιο με spin 1/2. Περιμένουμε να μην αλλάζει το spin αν πάμε σε σύστημα με $\mathbf{p} \neq 0$. Αλλά τότε, ο τελεστής $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ δεν είναι πια κατάλληλος γιατί δεν μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας, που τώρα είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Βέβαια συνεχίζουμε να έχουμε 2 ανεξάρτητες καταστάσεις. Οπότε θα πρέπει να υπάρχει τελεστής που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή. Η επιλογή δεν είναι μοναδική αλλά μια χρήσιμη είναι ο τελεστής της ελικότητας

$$\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$$

που πράγματι μετατίθεται με την $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $[H, \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ είναι ± 1 (δύο φορές). Ο $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ έχει ιδιοτιμές ± 1 και αν $U^T A U = A_{diag}$ τότε και

$$\begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{diag} & 0 \\ 0 & A_{diag} \end{pmatrix}$$

Επομένως, ψάχνουμε να βρούμε την μορφή του ϕ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix}$$

ή $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = \pm \phi$. Ας ονομάσουμε $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_+ = \phi_+$ και $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_- = -\phi_-$. Ας βρούμε τα ϕ_+ και ϕ_-. Παρατηρούμε ότι το $(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή $+1$ για αυθαίρετο ϕ

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}} (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}} + 1)\phi$$

Όμοια, το $(1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή -1. Επομένως, για τυχαίο $\hat{\mathbf{p}}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ και επιλέγοντας το αυθαίρετο $\phi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ έχουμε

$$\phi_+=(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1+\cos\theta & \sin\theta\cos\varphi-i\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to$$

$$\phi_+=\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\ \sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}$$

Βέβαια χρειάζεται να νορμαλίσουμε το ϕ_+. Εύκολα υπολογίζεται ότι η σταθερά νομαλισμού είναι

$$N^2\left[(1+\cos\theta)^2+|\sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi|^2\right]=1\Rightarrow N=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

Επομένως, το νορμαλισμένο ϕ_+ γράφεται

$$\phi_+ = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{pmatrix} \to$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{pmatrix}$$

Για το ϕ_- βολεύει να επιλέξουμε για αυθαίρετο $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και έχουμε εντελώς ανάλογα

$$\phi_- = (1 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_- = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ο νορμαλισμός είναι ο ίδιος και καταλήγουμε

$$\phi_- = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(-\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\phi_+^\dagger \phi_- = 0$. Τα ϕ_+ και ϕ_- είναι νορμαλισμένα και ορθογώνια. Επίσης για $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ή $\hat{\mathbf{p}} = (0, 0, 1)$, οπότε έχουμε $\theta = 0$ τα ϕ_+ και ϕ_- γίνονται

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμός του spinor σε χωρικές στροφές

Ας θεωρήσουμε μια απλή στροφή γύρω από τον άξονα x, με γωνία θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι ξεκινάμε με ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η ορμή είναι $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Τότε τα $\phi_\pm$ είναι τα $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Η ορμή μετασχηματίζεται ως διάνυσμα στην στροφή

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

δηλαδή, $p'_x = p_x = 0$, $p'_y = p\sin\theta$ και $p'_z = p\cos\theta$. Στο νέο σύστημα, τα $\phi_\pm$ θα πρέπει να υπακούουν αντίστοιχες σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \phi'_+, \qquad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_- = -\phi'_-$$

δηλαδή, για το ϕ'_+ θα έχουμε $(\hat{\mathbf{p}}' = (0, \sin\theta, \cos\theta))$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \phi'_+ = \phi'_+$$

Γράφοντας το $\phi'_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ έχουμε ότι

$$a\cos\theta - ib\sin\theta = a \rightarrow b = ia\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$$

Άρα, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ i\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} \end{pmatrix}$. Νορμαλίζοντας παίρνουμε $\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix}$. Αυτό μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\phi_+$$

όπου το $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ακριβώς ανάλογα έχουμε για το ϕ_-

$$\phi'_- = \begin{pmatrix} i\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\phi_-$$

όπου το $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Παρατηρήστε ότι τα ϕ'_+ και ϕ'_- παραμένουν ορθογώνια. Δηλαδή έχουμε και εδώ μια ''στροφή'', μόνο που γωνία είναι $\theta/2$. Για να το γενικεύσουμε, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_x\theta/2} &= 1 + i\sigma_x\theta/2 + \frac{1}{2!}(i\sigma_x\theta/2)^2 + \frac{1}{3!}(i\sigma_x\theta/2)^3 + \cdots \\ &= 1 + i\sigma_x\theta/2 - \frac{1}{2}(\theta/2)^2 - \frac{1}{3!}i\sigma_x(\theta/2)^3 + \cdots \\ &= \cos\theta/2 + i\sigma_x\sin\theta/2 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε, αν η στροφή θ είναι γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$

$$\phi' = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\theta/2}\phi$$

Ο πίνακας $e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\theta/2}\phi \equiv U$ είναι μοναδιακός $(U^\dagger U = UU^\dagger = 1)$, οπότε το ''μήκος'' $\phi^\dagger\phi$ διατηρείται. Αυτός ο κανόνας, παρ᾽ όλο που ξεκινήσαμε με ειδικά ϕ που είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, είναι γενικός για κάθε spinor.

Ο spinor του Dirac, με 4 συνιστώσες, γράφεται τώρα, για τις συγκεκριμένες ιδιοκαταστάσεις ϕ_+ και ϕ_-

$$\omega_+ = \left(\begin{array}{c} \phi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi_+ \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\phi_+ \end{array} \right), \qquad \omega_- = \left(\begin{array}{c} \phi_- \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\phi_- \end{array} \right)$$

Δηλαδή το πάνω και το κάτω τμήμα μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο (το $\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$ είναι βαθμωτό). Άρα γενικεύουμε τον μετασχηματισμό για τον spinor του Dirac

$$\omega' = e^{i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{cc} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{array} \right)$ και ισχύει για κάθε τετρα-spinor. Έτσι η πιθανότητα

$$\rho' = \psi^{\dagger\prime}\psi' = \omega^{\dagger\prime}\omega' = \omega^\dagger e^{-i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2} e^{i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega = \omega^\dagger\omega$$

Οι αρνητικές λύσεις της εξίσωσης Dirac

Είχαμε ξεκινήσει από την εξίσωση του Dirac με τη μορφή

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}E\phi=m\phi+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi\\ E\chi=-m\chi+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi\end{cases}$$

Για $E>0$ γνωρίζουμε ήδη τον spinor $\omega=\begin{pmatrix}\phi^s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$, $s=1,2$.
Για να νορμαλίσουμε $\omega^\dagger\omega=2E$. Οπότε (τα ϕ^s είναι νορμαλισμένα)

$$N^2\left(1+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)^2}\right)=2E\rightarrow N^2\frac{(E+m)^2+p^2}{(E+m)^2}=2E$$

$$N=\sqrt{E+m}$$

και τότε $u(p,s)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\phi^s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$, $s=1,2$ και
$\psi=e^{-ip\cdot x}u(p,s)$.

Για τις αρνητικές λύσεις, στο σύστημα ηρεμίας $\mathbf{p} = 0$, θά έχουμε $E = -m$ οπότε

$$-m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

οπότε $\phi = 0$ και έχομε δύο ανεξάρτητες λύσεις
$\omega(E < 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^s \end{pmatrix}$.
Για $\mathbf{p} \neq 0$ θα έχουμε $E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi \to \phi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}\chi$, οπότε

$$\omega(E < 0) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1, 2$$

Θυμίζουμε τα αντισωματίδια που πηγαίνουν αντίθετα στο χρόνο $(\mathbf{p} \to -\mathbf{p})$, οπότε ορίζουμε

$$\omega(E < 0, -\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο νορμαλισμό $N = \sqrt{E+m}$ έχουμε

$$v(p,s) = \sqrt{|E|+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1,2$$

και $\psi = v(p,s)e^{-i(-p)\cdot x} = v(p,s)e^{ip\cdot x}$ με $p = (E, \mathbf{p})$. Η επιλογή είναι $\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ γιατί η απουσία ενός άνω spin ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια ισοδυναμεί με παρουσία ποζιτρονίου με κάτω spin με θετική ενέργεια.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή 1/2. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλτονιανή δεν μετατίθεται με τη στροφορμή $\mathbf{L}$ αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση η ‘‘κάτω’’ συνιστώσα του 4-spinor είναι κατά (v/c) μικρότερη από την ‘‘άνω’’ συνιστώσα: $m + E \sim 2m \to (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})/(2m) \sim v$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi_A$$

Από τον όρο $\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$ βλέπουμε ότι υπάρχει μια εσωτερική στροφορμή του ηλεκτρονίου.
Ας θυμηθούμε ότι μαγνητική ροπή $\mathbf{m}$, σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ έχει ενέργεια $-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}$. Φορτίο q, μάζας M έχει μια μαγνητική ροπή $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\frac{q}{M}\mathbf{L}$ όπου $\mathbf{L}$ η στροφορμή. Άρα, ο όρος

$$-\left(\frac{-e}{2M}\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\mathbf{B} = \left(\frac{e}{2M}2\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{B} = 2\left(\frac{e}{2M}\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{B}$$

(όπου $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$) αντιστοιχεί σε μια ιδιοστροφορμή του ηλεκτρονίου. Η αντίστοιχη μαγνητική ροπή είναι $\mathbf{m} = \frac{e}{2M}2\mathbf{S} = 2\frac{e}{2M}\mathbf{S}$. Δηλαδή ο συντελεστής μποστά από το $\mathbf{S}$ είναι διπλάσιος από αυτόν της στροφορμής $\mathbf{L}$ $(-\frac{1}{2}\frac{q}{m}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B})$.

Η δικαιολόγηση του συντελεστή 2 θεωρείται από τους ''θριάμβους'' της εξίσωσης του Dirac.

Αντισωματίδια

Όπως έχουμε ήδη πει οι δύο λύσεις $e^{-ipx}u^{(1,2)}(\mathbf{p})$ αντιστοιχούν στο ελεύθερο ηλεκτρόνιο με $E, \mathbf{p}$. Το αντι-ηλεκτρόνιο θα περιγραφεί από τις άλλες δύο λύσεις. Μένουμε πάντοτε στην περιγραφή: αντιηλεκτρόνιο με E και $\mathbf{p}$ περιγράφεται από ''ηλεκτρονική λύση'' με $-E$ και $-\mathbf{p}$

$$e^{-i(-p)x}u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) \equiv e^{ipx}v^{(2,1)}(\mathbf{p})$$

με $p^0 \equiv E > 0$. Το v είναι ο spinor του ποζιτρονίου. Ας δούμε ποια εξίσωση πληροί το v

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \to (-\not{p} - m)u(-\mathbf{p}) = 0 \to (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0$$

Στα διαγράμματα Feynman συνεχίζουμε την ίδια τακτική: εισερχόμενο (εξερχόμενο) ποζιτρόνιο αντικαθίσταται από εξερχόμενο (εισερχόμενο) ηλεκτρόνιο. Προσοχή θέλει η ελικότητα. Όταν $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ και $\boldsymbol{\sigma} \to -\boldsymbol{\sigma}$, η ελικότητα $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ δεν αλλάζει.

Ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο πληροί την εξίσωση $[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\,\psi = 0$. Πώς θα γράψουμε την αντίστοιχη εξίσωση για το ποζιτρόνιο. Θα πρέπει να καταλήξουμε σε μια παρόμοια με αλλαγή του προσήμου του φορτίου. Από την συζηγή της παραπάνω εξίσωσης έχουμε (πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με C' και εισάγοντας τον όρο $C'^{-1}C'$ μετά το γ)

$$\begin{aligned}
&[\gamma^{\mu *}(-i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\,\psi^* = 0 \rightarrow \\
&[-\gamma^{\mu *}(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi^* = 0 \rightarrow \\
&\left[C'(-\gamma^{\mu *})C'^{-1}(i\partial_\mu - eA_\mu) - m\right]\,C'\psi^* = 0
\end{aligned}$$

Θα πρέπει λοιπόν να βρεθεί ένας πίνακας C' τέτοιος ώστε $-C'\gamma^{\mu *}C'^{-1} = \gamma^\mu$. Συνηθίζουμε να γράφουμε $C' = C\gamma^0$. Άρα θα πρέπει $-C\gamma^0\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu C\gamma^0$. Αν λοιπόν ορίσουμε $\psi_C \equiv C'\psi^* = C\gamma^0\psi^* = C(\bar{\psi})^T$, το ψ_C υπακούει την εξίσωση

$$[(i\gamma^\mu\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi_C = 0$$

Άσκηση 22 Δείξτε ότι με την συγκεκριμένη μορφή των πινάκων γ, η μορφή $C\gamma^0 = i\gamma^2$ πληροί την συνθήκη $-C\gamma^0\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu C\gamma^0$.

Άσκηση 23 Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις $C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T$, $C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$, $\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1}$.

Ας δούμε τη ''δράση'' του $i\gamma^2$ πάνω σε ένα συγκεκριμένο spinor:

$$\psi_C^{(1)} = i\gamma^2 \left[e^{-ipx} u^{(1)}(\mathbf{p})\right]^* = e^{ipx} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{ipx} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Αλλά

$$\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^* = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2\sigma_{1,3}^* = \sigma_2\sigma_{1,3} = -\sigma_{1,3}\sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_2^* = -\sigma_2\sigma_2 \end{array} \right\} = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_2$$

Άρα

$$\psi_C^{(1)} = e^{ipx} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{ipx} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= -e^{ipx} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = e^{ipx} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})}{|-E|+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-i(-p)x} u^{(4)}(-\mathbf{p}) = e^{ipx} v^{(1)}(\mathbf{p})$$

Ξαναγράφουμε, συμπερασματικά,

$$\psi_C^{(1)} = i\gamma^2 \left[e^{-ipx} u^{(1)}(\mathbf{p}) \right]^* = e^{ipx} u^{(4)}(-\mathbf{p}) = e^{ipx} v^{(1)}(\mathbf{p})$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα είναι $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ για το ηλεκτρόνιο. Οπότε, το ρεύμα για το ψ_C θα είναι $j^\mu_C = -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C$. Αυτό γράφεται ($\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1}$)

$$
\begin{aligned}
j^\mu_C &= -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C = +e\psi^T C^{-1}\gamma^\mu\psi_C = \\
&= +e\psi^T(C^{-1}\gamma^\mu)C\gamma^0\psi^* = -e\psi^T\gamma^{\mu T}C^{-1}C\gamma^0\psi^* = \\
&= -e\psi^T\gamma^{\mu T}\gamma^0\psi^* = -e\psi^T\gamma^{\mu T}\gamma^{0T}\psi^* = \\
&= +e\left(\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi\right)^T = +e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi
\end{aligned}
$$

Η αλλαγή προσήμου στην προτελευταία ισότητα είναι σημαντική. Επιβάλλεται από την σχέση στατιστικής-spin. Στην κβαντική θεωρία πεδίου παρουσιάζεται λόγω της αντιμεταθετικότητας των φερμιονικών τελεστών ψ. Στην θεωρία πεδίου ο τελεστής της συζυγίας φορτίου μετατρέπει ένα ηλεκτρόνιο θετικής ενέργειας σε ένα ποζιτρόνιο θετικής ενέργειας. Το αποτέλεσμα είναι ότι θα πρέπει να εισάγουμε με το χέρι ένα αρνητικό πρόσημο σε κάθε διάγραμμα Feynman που περιέχει ένα αρνητικής ενέργειας ηλεκτρόνιο στην τελική κατάσταση.

Ο τελεστής $C\gamma^0$ κατασκευάζει κυματοσυναρτήσεις ποζιτρονίου. Αν ο αντίστοιχος τελεστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μετατρέπει $A^\mu \to -A^\mu$ τότε η εξίσωση Dirac παραμένει αναλλοίωτη

$$\underset{\substack{\text{ηλεκτρόνιο θετικής}\\ \text{ενέργειας}\\ \text{spin άνω}}}{\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + eA_\mu\right) - m\right]\psi = 0} \quad \to \quad \underset{\substack{\text{ποζιτρόνιο θετικής}\\ \text{ενέργειας}\\ \text{spin άνω}}}{\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right]\psi_C = 0}$$

Τώρα βλέπουμε την αναλλοίωτητα φορτίου για τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις

$$j^C_\mu (A^\mu)^C = (-j_\mu)(-A^\mu) = j_\mu A^\mu$$

Νορμαλισμός των spinors και σχέσεις πληρότητας

Θα νορμαλίσουμε όπως και με τα μποζόνια: $2E$ σωματίδια ανά μονάδα όγκου. Από το ρεύμα πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ παίρνουμε την πυκνότητα πιθανότητας $\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$.

Οπότε

$$\int_{\mu\text{ονάδα όγκου}} \rho\, dV = \int \psi^\dagger \psi\, dv = u^\dagger u = 2E$$

για τις λύσεις με θετικές ενέργειες. Το u δίνεται από τη σχέση

$$u = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

όπου $\chi^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Βέβαια, αυτό αντιστοιχεί με ορμή στον άξονα των z, αλλά γνωρίζουμε ότι με μια κατάλληλη στροφή μπορούμε να πάμε σε οποιαδήποτε διεύθυνση ενεργώντας πάνω στο u με τον τελεστή $exp(i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\theta/2)$. Τα δύο χ είναι νορμαλισμένα (στην μονάδα) και ορθογώνια. Επομένως, για $s = 1$ ή 2,

$$u^\dagger u = N^2 \begin{pmatrix} \chi^{(s)\dagger} & \chi^{(s)\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= N^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(E+m)^2}\right) = N^2 \frac{2E}{E+m}$$

Επομένως, $N = \sqrt{E+m}$. Εύκολα φαίνεται ότι το ίδιο θα ισχύει και για τους spinors v με αρνητική ενέργεια.
Το u υπακούει την εξίσωση Dirac:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi = 0 \rightarrow (\gamma^{\mu}p_{\mu} - m)u = 0 \rightarrow (\not{p} - m)u = 0$$

Ποια είναι η αντίστοιχη εξίσωση για το $\bar{u}$; Παίρνουμε τη συζηγή της προηγούμενης σχέσης και πολλαπλασιάζουμε με γ^0 από δεξιά

$$u^{\dagger}\left(p_{\mu}\gamma^{\mu\dagger} - m\right) = 0 \rightarrow u^{\dagger}\left(p_{\mu}\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0} - m\gamma^{0}\right) = 0 \rightarrow$$
$$u^{\dagger}\left(p_{\mu}\gamma^{0}\gamma^{\mu} - m\gamma^{0}\right) = 0 \rightarrow \bar{u}\,(\not{p} - m) = 0$$

μιας και γνωρίζουμε ότι $\gamma^0\gamma_{\mu}^{\dagger}\gamma^0 = \gamma_{\mu}$. Όμοια, από την εξίσωση που πληροί το v: $(\not{p}+m)v = 0$ παίρνουμε $\bar{v}(\not{p}+m) = 0$.
Τώρα, μπορούμε να δείξουμε τις σχέσεις

$$\bar{u}^{(s)}u^{(s)} = 2m \quad \text{και} \quad \bar{v}^{(s)}v^{(s)} = -2m, \quad s = 1,2$$

Ας δείξουμε την πρώτη σχέση. Πολλαπλασιάζουμε την $(\not{p}-m)u = 0$ με $\bar{u}\gamma^0$ από αριστερά και την $\bar{u}\,(\not{p}-m) = 0$ με $\gamma^0 u$ από δεξιά, και αθροίζουμε

$$\left.\begin{array}{r}\bar{u}\gamma^0(\not{p}-m)u=0\\ \bar{u}\left(\not{p}-m\right)\gamma^0 u=0\end{array}\right\}\bar{u}\left(\gamma^0\not{p}+\not{p}\gamma^0\right)u-2m\bar{u}\gamma^0 u=0$$

$$2p^0\bar{u}u-2mu^\dagger u=0\to\bar{u}u=\frac{m}{E}u^\dagger u=2m$$

μιας και $u^\dagger u=2E$. Όμοια δείχνεται και η δεύτερη σχέση για τα v.

Άσκηση 24 Δείξτε τις σχέσεις πληρότητας

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)=\not{p}+m,\quad\sum_{s=1,2}v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p)=\not{p}-m$$

Άσκηση 25 Δείξτε ότι $\not{p}\not{p}=p^2$

Άσκηση 26 Δείξτε ότι οι τελεστές

$$\Lambda_+=\frac{\not{p}+m}{2m},\quad\Lambda_-=\frac{-\not{p}+m}{2m}$$

προβάλλουν τις καταστάσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Ελέγξτε ότι, ως προβολικοί τελεστές, υπακούουν στους κανόνες: $\Lambda_\pm^2=\Lambda_\pm$ και $\Lambda_++\Lambda_-=1$.

Διγραμμικές αναλλοίωτες ποσότητες

Είναι χρήσιμο να βρούμε όρους της μορφής $\bar{\psi}\Gamma\psi$, όπου Γ γινόμενο γ πινάκων, με καθορισμένους κανόνες μετασχηματισμού κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να φτιάξουμε αναλλοίωτες ποσότητες. Ορίζουμε $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

χρησιμοποιώντας την αντιμετάθεση των γ πινάκων. Επίσης ισχύει ότι $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$. Στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, ο γ^5 γράφεται

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Όλες οι δυνατές (ανεξάρτητες) διγραμμικές ποσότητες είναι οι ακόλουθες (όπου $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$)

		Αρ. συνιστ.	Χωρ. αναστρ.
$\bar{\psi}\psi$	Βαθμωτό	1	$+$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Διάνυσμα	4	Χωρικές $-$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Τανυστής	6	
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	‘Αξονικό’ διάνυσμα	4	Χωρικές $+$
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Ψευδοβαθμωτό	1	$-$

Θα πρέπει να δούμε πώς μετασχηματίζεται το ψ κάτω από μετασχηματισμούς (π.χ. Lorentz, χωρική αντιστροφή) ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac. Δηλαδή, η $\psi'(x')$ να υπακούει την εξίσωση

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

με $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε το S τέτοιο ώστε $\psi'(x') = S\psi(x)$. Υπενθυμίζοντας ότι $\psi = e^{-ipx}u(p)$, περιμένουμε το S να είναι ανεξάρτητο από το x. Γνωρίζοντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

έχουμε

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right) S^{-1}\psi'(x') = \left(Si\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

Άρα, η απαίτηση είναι

$$S\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} = \gamma^\nu \to \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu = S^{-1}\gamma^\nu S$$

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$$

Για χωρική αντιστροφή, όπου ο πίνακας $\Lambda^\nu{}_\mu = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, η βασική απαίτηση που θα πρέπει να πληροί ο S είναι $S_P^{-1}\gamma^0 S_P = \gamma^0$ και $S_P^{-1}\gamma^k S_P = -\gamma^k,\ k = 1,2,3.$ Αυτές οι σχέσεις πληρούνται με $S_P = \gamma^0$.

Οπότε, στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, όπου $\gamma^0 = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$, οι τέσσερεις συνιστώσες του ψ μετασχηματίζονται, για χωρική αντιστροφή, ως

$$\psi'_{1,2} = \psi_{1,2}, \quad \psi'_{3,4} = -\psi_{3,4}$$

Δηλαδή, στο σύστημα ηρεμίας, οι θετικής και οι αρνητικής ενέργειας καταστάσεις (δηλαδή το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο) έχουν αντίθετη εσωτερική ομοτιμία.
Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε τους μετασχηματισμούς των διγραμμικών ποσοτήτων. Ας δούμε πρώτα πώς μετασχηματίζεται το $\bar{\psi}$ σε μετασχηματισμό Lorentz $\psi'(x') = S_L \psi(x)$

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger}\gamma^0 = (S_L\psi)^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger} S_L^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}\gamma^0 S_L^{-1} = \bar{\psi} S_L^{-1}$$

Οπότε, σε μετασχηματισμό Lorentz,

$$\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' = \bar{\psi} S_L^{-1}\gamma^{\mu} S_L \psi = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi)$$

δηλαδή μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα.

Για χωρική αντιστροφή

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) =$$
$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P.

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\psi = E\psi$$

Τώρα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix} \to \begin{cases} -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi = E\chi \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi = E\phi \end{cases}$$

Για κάθε εξίσωση ισχύει $E^2 = p^2 \to E = \pm p$.
Ας δούμε την πρώτη εξίσωση $-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi = E\chi$. Για $E > 0$ έχουμε

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi(\mathbf{p}) = E\chi \to -\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\mathbf{p}}{E}\chi(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}) \to \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}) = -\chi(\mathbf{p})$$

Άρα, το χ έχει αρνητική ελικότητα. Η ίδια πρώτη εξίσωση, για $E < 0$ (ως συνήθως μιλάμε για $-E$ και $-\mathbf{p}$), γράφεται

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})\chi(-\mathbf{p}) = -E\chi \to \boldsymbol{\sigma}\cdot(-\hat{\mathbf{p}})\chi(-\mathbf{p}) = \chi(-\mathbf{p})$$

Επομένως το $\chi(-\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα.
Ακριβώς τα αντίθετα συμβαίνουν για την δεύτερη εξίσωση. Το ϕ για $E > 0$ έχει θετική ελικότητα, ενώ για $E < 0$ έχει αρνητική ελικότητα.

Στην αναπαράσταση Weyl, ο $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-I, I)$. Εύκολα φαίνεται ότι

$$P_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι τελεστές P_L και P_R είναι προβολικοί: $P_L + P_R = 1$, $P_L P_R = 0$ και $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.
Αν ψ είναι ένας γενικός spinor, τότε το $P_L\psi$ ονομάζεται αριστερή συνιστώσα και το $P_R\psi$ δεξιά συνιστώσα του ψ.
Πάντοτε μπορούμε να γράψουμε $\psi = (P_L + P_R)\psi = P_L\psi + P_R\psi$.
Βλέπουμε ότι

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Οπότε ένας spinor με μηδενικές τις δύο κάτω συνιστώσες είναι ιδιοκατάσταση του P_L, δηλαδή είναι αριστερόστροφο

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΔΗΛΑΔΗ: το $\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$ με $E > 0$, έχει αρνητική ελικότητα και είναι αριστερόστροφο. Το ίδιο με $E < 0$ είχαμε δει ότι έχει θετική ελικότητα και

$$P_L \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

αλλά λόγω του $-\mathbf{p}$ είναι δεξιόστροφο. Τα αντίθετα ισχύουν για το spinor με μηδενικές τις δύο πάνω συνιστώσες.

Συνοψίζουμε (για $m = 0$)

$\begin{pmatrix} \chi(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο αντινετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο αντινετρίνο)

Το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e$. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$\frac{1}{2}\,\bar{\psi}_e \left[\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5\right] \psi_{\nu_e} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_{\nu_e}$$

Αλλά, για άμαζο νετρίνο, η ποσότητα $\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\nu_e}$ αντιστοιχεί στο αριστερόστροφο νετρίνο (ή δεξιόστροφο αντινετρίνο). Στη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν εμφανίζεται δεξιόστροφο νετρίνο (ή αριστερόστροφο αντινετρίνο).

Για $m \neq 0$, το $u_L = P_L u$ δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Χρησιμοποιώντας την Dirac-Pauli αναπαράσταση θα έχουμε

$$P_L u(p) = \frac{1-\gamma^5}{2} u(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της ελικότητας έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι το u_L δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Αν όμως $m = 0$, και τότε $p = E$, θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι για $m = 0$ η δράση του γ^5 και του τελεστή της ελικότητας ταυτίζονται

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Majorana spinors

Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο, που περιγράφεται από την ψ_M, συμπίπτει με το αντισωματίδιό του. Δηλαδή, $\psi_M^C = \psi_M$. Βέβαια, ένα τέτοιο σωματίδιο θα πρέπει να είναι ηλεκτρικά αφόρτιστο. Ας δούμε ποιες σχέσεις πληρούν οι συνιστώσες του. Γνωρίζουμε ότι

$$\psi_M^C = C\gamma^0 \psi_M^* = i\gamma^2 \psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \psi_M^*$$

Γράφοντας το ψ_M με δυο συνιστώσες ϕ και χ έχουμε

$$\psi_M^C = \psi_M \to \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

ή με άλλα λόγια

$$i\sigma_2\,\chi^* = \phi$$

Η άλλη σχέση, $-i\sigma_2\,\phi^* = \chi$ είναι ισοδύναμη μιας και $\sigma_2^* = -\sigma_2$ καθώς και $(\sigma_2)^2 = 1$. Οπότε, το ψ_M γράφεται

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \phi \\ -i\sigma_2\,\phi^* \end{pmatrix}, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \psi_M = \begin{pmatrix} i\sigma_2\,\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι αν το ϕ έχει αρνητική ελικότητα, δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi = -\phi$, τότε το $-i\sigma_2\,\phi^*$ έχει θετική ελικότητα.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}(-i\sigma_2\,\phi^*) &= -i(\sigma_1\sigma_2\hat{p}_1 + \sigma_2\sigma_2\hat{p}_2 + \sigma_3\sigma_2\hat{p}_3)\phi^* = \\
&= -i(-\sigma_2\sigma_1\hat{p}_1 + \sigma_2\sigma_2\hat{p}_2 - \sigma_2\sigma_3\hat{p}_3)\phi^* = \\
&= -i(-\sigma_2\sigma_1^*\hat{p}_1 - \sigma_2\sigma_2^*\hat{p}_2 - \sigma_2\sigma_3^*\hat{p}_3)\phi^* = \\
&= -i\sigma_2(-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi)^* = -i\sigma_2\,\phi^*
\end{aligned}$$

Επομένως ο ψ_M (Majorana spinor), μπορεί να περιγράφει με την πάνω συνιστώσα ϕ ένα αριστερόστροφο νετρίνο και με την κάτω συνιστώσα $-i\sigma_2\,\phi^*$ ένα δεξιόστροφο αντινετρίνο.

Αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A^μ

Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο υπακούει την εξίσωση Dirac $(\not\partial - m)\psi = 0$ με $\psi = u(\mathbf{p})e^{-ipx}$. Η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εισάγεται με την "ελάχιστη αντικατάσταση" $p^\mu \to p^\mu + eA^\mu$ (θεωρώντας το φορτίο του ηλεκτρονίου $-e$). Ξεκινώντας λοιπόν από την εξίσωση Dirac

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{\nabla} + \beta m\right)\psi$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + eA^0\right)\psi = \mathbf{a}\cdot\left(-i\mathbf{\nabla} + e\mathbf{A}\right)\psi + \beta m\psi$$

$$\gamma^0\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \gamma^0\left(-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{\nabla} + \beta m + \hat{V}\right)\psi$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0\psi + i\gamma\cdot\mathbf{\nabla}\psi - m\psi = \gamma^0\hat{V}\psi$$

$$(\not p - m)\psi = \gamma^0\hat{V}\psi$$

όπου $\hat{V} \equiv -eA^0 + e\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}$ και $\gamma^0\hat{V} = -e(\gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}) = -e\not{A}$. Οπότε $(\gamma^0\hat{V} = -e\not{A} \to \hat{V} = -e\gamma^0\not{A})$

$$T_{fi} = -i\int \psi_f^\dagger \hat{V}\psi_i\, d^4x = -i\int \psi_f^\dagger\gamma^0(-e)\not{A}\psi_i\, d^4x$$
$$= -i\int (-e)\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_i A_\mu\, d^4x = -i\int j^\mu A_\mu\, d^4x$$

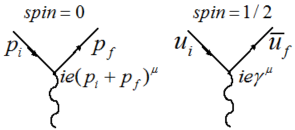
με

$$j^\mu = -e\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_i = -e\bar{u}(\mathbf{p}_f)\gamma^\mu u(\mathbf{p}_i)e^{-i(p_i-p_f)x}$$

Υπενθυμίζουμε ότι για σωματίδια με spin=0 το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$j^\mu = -e(p_f + p_i)^\mu e^{-i(p_i-p_f)x}$$

Η κορυφή στην περίπτωση spin=1/2 είναι τώρα ένας πίνακας.



Άσκηση 28 Δείξτε την παρακάτω σχέση (ανάπτυξη Gordon)

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

Δηλαδή, ενώ το σωματίδιο με spin=0 δρα με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με το φορτίο του ($-e(p_f + p_i)^\mu$), το spin=1/2 δρα και με την μαγνητική ροπή του ($-e\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu$). Αυτή η έννοια φαίνεται καλύτερα όταν πάμε στο όριο των μικρών ενεργειών όπου $p/m << 1$. Ας θεωρήσουμε $A^\mu \neq f(t)$. Οπότε (χρησιμοποιούμε κεφαλαία I και F αντί των i f)

$$\begin{aligned} T_{FI} &= -i \int j^\mu A_\mu \, d^4x = -i \int -e\bar{u}_F \gamma^\mu u_I A_\mu e^{-i(p_F - p_I)x} \, d^4x \\ &= -i \left[\int (-e\bar{u}_F \gamma^\mu u_I) A_\mu e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot \mathbf{x}} \, d^3x \right] 2\pi\delta(E_F - E_I) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Gordon, ο δεύτερος όρος της ανάπτυξης του $\bar{u}_F \gamma^\mu u_I$ δίνει $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I (p_F - p_I)_\nu A_\mu$. Γράφοντας το $u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ όπου u_A και u_B είναι οι μεγάλες και οι μικρές συνιστώσες αντίστοιχα ο όρος $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I$ γράφεται για τις τρεις περιπτώσεις:

α) $\nu, \mu = 1, 2, 3.$ $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I \to (u_A^\dagger \; u_B^\dagger)_F \gamma^0 i\sigma^{ij} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}_I.$

Αλλά

$$\begin{aligned} i\gamma^0\sigma^{ij} &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) & 0 \\ 0 & -(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) \end{pmatrix} = \\ &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{2} 2 \begin{pmatrix} -i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, θα εμφανιστούν όροι της μορφής $\bar{u}_{AF}\sigma_k u_{AI}$ και $\bar{u}_{BF}\sigma_k u_{BI}$. Ο δεύτερος όρος είναι κατά $(p/m)^2$ μικρότερος από τον πρώτο. Επομένως, θα μείνει ο όρος $\bar{u}_{AF} i\sigma_k u_{AI}\ \epsilon_{ijk}(p_F - p_I)^j A^i$.

β) $\mu = 0$, $\nu = 1, 2, 3$. Το $\gamma^0\sigma^{0j}$ είναι πίνακας με στοιχεία εκτός διαγωνίου, άρα αναμιγνύει μεγάλες και μικρές συνιστώσες, επομένως όλοι οι όροι είναι τάξης (p/m) και τέλος
γ) $\mu = \nu = 0$, το $\sigma^{\mu\nu} = 0$
Επομένως, μαζεύοντας τους ''μεγάλους'' όρους μόνο, έχουμε

$$T_{fi} = -e2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k (p_F - p_I)^j A^i u_{AI} =$$

$$= -ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x \left(\partial^j e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}}\right) \bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k A^i u_{AI} =$$

$$= ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k \left(\partial^j A^i\right) u_{AI} =$$

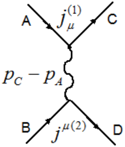
$$= -ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \bar{u}_{AF}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\times\mathbf{A}\right] u_{AI}$$

(όπου στην 3η γραμμή απορρίφθηκε το επιφανειακό ολοκλήρωμα). Ο όρος μέσα στην αγκύλη δεν είναι τίποτα άλλο παρά $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$, με $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ το μαγνητικό πεδίο.

Σκέδαση Moeller($e^- e^- \to e^- e^-$)

Γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}$$



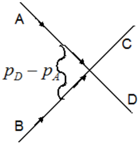
Αλλά

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2}\right) j^{\mu(2)}(x)\, d^4x =$$

$$-\, i \,(-e\bar{u}_C \gamma_\mu u_A) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (-e\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

όπου $q = p_C - p_A$. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος $\mathcal{M}$ είναι

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\,(ie\bar{u}_D\gamma_\nu u_B)$$



όπως είχαμε ορίσει τις ''κορυφές''. Βέβαια, υπάρχει και το διάγραμμα με διασταυρωμένα τα ηλεκτρόνια C και D και το επιπλέον $-$, λόγω ανταλλαγής όμοιων φερμιονίων. Το συνολικό πλάτος είναι λοιπόν

$$\mathcal{M} = -e^2\frac{(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\,(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)}{(p_A - p_C)^2} + e^2\frac{(\bar{u}_D\gamma_\mu u_A)\,(\bar{u}_C\gamma^\mu u_B)}{(p_A - p_D)^2} \qquad (15)$$

Για να πάμε στην ''μη πολωμένη'' ενεργό διατομή (δηλαδή σ' αυτήν που δεν διακρίνουμε το spin πριν και μετά την σκέδαση), θα πρέπει να τετραγωνίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος, να πάρουμε μέσο όρο του spin των εισερχομένων και να αθροίσουμε στα spin των εξερχομένων ηλεκτρονίων

$$\frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2$$

Ας δούμε αυτήν την ''πράξη'' πρώτα στην περίπτωση χαμηλής ενέργειας. Τότε τα εισερχόμενα ηλεκτρόνια είναι

$$u^{(s)} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{u}^{(s)} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^{\dagger(s)} & 0 \end{pmatrix} \quad s = 1,2$$

και παίρνουμε

$$\bar{u}^{(s)}\gamma^{\mu}u^{(s')} = \left\{ \begin{array}{ll} 2m & \mu = 0 \\ 0 & \mu \neq 0 \end{array} \right\}\delta^{ss'}$$

μιας και

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \chi^{(s)} = \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για $p/m << 1$ το spin δεν αλλάζει. Αυτό το περιμέναμε. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν αλλάζει την προβολή του spin. Το μαγνητικό πεδίο το κάνει και αυτό εμφανίζεται σε μεγάλες ταχύτητες (ενέργειες). Επομένως, η Εξ.(15) δίνει

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to\uparrow\uparrow) &= \mathcal{M}(\downarrow\downarrow\to\downarrow\downarrow) = -e^2 4m^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right) \\
\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\to\uparrow\downarrow) &= \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\downarrow\uparrow) = -e^2 4m^2 \frac{1}{t} \\
\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\to\downarrow\uparrow) &= \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\uparrow\downarrow) = e^2 4m^2 \frac{1}{u}
\end{aligned}$$

και

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(4m^2e^2)^2 2 \left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right)$$

όπου $t = (p_A - p_C)^2$ και $u = (p_A - p_D)^2$.

Στο Κ.Μ. έχουμε
$t=(p_A-p_C)^2=2m^2-2p_A^{\mu}p_{C\mu}=2m^2-2(E^2-p^2\cos\theta)=$
$2(m^2-E^2+p^2\cos\theta)=-2p^2(1-\cos\theta)=-4p^2\sin^2\theta/2$ και
$u=-2p^2(1+\cos\theta)=-4p^2\cos^2\theta/2$, και η ενεργός διατομή

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}}=\frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{p_f}{p_i}\left|\mathcal{M}\right|^2=$$

$$=\frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{1}{4}16m^4e^4 2\left[\left(\frac{1}{\sin^2\theta/2}-\frac{1}{\cos^2\theta/2}\right)^2=\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{\cos^4\theta/2}\right]\frac{1}{16p^4}=$$

$$=\frac{1}{128\pi^2}\frac{1}{s}m^4\left[\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2(4\pi)^2\right]\frac{2}{p^4}=$$

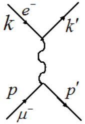
$$\left[\frac{1}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{\cos^4\theta/2}-\frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{p^4}\frac{m^4}{s}\left[\frac{1}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{\cos^4\theta/2}-\frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right]$$

όπου $\alpha = e^2/(4\pi)$. Για $p/m << 1$, $s \simeq 4m^2$ οπότε $m^4/s = m^2/4$.

Σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

Ας πάμε πίσω στη σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ οπότε έχουμε μόνο ένα διάγραμμα. Το αναλλοίωτο πλάτος γράφεται



$$\mathcal{M} = -e^2 \left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right] \frac{1}{q^2} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right]$$

με $q = k - k'$. Γράφουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{(e)} L^{(\mu)}_{\mu\nu}$$

με

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = (1/2) \sum_{\text{spin e}} \left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right] \left[\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)\right]^*$$

$$L^{(\mu)}_{\mu\nu} = (1/2) \sum_{\text{spin e}} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right] \left[\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p)\right]^*$$

Να υπολογίσουμε την δεύτερη αγκύλη του $L^{\mu\nu}_{(e)}$

$$\left[\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)\right]^* = \left[\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)\right]^\dagger = u^\dagger(k)\gamma^{\nu\dagger}\bar{u}^\dagger(k') =$$
$$= u^\dagger(k)\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{0\dagger}u(k') = u^\dagger(k)\gamma^0\gamma^\nu u(k')$$
$$= \bar{u}(k)\gamma^\nu u(k')$$

Άρα, γράφοντας αναλυτικά τους δείκτες των πινάκων και των spinors

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2}\sum_{s,s'}\left[\bar{u}^{(s')}(k')_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}u^{(s)}(k)_\beta\right]\left[\bar{u}^{(s)}(k)_\delta\gamma^\nu_{\delta\epsilon}u^{(s')}(k')_\epsilon\right]$$

όπου βέβαια υπονοείται άθροιση στα α, β, δ και ϵ. Αλλά

$$\sum_s u^{(s)}(k)_\beta\,\bar{u}^{(s)}(k)_\delta = (\not{k} + m)_{\beta\delta} \quad \text{και}$$
$$\sum_{s'} u^{(s')}(k')_\epsilon\,\bar{u}^{(s')}(k')_\alpha = (\not{k}' + m)_{\epsilon\alpha}$$

Οπότε, γράφουμε

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2}(\not{k}'+m)_{\epsilon\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}(\not{k}+m)_{\beta\delta}\gamma^\nu_{\delta\epsilon} = \frac{1}{2}Tr\left[(\not{k}'+m)\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma^\nu\right]$$

Θεωρήματα ίχνών και πίνακες γ

Η βασική σχέση είναι η $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Βασικά θεωρήματα είναι τα ακόλουθα

- $Tr I = 4$
- $Tr[\gamma^\mu] = 0$
- $Tr[\text{περιττός αριθμός πινάκων } \gamma] = 0$
- $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ οπότε $Tr[\not{a}\not{b}] = 4a \cdot b$
- για n άρτιος ακέραιος

  $$Tr[\not{a}_1\not{a}_2 ... \not{a}_n] = (a_1 \cdot a_2) Tr[\not{a}_3 ... \not{a}_n] - (a_1 \cdot a_3) Tr[\not{a}_2\not{a}_4 ... \not{a}_n] + ... + (a_1 \cdot a_n) Tr[\not{a}_2\not{a}_3 ... \not{a}_{n-1}]$$

  οπότε

  $$Tr[\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4] = 4[(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3)]$$

- $Tr[\gamma^5] = 0$
- $Tr[\gamma^5\not{a}\not{b}] = 0$
- $Tr[\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma$

Άσκηση 29 Δείξτε τα παραπάνω θεωρήματα των ιχνών

Σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **και** $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Ξαναγυρίζουμε στην σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ Είχαμε φτάσει στο σημείο να γράψουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{(e)}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\mu)}$$

όπου

$$L_{(e)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu\right]$$

και όμοια και για το

$$L_{(\mu)\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr\left[(\not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu\right]$$

Από τις ιδιότητες των ιχνών των πινάκων παίρνουμε

$$\begin{aligned} L_{(e)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2} Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu + m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2} 4\left[k^{\mu\prime}k^\nu + k^{\nu\prime}k^\mu - g^{\mu\nu}(kk' - m^2)\right] \end{aligned}$$

και

$$L_{(\mu)\mu\nu} = 2\left[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(pp' - M^2)\right]$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{(e)} L_{(\mu)\mu\nu} = \\ &= \frac{8e^4}{q^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p')\right. \\ &\qquad \left. - m^2 p'\cdot p - M^2 k'\cdot k + 2m^2M^2\right]\end{aligned}$$

Για την περίπτωση που $E >> m, M$ παίρνουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{(k-k')^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p')\right]$$

Υπενθυμίζοντας ότι

$$s = (k+p)^2 \simeq 2k \cdot p = 2k' \cdot p'$$
$$t = (k-k')^2 \simeq -2k \cdot k' = -2p \cdot p'$$
$$u = (k-p')^2 \simeq -2k \cdot p' = -2k' \cdot p$$

έχουμε τελικά

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2+u^2}{t^2}, \qquad \text{για την} \quad e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

Για το $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$, απλά χρειαζόμαστε την αντικατάσταση $s \leftrightarrow t$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{t^2+u^2}{s^2}, \qquad \text{για την} \quad e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$$

Γνωρίζοντας ότι

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{p_f}{p_i}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

παίρνουμε, για την $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}} &= \frac{1}{64\pi^2 s}\,2e^4\,\frac{t^2+u^2}{s^2} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,2e^4\,\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) = \\ &= \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta), \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}\end{aligned}$$

Για να βρούμε την συνολική ενεργό διατομή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε

$$\int d\Omega(1+\cos^2\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta(1+\cos^2\theta)d\theta = 2\pi\,\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi$$

Οπότε παίρνουμε

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Διατήρηση της ελικότητας σε μεγάλες ενέργειες
Έχουμε ήδη δει ότι για $E >> m$ ισχύει

$$P_L u = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u \equiv u_L \quad \text{με αρνητική ελικότητα } \lambda = -1/2$$
$$P_R u = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u \equiv u_R \quad \text{με θετική ελικότητα } \lambda = +1/2$$

Ας το δούμε αυτό καλύτερα πηγαίνοντας στην γνωστή μορφή των λύσεων του Dirac για θετικές ενέργειες

$$u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αυτή η επιλογή του $\chi^{(s)}$ αντιστοιχεί στην ορμή $(0,0,p)$ και ότι το $u^{(1)}$ έχει θετική ελικότητα ($\lambda = +1/2$), ενώ το $u^{(2)}$ έχει αρνητική ελικότητα ($\lambda = -1/2$).

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3\chi^{(s)} \\ \frac{p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

μιας και $\sigma_3\chi^{(1)} = \chi^{(1)}$ και $\sigma_3\chi^{(2)} = -\chi^{(2)}$ Όμοια, το $u^{(3)}(-\mathbf{p}) = v^{(2)}(\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα ($\lambda = +1/2$), ενώ το $u^{(4)}(-\mathbf{p}) = v^{(1)}(\mathbf{p})$ έχει αρνητική ελικότητα ($\lambda = -1/2$).
Για υψηλές ενέργειες, $E + m \sim E$ και $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \sim \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E} = \frac{\sigma_3 p}{E} = \sigma_3$.
Και τα $u^{(1,2)}$ γίνονται

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ομοια, οι αρνητικής ενέργειας λύσεις

$$u^{(3,4)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad ή \quad u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

γράφονται

$$u^{(3)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad u^{(4)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Είχαμε, επίσης, δει ότι για υψηλές ενέργειες ο τελεστής της ελικότητας $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ και ο τελεστής της χειραλικότητας γ^5 έχουν την ίδια δράση: $\gamma^5 \sim \boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$, δηλαδή $\gamma^5 = \mathrm{diag}(\sigma_3, \sigma_3)$. Οπότε

$$P_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1-\sigma_3 \end{pmatrix}$$

Η δράση του $\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)$ στα $\chi^{(s)}$ είναι

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(1-\sigma_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{1}{2}(1-\sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$P_R u^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = u^{(1)}$$

ενώ $P_R u^{(2)} = 0$. Άρα, το P_R προβάλλει το $u^{(1)}$, πού έχει θετική ελικότητα ($\lambda = +1/2$). Όμοια, ο P_L προβάλλει το $u^{(2)}$ πού έχει αρνητική ελικότητα ($\lambda = -1/2$). Αν εφαρμόσουμε τους P_{LR} στους $u^{(3,4)}(-\mathbf{p})$, θα δούμε ότι $P_R u^{(3)}(-\mathbf{p}) = u^{(3)}(-\mathbf{p})$, $P_L u^{(3)}(-\mathbf{p}) = 0$, $P_L u^{(4)}(-\mathbf{p}) = u^{(4)}(-\mathbf{p})$ και $P_R u^{(4)}(-\mathbf{p}) = 0$. Επομένως, το $u^{(3)}(-\mathbf{p})$ είναι R και το $u^{(4)}(-\mathbf{p})$ είναι L. Αλλά, αυτά αντιστοιχούν σε ''έλλειψη'' ηλεκτρονίου με $-\mathbf{p}$, άρα το αντίστοιχο ποζιτρόνιο έχει αντίθετη χειραλικότητα: το $v^{(2)}(\mathbf{p}) = u^{(3)}(-\mathbf{p})$ είναι L και το $v^{(1)}(\mathbf{p}) = u^{(4)}(-\mathbf{p})$ είναι R.

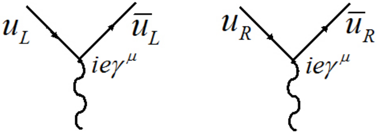
Συνοψίζουμε:

Σε μεγάλες ενέργειες
το $u^{(1)}(\mathbf{p})$ *έχει* $\lambda = +1/2$ *και είναι* R,
το $u^{(2)}(\mathbf{p})$ *έχει* $\lambda = -1/2$ *και είναι* L,
το $v^{(2)}(\mathbf{p})$, *έχει* $\lambda = +1/2$ *και είναι* L,
το $v^{(1)}(\mathbf{p})$, *έχει* $\lambda = -1/2$ *και είναι* R,

Γράφοντας το ρεύμα $\bar{u}\gamma^\mu u$ ως

$$\begin{aligned}\bar{u}\gamma^\mu u &= \bar{u}(P_L + P_R)\gamma^\mu(P_L + P_R)u = \bar{u}P_L\gamma^\mu P_R u + \bar{u}P_R\gamma^\mu P_L u = \\ &= u^\dagger\gamma^0 P_L\gamma^\mu u_R + u^\dagger\gamma^0 P_R\gamma^\mu u_L = u^\dagger P_R\gamma^0\gamma^\mu u_R + u^\dagger P_L\gamma^0\gamma^\mu u_L = \\ &= (P_R u)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u_R + (P_L u)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u_L = \overline{u_R}\gamma^\mu u_R + \overline{u_L}\gamma^\mu u_L\end{aligned}$$

($P_L P_R = P_R P_L = 0$, ${\gamma^5}^2 = 1$, $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$) παρατηρούμε ότι η ηλεκτροδυναμική διατηρεί την χειραλικότητα (L, R), και για μεγάλες ενέργειες ($E >> m$), και την ελικότητα. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση που έχουμε ψευδοδιάνυσμα ($\gamma^\mu\gamma^5$) αντί διάνυσμα (γ^μ) στην αλληλεπίδραση.



Στην εξαΰλωση και την δίδυμη γένεση, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο έχουν αντίθετη χειραλικότητα (και επομένως, σε μεγάλες ενέργειες αντίθετη ελικότητα).

$$\overline{u^{(3,4)}(-\mathbf{p})}P_R\gamma^\mu P_L u^{(1,2)} =$$

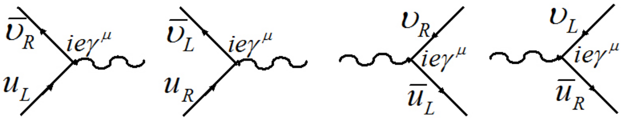
$$u^{(3,4)}(-\mathbf{p})^\dagger\gamma^0 P_R\gamma^\mu u_L^{(2)} = \left(P_L u^{(3,4)}(-\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu u_L^{(2)} =$$

$$\left(u_L^{(4)}(-\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu u_L^{(2)} = \left(v_R^{(1)}(\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu u_L^{(2)} = \overline{v_R^{(1)}(\mathbf{p})}\gamma^\mu u_L^{(2)}$$

και όμοια

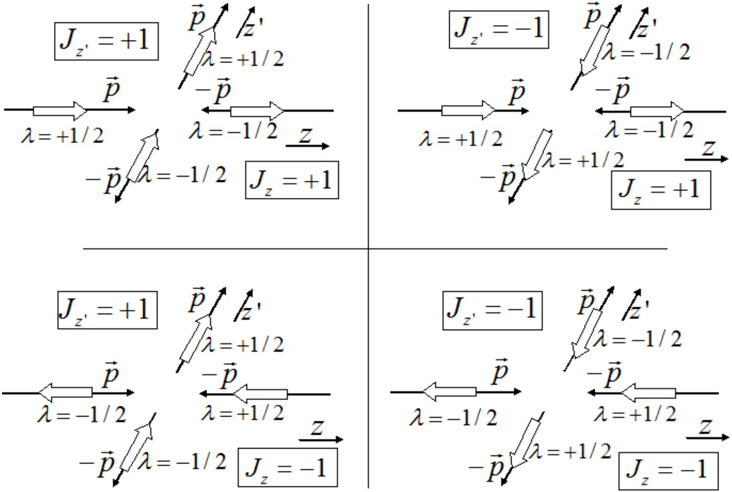
$$\overline{u^{(3,4)}(-\mathbf{p})}P_L\gamma^\mu P_R u^{(1,2)} = \overline{v_L^{(2)}(\mathbf{p})}\gamma^\mu u_R^{(1)}$$

Αντίστοιχα ισχύει και για την δίδυμη γένεση.



Άσκηση 30 Δείξτε ότι στην διάσπαση $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ το e είναι L. Στην $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$, ποια είναι η χειραλικότητα του e;

Μπορούμε μόνο με την διατήρηση της ελικότητας να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Όπως είδαμε, για μεγάλες ενέργειες, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο (στην αρχική κατάσταση) όπως και το μιόνιο και το αντιμιόνιο (στη τελική κατάσταση) θα πρέπει να έχουν αντίθετη ελικότητα. Επομένως, στο Κέντρο Μάζας, θά εχουμε τις τέσσερεις παρακάτω περιπτώσεις, όπου με παχιά βέλη δείχνουμε το spin και σημειώνεται και η αντίστοιχη ελικότητα.



$J_{z'} = +1$
$\vec{p}$
z'
$\lambda = +1/2$
$-\vec{p}$
$\lambda = -1/2$
z
$J_z = +1$
$J_{z'} = -1$
$\lambda = -1/2$
$\lambda = +1/2$
$J_z = +1$
$J_{z'} = +1$
$J_z = -1$
$J_{z'} = -1$
$J_z = -1$

Από μια αρχική κατάσταση με στροφορμή $J_z = \pm 1$, το σύστημα πηγαίνει σε $J_{z'} = \pm 1$, μέσω μιας ενδιάμεσης κατάστασης, το φωτόνιο, με στροφορμή 1. Επομένως το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι ανάλογο του πίνακα στροφής

$$< j\lambda' | exp(-i\theta J_y) | j\lambda > \tag{16}$$

όπου y είναι ο άξονας κάθετος στο επίπεδο αλληλεπίδρασης και λ και λ' είναι η συνολική ελικότητα στους άξονες z και z'. Η αναπαράσταση του πίνακα J_y είναι ($j = 1$)

$$J_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζεται ότι

$$J_y^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_y^3 = J_y, \quad J_y^4 = J_y^2$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
e^{-i\theta J_y} &= 1 + J_y^2\left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) - iJ_y\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) = \\
&= 1 - J_y^2 + J_y^2\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) - iJ_y\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) = \\
&= 1 - J_y^2 + J_y^2\cos\theta - iJ_y\sin\theta
\end{aligned}
$$

Και η (16) αντιστοιχεί στη σχέση

$$
\left(a_1^* \, a_0^* \, a_{-1}^*\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} \tag{17}
$$

όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στην συνολική ελικότητα. Εμάς μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις από ± 1 σε ± 1. Βλέπουμε ότι

$$\text{οι όροι } (-1 \to -1) \text{ και } (1 \to 1) \text{ αντιστοιχούν } \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\text{οι όροι } (-1 \to 1) \text{ και } (1 \to -1) \text{ αντιστοιχούν } \frac{1-\cos\theta}{2}$$

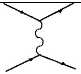
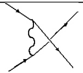
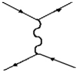
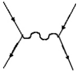
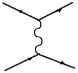
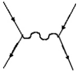
Για μεγάλες ενέργειες όμως $\frac{1+\cos\theta}{2} = -u/s$ και $\frac{1-\cos\theta}{2} = -t/s$. Οπότε

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{u^2}{s^2} + \frac{t^2}{s^2} = \frac{u^2+t^2}{s^2}$$

Το αποτέλεσμα είναι λοιπόν απλή απόρροια διατήρησης της στροφορμής. Βλέπουμε ακόμα, για παράδειγμα, ότι η σκέδαση $e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+$, που αντιστοιχεί στη πάνω δεξιά περίπτωση του Σχ.(147), για $\theta = 0$ είναι 0. Δεν έχουμε εμπρόσθια (forward) σκέδαση σ' αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 31 Δείξτε, με την παραπάνω μέθοδο, ότι για σωματίδια με spin=0, το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ είναι ανάλογο του $(t-u)/s = \cos\theta$

$e^+e^- \to e^+e^-,\ \mu^+\mu^-$: **Περίληψη**

Διαδικασία	$\overline{\lvert\mathcal{M}\rvert^2}/2e^4$		
$e^-e^- \to e^-e^-$	$\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2+t^2}{u^2}$		
$e^-e^+ \to e^-e^+$	$\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2+t^2}{s^2}$		
$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$	$\frac{s^2+u^2}{t^2}$		
$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$	$\frac{u^2+t^2}{s^2}$		

$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **στο εργαστήριο** - **Κινηματική**

Η παρακάτω ανάλυση θα φανεί πολύ χρήσιμη στην κατανόηση της σκέδασης ηλεκτρονίου από πρωτόνιο. Επιστρέφουμε στον πλήρη τύπο της σκέδασης $e^-(k)\mu^-(p) \to e^-(k')\mu^-(p')$, όπου αμελούμε μόνο την μάζα του ηλεκτρονίου

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') - M^2 k'\cdot k\right] \\ &= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2(k\cdot p - k'\cdot p) + 2(k'\cdot p)(k\cdot p) + \frac{1}{2}M^2 q^2\right]\end{aligned}$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και χρησιμοποιήσαμε ότι

$$p' = k - k' + p, \qquad k^2 = k'^2 \simeq 0, \qquad q^2 = (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k'$$

Στο σύστημα εργαστηρίου $p = (M, 0)$ για το μιόνιο, οπότε παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2 M(E-E') + 2EE'M^2 + \frac{1}{2}M^2q^2\right] \\
&= \frac{8e^4}{q^4}2M^2EE'\left[-\frac{q^2}{2M^2}\,\frac{M(E-E')}{2EE'} + 1 + \frac{1}{4}\,\frac{q^2}{EE'}\right] = \qquad (18) \\
&= \frac{8e^4}{q^4}2M^2EE'\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]
\end{aligned}
$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε ότι

$$
\begin{aligned}
&q^2 \simeq -2kk' = 2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&q = -p + p' \to q + p = p' \to q^2 + 2p\cdot q + M^2 = M^2 \to \\
&\qquad\qquad \to q^2 = -2p\cdot q = -2M(E-E')
\end{aligned}
$$

με E και E' η ενέργεια του εισερχόμενου και εξερχόμενου ηλεκτρονίου.
Ορίζουμε την χρήσιμη ποσότητα $\nu = E - E' = -\frac{q^2}{2M} = \frac{pq}{M}$.

Πηγαίνουμε τώρα στην ενεργό διατομή

$$d\sigma = \left(\frac{1}{(2E)(2M)}\,\frac{1}{1}\right)\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\,\frac{d^3k'}{2E'}\,\frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p+k-p'-k')$$

όπου ο όρος $(2E)$ αντιστοιχεί στην ροή των ηλεκτρονίων, ο $(2M)$ στην ''ροή'' των μιονίων και η μονάδα στην σχετική ταχύτητα του ηλεκτρονίων ως προς το μιόνιο (περίπου c). Γράφοντας $d^3k' = k'^2 dk' d\Omega$ παίρνουμε

$$d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4ME}\,\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\,\frac{\mathbf{k}^{2'}dk'd\Omega}{E'}\,\frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p+k-p'-k')$$

Αλλά, $\mathbf{k}^{2'} \simeq E'^2$ οπότε $\frac{\mathbf{k}^{2'}dk'}{E'} \simeq E'dE'$ και η διατομή γράφεται

$$d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4ME}\,\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}E'dE'\,\frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p-p'+q)d\Omega \qquad (19)$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι

$$\int \frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p-p'+q) = \int d^3p' dp'_0 \delta^{(4)}(p-p'+q)\theta(p'_0)\delta(p'^2 - M^2)$$
$$= \frac{1}{2M}\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \frac{1}{2MA}\delta\left(E' - \frac{E}{A}\right)$$

όπου $A = 1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}$.
Κατ' αρχάς μπορούμε να γράψουμε
$\delta(p'^2 - M^2) = \delta(p_0'^2 - M^2 - \mathbf{p}'^2)$. Και επομένως
$\int dp'_0\delta(p_0'^2 - M^2 - \mathbf{p}'^2) = \frac{1}{2p'_0}$, με $p'_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}$, όπου χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης δ

$$\int dx f(x)\delta(g(x)) = \frac{f(x_0)}{\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}\right|}$$

Η συνάρτηση θ είναι ίση με τη μονάδα όταν το όρισμα της είναι θετικό και μηδέν σε αντίθετη περίπτωση. Οπότε η $\theta(p'_0)$ επιλέγει μόνο τη θετική ρίζα. Έτσι δείξαμε την πρώτη ισότητα της προς απόδειξη σχέσης. Για την δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\int d^4p'\delta^{(4)}(p+q-p')\theta(p'_0)\delta(p'^2-M^2) = \delta\left((p+q)^2-M^2\right) =$$

$$= \delta(q^2+2pq) = \delta(q^2+2\nu M) = \frac{1}{2M}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right) =$$

$$= \frac{1}{2M}\delta\left(E-E'-\frac{4EE'}{2M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2M}\delta\left(E-E'\left(1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2M}\frac{1}{A}\,\delta\left(E'-\frac{E}{A}\right), \quad \text{όπου } A = \left(1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Ξαναγυρίζουμε στη σχέση (19) και χρησιμοποιώντας το αναλοίωτο πλάτος, (18), έχουμε

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right) =$$

$$= \frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\frac{1}{A}\,\delta(E'-E/A)$$

και ολοκληρώνοντας ως προς E' θα πάρουμε ($q^2 = (k-k')^2 = -2kk' = 2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$ και
$A = 1 + 2E\sin^2(\theta/2)/M = 1 + q^2/(-2E'M) = 1 + (-2M(E-E'))/(-2E'M) = 1 + E/E' - 1 = E/E'$)

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm lab} &= \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{1}{A}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \\
&= \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{E'}{E}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Η ύπαρξη του δεύτερου όρου στις αγκύλες ($\sin^2\frac{\theta}{2}$) είναι χαρακτηριστικό του στόχου (μιόνιο) με spin=1/2.

Άσκηση 32 Δείξτε, ότι η ενεργός διαφορική διατομή για σκέδαση ηλεκτρονίου από στόχο με spin=0 δίνεται από τον τύπο

$$
\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}
$$

Φωτόνια - Διάνυσμα πόλωσης

Γνωρίζουμε ήδη ότι οι νόμοι του Maxwell γράφονται με συναλλοίωτο τρόπο

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu$$

ή ακόμα, ορίζοντας τον τανυστή του πεδίου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, μπορούμε να γράψουμε

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Η διατήρηση του ρεύμετος j^ν είναι ενσωματωμένη στη μορφή αυτή: $\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Τα πεδία **E** και **B** παραμένουν αναλοίωτα στον μετασχηματισμό $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$ όπου χ τυχαία συνάρτηση. Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση χ μπορούμε να επιτύχουμε $\partial_\nu A^\nu = 0$ (συνθήκη Lorentz), οπότε

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu \to \Box^2 A^\mu = j^\mu$$

Ακόμα και σ' αυτήν την περίπτωση, παραμένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής της χ, αρκεί βέβαια $\Box^2\chi = 0$. Δηλαδή, μένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής του $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ με $\Box^2\Lambda = 0$.

Η κυματοσυνάρτηση του ελεύθερου φωτονίου ικανοποιεί την $\Box^2 A^\mu = 0$ με λύση $A^\mu = \epsilon^\mu(\mathbf{q})e^{-iqx}$, με $q^2 = 0$ ($m_\gamma = 0$). Το $\epsilon^\mu(\mathbf{q})$ είναι το διάνυσμα πόλωσης, το οποίο έχει, βέβαια, 4 συνιστώσες. Αλλά, η σχέση $\partial_\mu A^\mu = 0$ μας υποχρεώνει $q^\mu\epsilon_\mu = 0$, οπότε έχουμε μειώσει σε τρεις τις ανεξάρτητες συνιστώσες. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχουμε ακόμα μια ελευθερία για το $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ με $\Box^2\Lambda = 0$. Αν επιλέξουμε $\Lambda = iae^{-iqx}$, οπότε $\Box^2\Lambda = -iq^2ae^{-iqx} = 0$, τότε $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda = A^\mu + aq^\mu e^{-iqx}$ που αντιστοιχεί στην αλλαγή $\epsilon^\mu \to \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + aq^\mu$. Δηλαδή, τα ϵ^μ και ϵ'^μ είναι ισοδύναμα, περιγράφουν το ίδιο φωτόνιο. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο a ώστε να έχουμε $\epsilon^0 = 0$. Και η σχέση $\epsilon^\mu q_\mu = 0$ γίνεται $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{q} = 0$ (βαθμίδα Coulomb).

Τελικά, λοιπόν, έχουμε μόνο δύο ανεξάρτητες συνιστώσες (spin=1 με μηδενική μάζα), π.χ. $\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)$ και $\boldsymbol{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)$, θεωρώντας ότι $\mathbf{q} = (0, 0, q)$. Τα $\mathbf{q}$ και ϵ^μ περιγράφουν πλήρως το φωτόνιο.

Άσκηση 33 Δείξτε πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$

σε μια στροφή με γωνία θ γύρω από τον άξονα z. Τα διανύσματα αυτά ονόμαζονται διανύσματα κυκλικής πόλωσης και το δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα.

Άσκηση 34 Δείξτε ότι στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2), \quad \epsilon_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$
$$\epsilon_1 = (1,0,0), \quad \epsilon_2 = (0,1,0)$$

Διανύσματα πόλωσης για spin=1 και M $\neq 0$

Στο σύστημα ηρεμίας έχουμε 3 δυνατές καταστάσεις για spin=1. Για παράδειγμα, μπορούν να περιγραφούν από τα τρία διανύσματα $\epsilon_1 = (1,0,0)$, $\epsilon_2 = (0,1,0)$ και $\epsilon_3 = (0,0,1)$, και βέβαια ισχύει $\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \delta_{ij}$. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τα διανύσματα

$$\epsilon_{\lambda=1} = -\sqrt{1/2}(1,i,0) = -\sqrt{1/2}(\epsilon_1 + i\epsilon_2)$$
$$\epsilon_{\lambda=0} = (0,0,1) = \epsilon_3$$
$$\epsilon_{\lambda=-1} = \sqrt{1/2}(1,-i,0) = \sqrt{1/2}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$

με $\epsilon^*_\lambda \cdot \epsilon_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$. Ας φτιάξουμε τώρα τετραδιανύσματα. Στο σύστημα ηρεμίας μπορώ να διαλέξω $\epsilon^\mu_\lambda = (0, \epsilon_\lambda)$. Σ' αυτό το σύστημα βέβαια, η ορμή είναι $p^\mu = (M,0,0,0)$ και ισχύει $p_\mu \epsilon^\mu = 0$.

Η τελευταία είναι μια αναλλοίωτη συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς. Τώρα θα πρέπει να βρούμε το αντίστοιχο διάνυσμα πόλωσης όταν πάμε από $(M,0,0,0) \to (E,0,0,p)$. Η ταχύτητα του νέου συστήματος είναι $(0,0,-p/E)$ και το διάνυσμα πόλωσης $(0,\epsilon_{\lambda=0})$ γίνεται

$$0 \to \frac{0-(-v)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{p/E}{\sqrt{1-p^2/E^2}} = \frac{p}{M}$$

$$1 \to \frac{1-(-v)0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E}{M}$$

Άρα, $\epsilon^{\mu}_{\lambda=0} = (0,0,0,1) \to \frac{1}{M}(p,0,0,E)$ και βέβαια ισχύει $(E,0,0,p)\cdot\frac{1}{M}(p,0,0E) = 0$. Τα διανύσματα για $\lambda = \pm 1$ δεν αλλάζουν μιας και το σύστημα μας κινείται στον άξονα των z. Την σχέση $p^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0$ μπορούμε να τη δούμε και από άλλη πλευρά. Γενικεύοντας την εξίσωση για το φωτόνιο, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\Box^2 A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \to \left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = 0$$

και εισάγοντας μάζα M

$$\left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + M^2\right) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = 0 \tag{20}$$

Παραγωγίζοντας ως προς ∂^μ

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + M^2\right) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu &= 0 \\
\left[\partial_\nu\left(\Box^2 + M^2\right) - \Box^2\partial_\nu\right] A^\nu &= 0 \\
\partial_\nu A^\nu &= 0
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η συνθήκη Lorentz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, για τα φωτόνια ($M = 0$), είναι ταυτότητα για $M \neq 0$. Και βέβαια η σχέση $p^\mu \epsilon_\mu = 0$ έπεται άμεσα ($A^\mu = \epsilon^\mu e^{-ip\cdot x}$).

Άσκηση 35 Δείξτε ότι η σχέση πληρότητας για τα spin=1 με μάζα

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \tag{21}$$

Ο διαδότης του ηλεκτρονίου

Από την μη σχετικιστική θεωρία είχαμε δει

$$T_{fi} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \left[< f|V|i > + \sum_{n \neq i} < f|V|n > \frac{1}{E_i - E_n} < n|V|i > + ... \right]$$

όπου $H_0|n >= E_n|n >$. Φορμαλιστικά μπορούμε να γράψουμε

$$T_{fi} = 2\pi\delta(E_f - E_i) < f|(-iV) + (-iV)\frac{i}{E_i - H_0}(-iV) + ...|i >$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\sum_{n\neq i} |n >< n| = 1$. Η επιλογή του $-iV$, αντί του V, γίνεται από την παρουσία του V στην εξίσωση του Schroedinger, $i\partial\Psi/dt = V\Psi$, που δίνει και την χρονική εξάρτηση $\exp(-iVt)$ στην ‘‘εικόνα αλληλεπίδρασης’’ (interaction picture). Οπότε, αντιστοιχούμε **κορυφή**$\rightarrow (-iV)$ και **διαδότης**$\rightarrow \frac{i}{E_i - H_0}$.

Αν γράψουμε την εξίσωση Schrödinger

$$(H_0 + V)\Psi = E\Psi \to (H_0 - E)\Psi = -V\Psi \to i(H_0 - E)\Psi = -iV\Psi$$

βλέπουμε ότι ο διαδότης ''είναι'' το αντίστροφο του τελεστή στο αριστερό σκέλος της τελευταίας ισότητας

$$\frac{1}{i(H_0 - E)} = \frac{i}{E - H_0}$$

Ο διαδότης του βαθμωτού σωματιδίου

Στο βαθμωτό πεδίο, η Klein-Gordon γράφεται

$$(\Box^2 + m^2)\phi = -V\phi \to i(\Box^2 + m^2)\phi = -iV\phi$$

και, με τον παραπάνω κανόνα, ο διαδότης τους βαθμωτού πεδίου είναι

$$\frac{1}{i(\Box^2 + m^2)} = \frac{-i}{-p^2 + m^2} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Ο διαδότης του σωματιδίου Dirac

Για το ηλεκτρόνιο θα έχουμε ανάλογα

$$(\not{p} - m)\psi = \gamma^0 V\psi \to -i(\not{p} - m)\psi = -i\gamma^0 V\psi$$

όπου $\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu$. Και ο διαδότης του ηλεκτρονίου είναι

$$\frac{1}{-i(\not{p}-m)} = \frac{i}{\not{p}-m} = \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}$$

Θυμηθείτε ότι $\not{p} + m = \sum u^{(s)}\bar{u}^{(s)}$. Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που θα τον δούμε ξανά στο διαδότη του φωτονίου.

Ο διαδότης του φωτονίου

Η εξίσωση που πληρεί το φωτόνιο είναι

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = j^\mu \qquad (22)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι έχουμε μια ελευθερία επιλογής του πεδίο: $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\chi$. Αν δεν ``αφαιρέσουμε'' αυτήν την ελευθερία δεν θα καταφέρουμε να βρούμε τον αντίστροφο του τελεστή.

Άσκηση 36 Δείξτε ότι δεν μπορείτε να ορίσετε τον αντίστροφο του $g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu$

Μόλις όμως επιλέξουμε την βαθμίδα Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$, η εξίσωση γίνεται $g^{\mu\nu}\Box^2 A_\nu = j^\mu$, και μιας και $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$, βλέπουμε άμεσα ότι το αντίστροφο του $-ig_{\mu\nu}\Box^2$ είναι

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Αυτός είναι ο διαδότης του Feynman (ή στη βαθμίδα Feynman).

Άσκηση 37 Η συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$ αφήνει ακόμα μια ελευθερία επιλογής του A^μ: $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ όπου $\Box^2 \Lambda = 0$. Οπότε, η Εξ.(22) μπορεί να γραφεί

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = j^\mu$$

και τότε ο αντίστροφος του τελεστή είναι

$$\frac{i}{q^2}\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]$$

Για $\xi = 1$ πηγαίνουμε στον διαδότη Feynman. Στην QED ο δεύτερος όρος μηδενίζεται στους υπολογισμούς μιας και το δυνητικό φωτόνιο αλληλεπιδρά με διατηρούμενο ρεύμα j^μ για το οποίο ισχύει $q_\mu j^\mu = 0$.

Ο διαδότης διανυσματικού, spin=1, με μάζα

Όπως είχαμε αναφέρει, Εξ.(20), η εξίσωση που πληροί ένα ελεύθερο διανυσματικό σωματίδιο με μάζα είναι

$$\left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + m^2\right) - \partial_\mu \partial_\nu\right] A^\nu = 0$$

Το αντίστροφο του τελεστή (επι i) είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu} + \dfrac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2 - M^2}$$

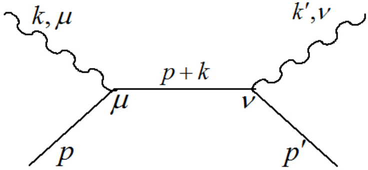
οπότε αυτός είναι και ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα. Προσέξτε ότι ο αριθμητής είναι η σχέση πληρότητας Εξ.(21)

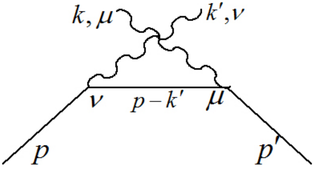
Άσκηση 38 Δείξτε ότι ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2-M^2}$$

Σκέδαση Compton $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά το αναλοίωτο πλάτος για την σκέδαση Compton. Ας προσπαθήσουμε να δούμε κάθε όρο του πλάτους αυτού. Για το εισερχόμενο φωτόνιο θα υπάρχει ο όρος: $\epsilon_\mu e^{-ikx}$ και για το εξερχόμενο: $\epsilon'^{*}_{\nu} e^{+ik'x}$, για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα και για το δεύτερο.





Για το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο: $e^{-ipx}u^{(s)}(p)$ και το εξερχόμενο: $e^{+ip'x}\bar{u}^{(s')}(p')$. Στο ενδιάμεσο ηλεκτρόνιο θα αντιστοιχήσουμε τον διαδότη: $i(\not{p}+\not{k}+m)/((p+k)^2-m^2)$ για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα για το άλλο. Οι δύο κορυφές θα είναι: $ie\gamma^{\mu}$ και $ie\gamma^{\nu}$. Όλα τα εκθετικά θα δώσουν την δέλτα συνάρτηση για την διατήρηση της ορμής-ενέργειας. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος για κάθε διάγραμμα θα είναι

$$-i\mathcal{M}_1 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^{\nu})\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(ie\gamma^{\mu})u^{(s)}(p)\right]\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^{\mu})\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}(ie\gamma^{\nu})u^{(s)}(p)\right]\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}$$

Προσέξτε ότι, όπως περιμέναμε, το άθροισμα $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ είναι αναλλοίωτο στην αλλαγή $(k,\epsilon)\leftrightarrow(-k',\epsilon'^{*})$. Ας δούμε πώς εμφανίζεται εδώ η αναλλοιώτητα βαθμίδας. Απαιτώντας την συνθήκη Lorentz, $\partial^{\mu}A_{\mu}=0$, γνωρίζουμε ότι η φυσική δεν αλλάζει με τον μετασχηματισμό $\epsilon_{\mu}\to\epsilon_{\mu}+ak_{\mu}$. Γράφοντας, λοιπόν, $\mathcal{M}=\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}T^{\mu\nu}$ θα πρέπει

$$\mathcal{M}=\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}T^{\mu\nu}=(\epsilon_{\mu}+ak_{\mu})(\epsilon'^{*}_{\nu}+ak'_{\nu})T^{\mu\nu}$$

οπότε έχουμε τις σχέσεις

$$k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Άσκηση 39 Δείξτε ότι το πράγματι ισχύει η σχέση $k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά.

Χρησιμοποιώντας ότι $(p+k)^2 = s$ και $(p-k')^2 = u$ και αγνοώντας την μάζα του ηλεκτρονίου, τα δύο πλάτη γίνονται

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s}\,\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu\, e^2\, \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu u^{(s)}(p)$$
$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{u}\,\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu\, e^2\, \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}')\gamma^\nu u^{(s)}(p)$$

θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2}$. Ας υπολογίσουμε πρώτα το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{s^2}\, e^4\, Tr\left[\not{p}\gamma^{\mu'}(\not{p}+\not{k})\gamma^{\nu'}\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\right]\epsilon_\mu\epsilon'^*_\nu\epsilon^*_{\mu'}\epsilon'_{\nu'}$$

Για τα φωτόνια έχουμε: $\epsilon_\mu\epsilon^*_{\mu'} = -g_{\mu\mu'}$ και $\epsilon'^*_\nu\epsilon'_{\nu'} = -g_{\nu\nu'}$ (βλ. το Παράρτημα) και το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ γίνεται

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2}\, e^4\; Tr\left[\not{p}\gamma_\mu(\not{p}+\not{k})\gamma_\nu\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\right]$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{s^2}\, e^4\,(-2)(-2)\, Tr\left[\not{p}(\not{p}+\not{k})\not{p}'(\not{p}+\not{k})\right]$$
$$= \frac{1}{s^2}\, e^4\; Tr\left[\not{p}\not{k}\not{p}'(\not{p}+\not{k})\right]$$
$$= \frac{1}{s^2}\, e^4\; Tr\left[\not{k}\not{p}'\not{k}\not{p}\right] = \frac{1}{s^2}\, e^4\, 4\left[(kp')(kp)+(kp)(kp')\right] =$$
$$= \frac{4e^4}{s^2}\, 2\frac{s(-u)}{4} = -2e^4\frac{u}{s}$$

όπου στην τρίτη και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\not{p}^2 = p^2 = 0$. Όμοια, το άλλο διάγραμμα δίνει

$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = -2e^4\frac{s}{u}$$

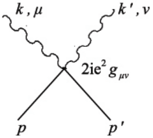
Άσκηση 40 Δείξτε ότι $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* = 0$

Επομένως,

$$\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2} = 2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}\right)$$

Άσκηση 41 Αν το φωτόνιο είναι δυνητικό, οπότε $k^2 = -Q^2 \neq 0$, δείξτε ότι $\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2Q^2 t}{su} \right)$

Σκέδαση Compton βαθμωτού ''ηλεκτρονίου'' Δείξτε ότι για να είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό βαθμίδας το αναλλοίωτο πλάτος για σκέδαση Compton βαθμωτού ''ηλεκτρονίου'', χρειάζεται να συμπεριληφθεί άλλη μια αλληλεπίδραση της μορφής ''ηλεκτρόνιο''-''ηλεκτρόνιο'' -φωτόνιο-φωτόνιο, που φαίνεται στο σχ.



Η σκέδαση χρησιμοποιείται για την αναγνώριση της δομής του στόχου. Χρησιμοποιώντας την γωνιακή κατανομή του σκεδαζομένου "βλήμματος" (π.χ. ηλεκτρόνιου), μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την δομή.
Η γενική ιδέα είναι η εύρεση του **παράγοντα μορφής** (form factor) $F(q)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} |F(q)|^2$$

με q η μεταφερόμενη ορμή μεταξύ του προσπίπτοντος "βλήμματος" e και του στόχου: $q = k_i - k_f$. Ξεκινάμε με τη σκέδαση e σε στόχο χωρίς spin, με φορτίο $Ze\rho(\mathbf{x})$ όπου

$$\int \rho(\mathbf{x})\, d^3x = 1$$

Για στατικό στόχο έχουμε

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x$$

ενώ

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Ας δούμε πώς φτάνουμε σ' αυτό. Για στατικό φορτίο με τιμή Ze θα έχουμε $A^\mu = (V, 0)$ με

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\mathbf{x}) &= -Ze\delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{για σημειακό φορτίο} \\ \nabla^2 V(\mathbf{x}) &= -Ze\rho(\mathbf{x}) \quad \text{για φορτίο με πυκνότητα } \rho \end{aligned}$$

Οπότε, για το σημειακό φορτίο

$$
\begin{aligned}
\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\nabla^2 V(\mathbf{x})\, d^3x &= -\int Ze\delta^3(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x \\
(-i\mathbf{q})^2\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x &= -Ze \\
\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x &= \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}
\end{aligned}
$$

όπου στην δεύτερη ισότητα οδηγηθήκαμε με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη (και μηδενισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος που προκύπτει κάθε φορά). Για το φορτίο με πυκνότητα ρ έχουμε αντίστοιχα

$$
\begin{aligned}
\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\nabla^2 V(\mathbf{x})\, d^3x &= -\int Ze\rho(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x \\
(-i\mathbf{q})^2\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x &= -ZeF(\mathbf{q}) \\
\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x &= \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}F(\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -ie \int d^4x\, \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i A_\mu = -ie \int d^4x\, \bar{u}(k_f)\gamma^\mu u(k_i) e^{-i(k_i-k_f)x} A_\mu$$

Για $A_\mu = (V(\mathbf{x}), 0)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -ie \left(\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right)\, 2\pi\delta(E_i - E_f) \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{x}}\, V(\mathbf{x}) \\ &= -ie \left(\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right)\, 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ και $F(\mathbf{q}) = 1$ για σημειακό φορτίο. Για να πάμε στην διαφορική ενεργό διατομή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|T_{fi}|^2}{T} \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} = \\ &= (e^4 Z^2) \left[\frac{1}{2} \left|\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right|^2\right] \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}\right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(2\pi\delta)^2 = T2\pi\delta$ και η αγκύλη υπονοεί άθροισμα στα spin.
Για στατικό πεδίο, η ενέργεια του ηλεκτρονίου δεν αλλάζει ($\delta(E_i - E_f)$), οπότε και $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ και $E^2 = k^2 + m^2 \rightarrow EdE = kdk$. Έτσι, $d^3k_f = k_f^2 dk_f d\Omega = k_f E_f dE_f d\Omega$. Το $d\sigma$ γράφεται

$$d\sigma = Z^2 e^4 \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}\right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f)\frac{k_f E_f dE_f d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f}\frac{1}{2E_i}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{2}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2\right]$$
$$= \frac{Z^2\alpha^2}{4(\mathbf{q}^2)^2}\left[\frac{1}{2}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2\right]\left[F(\mathbf{q}^2)\right]^2 d\Omega$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $k_f/E_f = v$. Ας υπολογίσουμε τώρα την αγκύλη ($E_i = E_f = E$ και $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{s_f,s_i}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(\not{k}_i+m)\gamma_0(\not{k}_f+m)\gamma_0\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\left[\not{k}_i\gamma_0\not{k}_f\gamma_0\right]+m^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_0^2\right]\right) \\
&= 2\left(2E_iE_f-k_ik_f+m^2\right) \\
&= 2\left(2E^2-(E^2-k^2\cos\theta)+m^2\right) \\
&= 2\left(2E^2-(E^2-k^2\cos\theta)+E^2-k^2\right) \\
&= 4E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

με $v = k/E$ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Οπότε,

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4k^4\sin^4\frac{\theta}{2}}E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left[F(\mathbf{q})\right]^2 \qquad (23)
$$

με $\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2 = 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Για σημειακό στόχο, όπως είπαμε, $F(\mathbf{q}) = 1$. Όπότε, πράγματι,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} [F(\mathbf{q})]^2$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.23 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 [F(\mathbf{q})]^2$$

Οπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \to 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το ‘‘ηλεκτρόνιο’’ με spin=0;

Το $F(\mathbf{q}=0)=1$. Για μικρές τιμές του $|\mathbf{q}|$ μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό

$$F(\mathbf{q}) = \int \left(1 - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2} + \dots\right) \rho(\mathbf{x})\, d^3x$$

Αν $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$, δηλαδή σφαιρικά συμμετρική, ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, γιατί επιλλέγοντας $\mathbf{q} = (0,0,q)$, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} = qz = qr\cos\theta$ και $d^3x = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$

$$\int \mathbf{q}\cdot\mathbf{x}\rho(\mathbf{x})\, d^3x = \int qr\cos\theta\rho(r)r^2\sin\theta d\theta d\phi dr$$

Αλλά

$$\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

Ο τρίτος όρος γίνεται

$$-\int \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2}\rho(r)d^3x = -\frac{1}{2}\int \sum_i (q_i x_i)^2 \rho(r) d^3x$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\frac{1}{3}\int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\rho(r)\, d^3x = \int x_i^2 \rho(r)\, d^3x, \quad i = 1,2,3$$

οπότε

$$-\frac{1}{2}\int \sum (q_i^2 x_i^2)\rho(r) d^3x = -\frac{1}{2}\int (q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_1^2 + q_3^2 x_1^2)\rho(r) d^3x =$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sum q_i^2\right)\int x_1^2 \rho(r) d^3x = -\frac{1}{2}\left(\sum q_i^2\right)\int \frac{1}{3}\left(\sum x_i^2\right)\rho(r) d^3x =$$
$$-\frac{1}{6}\,\mathbf{q}^2 \int r^2 \rho(r) d^3x = -\frac{1}{6}\,\mathbf{q}^2 < r^2 >$$

όπου $< r^2 >$ είναι η μέση τιμή του r^2. Οπότε

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6}\,\mathbf{q}^2 < r^2 >$$

Δηλαδή, για μικρό $|\mathbf{q}|$, η σκέδαση μετρά ακριβώς αυτή τη μέση τιμή του r^2. Το μικρό μήκος κύματος του φωτονίου μπορεί να ξεχωρίσει μόνο τον συνολικό όγκο του φορτίου $\rho(r)$.

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr}, δείξτε ότι ο παράγοντας μορφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Παράγοντες μορφής του πρωτονίου

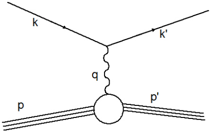
Δύο είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν το πρωτόνιο-στόχος από τα προηγούμενα: το πρωτόνιο δεν είναι ''στατικό'' και το πρωτόνιο έχει μαγνητική ροπή. Αν, παρ΄ όλα αυτά, το πρωτόνιο ήταν σημειακό με μαγνητική ροπή a la Dirac ίση με $e/2M$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο που είχαμε βρεί για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου, βάζοντας M την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

όπου

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά όπως με την σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου, θα γράφαμε



$$T_{fi} = -i\int j_\mu\left(-\frac{1}{q^2}\right)J^\mu\, d^4x$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και θεωρώντας πια το πρωτόνιο ως ΜΗ σημειακό

$$j_\mu = -e\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)e^{-i(k-k')x}$$

$$J^\mu = e\bar{u}(p')[\ldots]u(p)e^{-i(p-p')x}$$

Ακριβώς, γράφοντας [...] δείχνουμε ότι το πρωτόνιο δεν είναι σημειακό και δεν μπορούμε απλά να γράψουμε γ^μ. Παρ' όλα αυτά, το J^μ θα πρέπει να είναι ένα τετραδιάνυσμα, και επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή ενός τετραδιανύσματος χρησιμοποιώντας τις ορμές p, p' και q καθώς και τους γ πίνακες. Μπορούμε, τελικά, να φτιάξουμε δύο ανεξάρτητες ποσότητες: μια ανάλογη του γ^μ και μια δεύτερη ανάλογη του $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το [...] στο J^μ είναι $(q = p' - p)$

$$F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3 i\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu + F_4 q^\mu + F_5 (p+p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2

Οπότε, γράφουμε

$$[...] = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \tag{24}$$

όπου κ είναι η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου. Προσέξτε ότι το q^2 είναι η μόνη ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή στην κορυφή του πρωτονίου ($p^2 = p'^2 = M^2$). Επίσης, το $p \cdot q$ δεν είναι ανεξάρτητο μιας και
$(q+p)^2 = p'^2 \to M^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 \to 2p \cdot q = -q^2$. Αν το $q^2 \to 0$, δηλαδή όταν το φωτόνιο έχει μεγάλο μήκος κύματος, δεν μπορούμε να διακρίνουμε δομή στο πρωτόνιο και παρατηρούμε σωματίδιο με φορτίο e και μαγνητική ροπή $(1+\kappa)/2M$. Πειραματικά, το $\kappa = 1.79$. Θυμηθείτε ότι

$$e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{e}{2M}\bar{u}(p')(p+p')^\mu u(p) + \frac{e}{2M}\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p)$$

Οπότε, ο όρος γ^μ στην Εξ.24 περιέχει την ``κανονική'' ροπή ενώ ο άλλος όρος προσφέρει την ανώμαλη ροπή του πρωτονίου, και θα πρέπει να επιλέξουμε, σ' αυτό το όριο,

$$F_1(q^2 \to 0) = 1, \qquad F_2(q^2 \to 0) = 1$$

Για το νετρόνιο, οι αντίστοιχες τιμές είναι $F_1(q^2 \to 0) = 0$, $F_2(q^2 \to 0) = 1$ και $\kappa_n = -1.91$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν, για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής την Εξ.(24), θα πάρουμε

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2}F_2^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\left(F_1 + \kappa F_2\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Αυτή είναι η σχέση Rosenbluth. Αποτελεί μια παραμετροποίηση της άγνοιάς μας για την δομή του πρωτονίου. Παρατηρήστε ότι για $F_1 = 1$ και $\kappa = 0$ καταλήγουμε στην σκέδαση από σημειακό στόχο. Πειραματικά οι παράγοντες μορφής μετριούνται σε σκέδαση (συνάρτηση της γωνίας σκέδασης του ηλεκτρονίου).

Στην πράξη χρησιμοποιούνται δύο γραμμικοί συνδυασμοί των F

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2, \qquad G_M = F_1 + \kappa F_2$$

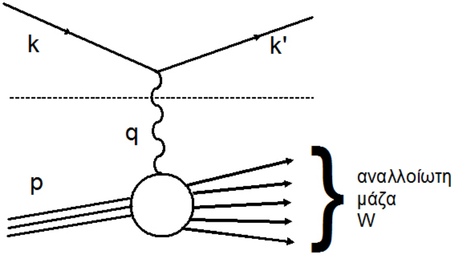
και η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

με $\tau = -q^2/2M$. Προσέξτε ότι με αυτήν την αλλαγή δεν υπάρχουν όροι ανάλογοι του $G_M G_E$.

Ανελαστική Σκέδαση $ep \to eX$

Τι γίνεται όταν μεγαλώσει η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο; Δηλαδή όταν το $-q^2$ είναι μεγάλο. Για μεσαία $-q^2$ παρουσιάζονται διάφορα σωματίδια-συντονισμοί (resonances): $ep \to e\Delta^+ \to ep\pi^0$. Σ' αυτήν την περίπτωση η αναλλοίωτη μάζα των προϊόντων $W^2 \simeq M_\Delta^2$. Για πιο μεγάλη μεταφερόμενη ενέργεια το πρωτόνιο ''σπάει'' και χρειαζόμαστε ένα καινούργιο φορμαλισμό για να περιγράψουμε το γεγονός.



Στην ελλαστική σκέδαση αντικαταστήσαμε, στο αναλλοίωτο πλάτος, το $\bar{u}\gamma^\mu u$ του μιονίου με $\bar{u}\Gamma^\mu u$ και χρησιμοποιήσαμε την πιο γενική μορφή για το Γ^μ. Τώρα ούτε αυτό γίνεται. Θα πρέπει να πάμε άμεσα στην ενεργό διατομή (δηλαδή στο τετραγωνισμένο αναλλοίωτο πλάτος) και αντί

$$d\sigma = L^{(e)}_{\mu\nu} \left(L^{(\mu)}\right)^{\mu\nu}$$

που ισχύει για την περίπτωση του μιονίου, να γράψουμε

$$d\sigma = L^{(e)}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

Το λεπτονικό κομμάτι παραμένει το ίδιο. Το $W^{\mu\nu}$ παραμετροποιεί την συνολική μας άγνοια για την μορφή του ρεύματος στην μεριά του πρωτονίου. Και πάλι θα πρέπει να γράψουμε το $W^{\mu\nu}$ με την πιο γενική μορφή χρησιμοποιώντας τα p^μ, q^μ και το $g^{\mu\nu}$. Προσέξτε ότι $p' = p + q$ και επίσης δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γ πίνακες μιας και γράφουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους όπου έχουμε αθροίσει στα spin. Επομένως γράφουμε

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)$$

Κρατήσαμε το $W^{\mu\nu}$ συμμετρικό στους δείκτες μιας και το $L^{(e)}_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικό. Κάθε μη συμμετρικό κομμάτι του $W^{\mu\nu}$ δεν θα συνεισέφερε στο $d\sigma$. Τα W θα εξαρτώνται από τα μόνο δύο βαθμωτά μεγέθη που σχετίζονται με την κορυφή του πρωτονίου. Μπορούμε να επιλέξουμε τα

$$q^2 \quad \text{και} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

Η αναλλοίωτη μάζα της τελικής κατάστασης συνδέεται με τις δύο παραπάνω μεταβλητές

$$W^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 + 2M\nu + q^2$$

Η διατήρηση του ρεύματος οδηγεί στις σχέσεις

$$q^\mu L^{(e)}_{\mu\nu} = q^\nu L^{(e)}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{και} \quad q^\mu W^{(e)}_{\mu\nu} = q^\nu W^{(e)}_{\mu\nu} = 0$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν σε συσχέτιση μεταξύ των τεσσάρων διαφορετικών W. Οπότε, ξαναγράφουμε

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)$$

Άσκηση 45 Δείξτε ότι η διατήρηση του ρεύματος στην αδρονική κορυφή (δηλαδή $q^\nu W_{\mu\nu} = 0$) οδηγεί στις σχέσεις

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2, \qquad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 W_2$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα W_1 και W_2 εξαρτώνται από τα q^2 και ν. Συνήθως χρησιμοποιούνται, αντ' αυτών, οι x και y

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

όπου k η (τετρ)ορμή του εισερχόμενου ηλεκτρονίου.
Υπολογίζουμε τώρα την ενεργό διατομή $ep \to eX$.

$$L^{\mu\nu}_{(e)} W_{\mu\nu} = 4W_1(k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} \left(2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k' \right)$$

$$\left| L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \right|_{\mathrm{lab}} = 4EE' \left[W_2 \cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2\frac{\theta}{2} \right]$$

Άσκηση 46 Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Τελικά η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left.\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}} \left[W_2(\nu, q^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \right] \tag{25}$$

Περίληψη για τον φορμαλισμό σκέδασης ep

Η τελευταία σχέση γράφεται

$$\left.\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}\left| L^{\mu\nu}_{(e)} W_{\mu\nu} \right|_{\text{lab}} \qquad (26)$$

όπου

$q^2 = (k-k')^2 = -2k\cdot k' = -2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Θυμόμαστε ότι για $e\mu \to e\mu$ είχαμε

$$d\sigma = \frac{1}{4ME}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\frac{d^3p'}{(2\pi^3)2p_0'}\left[\frac{e^4}{q^4}L^{\mu\nu}_{(e)}L^{(\mu)}_{\mu\nu}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p')$$

Μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή (26) αν

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4ME}\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p')$$
$$\times < p,s|\tilde{J}^\dagger_\mu|p',s' >< p',s'|\tilde{J}_\nu|p,s >$$

όπου

$$< p', s'|\tilde{J}_\nu|p, s >= \bar{u}_{p'}^{(s')}\gamma_\nu u_p^{(s)}$$

Αν αντί αυτού γράψουμε

$$< p', s'|\tilde{J}_\nu|p, s >= F_1(q^2)\gamma_\nu + \frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q_\nu$$

θα πάρουμε τον τύπο της ελαστικής σκέδασης *ep*. Γενικεύοντας, λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε για την περίπτωση που το πρωτόνιο ''σπάει'' και έχουμε παρουσία N σωματιδίων

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4ME}\sum_N \left(\frac{1}{2}\sum_s\right)\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d^3p'_n}{(2\pi)^3 2E'_n} \times \sum_{s_n} < p, s|\tilde{J}_\mu^\dagger|X >< X|\tilde{J}_\nu|p, s > (2\pi)^4\delta^{(4)}(p + q - \sum_n p'_n)$$

Έτσι, η ενεργός διατομή γράφεται γενικά

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}4EE'\,[...] = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4}\,[...]$$

όπου

$$[...] = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right), \text{ για } e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

$$[...] = \left(\frac{G_E^2 + G_M^2}{1+\tau}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right), \quad \text{για } e^-p \to e^-p$$

$$[...] = W_2(\nu, q^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2)\sin^2\frac{\theta}{2}, \text{ για } e^-p \to e^-X$$

όπου $\tau = -q^2/4M$. Αν ολοκληρώσουμε τις δύο πρώτες ως προς E' χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δ, θα πάρουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\,[...]$$

Βάθμιση Bjorken και το πρότυπο των παρτονίων

Χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2EE'(1 - \cos\theta), \quad \nu = E - E'$$

έχουμε (θεωρώντας αζιμουθιακή συμμετρία, οπότε $\int d\phi = 2\pi$)

$$d\Omega = 2\pi d(\cos\theta), \quad (\cos\theta = (-1, 1))$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial E'} = -1, \quad \frac{\partial\nu}{\partial\cos\theta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial E'} = 2E(1 - \cos\theta), \quad \frac{\partial Q^2}{\partial\cos\theta} = -2EE'$$

$$d\nu dQ^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial\nu}{\partial E'} & \frac{\partial\nu}{\partial\cos\theta} \\ \frac{\partial Q^2}{\partial E'} & \frac{\partial Q^2}{\partial\cos\theta} \end{pmatrix} \right| dE' d(\cos\theta) = 2EE' dE' d(\cos\theta)$$

η Εξ.(25) γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{EE'}\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Ο Bjorken πρότεινε ότι στο όριο

$$\left.\begin{array}{l} Q^2 \to \infty \\ \nu \to \infty \end{array}\right\} \quad \text{με } x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \text{σταθερό}$$

οι συναρτήσεις W γίνονται

$$MW_1(Q^2,\nu) \to F_1(x), \quad \nu W_2(Q^2,\nu) \to F_2(x)$$

πράγμα που τα πειραματικά δεδομένα το επιβεβαιώνουν.
Σημαντικό στοιχείο της υπόθεσης του Bjorken είναι ότι στο όριο αυτό, οι συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι πεπερασμένες.

Πώς καταλαβαίνουμε αυτήν την βάθμιση;
Ο Feynman πρότεινε να θεωρήσουμε ελαστική σκέδαση με σημειακά φορτία (παρτόνια) που βρίσκονται μέσα στο πρωτόνιο. Το φωτόνιο μπαίνει βαθιά και βλέπει εσωτερική δομή στο πρωτόνιο.
Αν γράψουμε $p_i^\mu = xP^\mu$ (και $m_i \simeq xM$), δηλαδή ότι το παρτόνιο i έχει κάποιο κλάσμα της ορμής του πρωτονίου, ελαστική σκέδαση του ηλεκτρονίου με το παρτόνιο φορτίου e_i θα δίνει

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{EE'}\left[e_i^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2e_i^2\frac{Q^2}{4m_i^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

που θα πρέπει να συγκριθεί με την

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{EE'}\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Άρα θα πρέπει η συνεισφορά στα W_1 και W_2 από ένα είδος παρτονίου να είναι

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4xM^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$
$$W_2^i = e_i^2 \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

Για $Q^2, \nu \to \infty$ θεωρούμε ότι οι συνεισφορές των παρτονίων αθροίζονται ασύμφωνα (incoherently). Άρα, αθροίζουμε για όλα τα είδη των παρτονίων και ολοκληρώνουμε για όλα τα $x = (0, 1)$. Βέβαια, το ολοκλήρωμα στα x θα πρέπει να έχει και κάποια συνάρτηση βάρους $f_i(x)$ για κάθε είδος παρτονίου. Αυτές οι συναρτήσεις, που καλούνται κατανομές πιθανότητας, δεν προβλέπονται από αυτό το πρότυπο. Επομένως,

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

και επειδή

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left|\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}}, \quad \text{με } g(x_0) = 0$$

θα έχουμε

$$\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right) = \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right)\left(\frac{Q^2}{2Mx_0^2}\right)^{-1} = \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right)\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

Επομένως,

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

όπου $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$.

Ανάλογα παίρνουμε

$$MW_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{2}\sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv F_1(x)$$

οπότε

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

Η τελευταία σχέση, σχέση Callan-Gross, είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ότι τα παρτόνια έχουν spin=1/2.

Το πρότυπο των κουάρκ-παρτονίων

Ας υποθέσουμε ότι τα παρτόνια είναι τα κουάρκ του Gell-Mann με τις γνωστές ιδιότητες (φορτίο, τιμή του βαριονικού αριθμού, της παραδοξότητας κ.λπ.). Τότε για την αλληλεπίδραση φωτονίου με τα κουάρκ του πρωτονίου, θα έχουμε

$$F_2^{ep}(x) = x\left[\frac{4}{9}\left(u(x) + \bar{u}(x)\right) + \frac{1}{9}\left(d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)\right)\right]$$

με $u(x)$, $d(x)$, $s(x)$, ... η κατανομή πιθανότητας για κάθε ένα από αυτά. Ίσως φαίνεται ότι αντικαταστήσαμε μια άγνωστη ποσότητα, F_2, από έξι άγνωστες ποσότητες! Αλλά, οι ίδιες ποσότητες παρουσιάζονται, με διαφορετικούς συνδυασμούς βέβαια, για στόχο νετρονίων (αντί πρωτονίων) ή, ακόμα, για χρήση νετρίνων και αντινετρίνων αντί φωτονίων. Για παράδειγμα, για στόχο νετρονίων (χρησιμοποιώντας την διατήρηση του isospin) μπορούμε να γράψουμε για το νετρόνιο

$$u^{(n)}(x) = d^{(p)}(x) \equiv d(x), \qquad d^{(n)}(x) = u^{(p)}(x) \equiv u(x)$$

οπότε

$$F_2^{en}(x) = x\left[\frac{4}{9}\left(d(x) + \bar{d}(x)\right) + \frac{1}{9}\left(u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)\right)\right]$$

Μιας και όλες οι συναρτήσεις πιθανότητας πρέπει να είναι θετικές, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \leq 4$$

σχέση που επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

Άσκηση 47 Αποδείξτε την παραπάνω σχέση.

Επίσης, για το πρωτόνιο και το νετρόνιο με παραδοξότητα 0, θα ισχύει

$$\int_0^1 dx\ [s(x) - \bar{s}(x)] = 0$$

Από το φορτίο του πρωτονίου και του νετρονίου έχουμε τις σχέσεις

$$\int_0^1 dx\ \left[\frac{2}{3}(u-\bar{u}) - \frac{1}{3}(d-\bar{d})\right] = 1, \quad \text{για το πρωτόνιο}$$

$$\int_0^1 dx\ \left[\frac{2}{3}(d-\bar{d}) - \frac{1}{3}(u-\bar{u})\right] = 0, \quad \text{για το νετρόνιο}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις παίρνουμε τις

$$\int_0^1 dx\ [u-\bar{u}] = 2$$

$$\int_0^1 dx\ \left[d-\bar{d}\,\right] = 1$$

που ακριβώς δείχνει την περίσσεια των κουάρκ u και των κουάρκ

Ακόμα μια ενδιαφέρουσα σχέση πηγάζει από το γεγονός ότι $xf_i(x)$ είναι το κλάσμα της ορμής που μεταφέρει το κουάρκ i. Οπότε

$$\int_0^1 dx\, x \left[u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}\right] = 1 - \epsilon$$

όπου με ϵ δηλώνουμε το κλάσμα της ορμής του πρωτονίου που δεν μεταφέρεται από τα κουάρκ. Πειραματικά το $\epsilon \sim 1/2$, που υποδηλώνει ότι μεγάλο κλάσμα της ορμής μεταφέρεται από αφόρτιστα αντικείμενα. Κατά την Κβαντική Χρωμοδυναμική, τα αντικείμενα αυτά είναι τα γκλουόνια.

Μπορούμε να πάρουμε και άλλους τέτοιους κανόνες αν προχωρήσουμε σε θεωρητικά πρότυπα για τις κατανομές των κουάρκ. Έτσι, εισάγουμε την έννοια για τα κουάρκ ''σθένους'' και τα κουάρκ ''θάλασσας''. Για παράδειγμα, για το πρωτόνιο οι κατανομές των κουάρκ u και d παραμετροποιούνται

$$u = u_v + q_s, \qquad d = d_v + q_s$$

ενώ για τα κουάρκ s και τα αντι-κουάρκ

$$\bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s$$

Έτσι, οι έξι άγνωστες συναρτήσεις αντικαθίστανται από τρεις. Φυσικά, υπάρχουν παρεκλίσεις από την βάθμιση Bjorken και το απλό πρότυπο που περιγράψαμε παραπάνω, αλλά η ΚΧΔ δίνει απαντήσεις.

Οι συμμετρίες παίζουν πρωταρχικό ρόλο στη Φυσική. Για παράδειγμα, η αναλλοιώτητα σε γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων οδήγησε τον Einstein στην διατύπωση της Θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας. Πιστεύουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις στη φύση περιγράφονται από Θεωρίες Βαθμίδας. Η διατήρηση μεγεθών (όπως φορτίο, χρώμα κ.λπ.) τοπικά (local) συνδέονται άρρηκτα με αυτές.
Η σχέση συμμετρίας$\leftrightarrow$νόμος διατήρησης έχει συζητηθεί στην Λαγκρανζιανή θεώρηση. Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

όπου q_i οι γενικευμένες συντεταγμένες και $\dot{q}_i = dq_i/dt$ και η συνάρτηση Lagrange $L = T - V (= \text{Κινητ. Εν.} - \text{Δυναμ. Εν.})$.
Πηγαίνοντας από τα q_i στις $\phi(\mathbf{x}, t)$, παίρνουμε

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)$$

και οι εξισώσεις Lagrange γίνονται

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

όπου $\mathcal{L}$ η Λαγκρανζιανή πυκνότητα και $L = \int \mathcal{L}\, d^3x$. Αντί να γράφουμε τις εξισώσεις που διέπουν τα πεδία μας, γράφουμε την $\mathcal{L}$. Έτσι, για παράδειγμα η

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

δίνει την εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad \text{ή} \quad (\Box^2 + m^2)\phi = 0$$

Άσκηση 48 Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = 0$$

οδηγεί στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad \text{ή} \quad (\Box^2 + m^2)\phi = 0$$

Δεν υπάρχει τίποτα το μαγικό εδώ! Η Λαγκραντζιανή επιλέχτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να δίνει την εξίσωση Klein-Gordon.
Η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

δίνει την εξίσωση Dirac

$$(i\partial_{\mu}\gamma^{\mu} - m)\psi = 0$$

Άσκηση 49 Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

δίνει την εξίσωση Dirac

$$(i\partial_{\mu}\gamma^{\mu} - m)\psi = 0$$

Επίσης, η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^{\mu}A_{\mu}, \quad F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$$

δίνει τις εξισώσεις του Maxwell

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu}$$

Αν γράψουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^{\mu}A_{\mu} + \frac{1}{2}m^2 A_{\mu}A^{\mu}$$

θα πάρουμε την εξίσωση του φωτονίου ''με μάζα''

$$(\Box^2 + m^2)A_{\mu} = j_{\mu}$$

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στην Λαγκραντζιανή προσέγγιση και της διαταρακτικής μεθόδου με τα διαγράμματα Feynman; Σε κάθε Λαγκραντζιανή αντιστοιχούν ορισμένοι κανόνες Feynman. Αυτή η αντιστοιχία γίνεται ως εξής:
1. Σε κάθε όρο της Λαγκραντζιανής αντιστοιχούμε διαδότες και συντελεστές κορυφής.
2. Οι διαδότες προέρχονται από τους τετραγωνικούς όρους της Λαγκραντζιανής (π.χ. ϕ^2, $\bar{\psi}\psi$, $(1/2)(\partial_{\mu}\phi)^2$, $\bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi)$.
3. Οι άλλοι όροι της Λαγκραντζιανής αντιστοιχίζονται στις κορυφές αλληλεπίδρασης. Ο συντελεστής της κορυφής είναι ο συντελεστής του αντίστοιχου όρου της Λαγκραντζιανής.

Ακολουθούμε τον κλασικό τρόπο προσέγγισης. Η κλασική Λαγκραντζιανή κβαντίζεται. Τα πεδία γίνονται τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Οι αλληλεπιδράσεις υπολογίζονται μέσω της θεωρίας διαταραχών. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας μεταφράζεται σε ένα σύνολο κανόνων Feynman. Μέσω αυτών μπορούμε να ελέγχουμε τις φυσικές διεργασίες που περιγράφει μια Λαγκραντζιανή. Εδώ δεν θα ακολουθήσουμε τον "κανονικό φορμαλισμό". Θα ακολουθήσουμε την πεποίθηση ότι τα "διαγράμματα Feynman περιγράφουν πολλά περισσότερα από ό,τι ένας απλός φορμαλισμός" (t'Hooft και Veltman).

Θεώρημα Noether. Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

Γνωρίζουμε ότι η αναλλοιώτητα σε χωρική μετάθεση οδηγεί στη διατήρηση ορμής, η αναλλοιώτητα σε στροφές οδηγεί στη διατήρηση της στροφορμής και η αναλλοιώτητα σε μετάθεση στο χρόνο οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας. Εδώ, θα ενδιαφερθούμε για εσωτερικές συμμετρίες. Μετασχηματισμοί που μετατίθενται με την χωροχρονική εξάρτηση της κυματοσυνάρτησης.

Για παράδειγμα, η Λαγκραντζιανή που περιγράφει το ηλεκτρόνιο

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

παραμένει αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$$

Πράγματι, πολύ εύκολα φαίνεται ότι

$$\bar{\psi}(x) \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x), \quad \partial_\mu\psi \to e^{i\alpha}\partial_\mu\psi(x)$$

Οι οικογένεια των μετασχηματισμών φάσης $U(a) = e^{i\alpha}$ αποτελεί την μονοπαραμετρική αβελιανή ομάδα που συμβολίζεται με $U(1)$. Ο όρος Αβελιανή αναφέρεται στην αντιμεταθετικότητα

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1)$$

Ενώ αυτός ο μετασχηματισμός φαντάζει απλοϊκός, έχει τεράστια σημασία. Η αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς $U(1)$, οδηγεί στην διατήρηση του ρεύματος. Ας πάρουμε απειροστό μετασχηματισμό

$$U(\alpha) = 1 + i\alpha, \quad \psi \to (1 + i\alpha)\psi, \quad \partial_\mu\psi \to (1 + i\alpha)\partial_\mu\psi$$

Αναλλοιώτητα σημαίνει $\delta\mathcal{L}=0$. Οπότε

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi)+\delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}+\delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}=$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi)+(-i\alpha\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}+(-i\alpha\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}=$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi)-\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right]i\alpha\psi+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right]i\alpha-$$

$$-i\alpha\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}+i\alpha\bar{\psi}\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)\right]-i\alpha\partial_\mu\left[\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right]=$$

$$=i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right]\psi+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right]i\alpha-$$

$$-i\alpha\bar{\psi}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right]-i\alpha\partial_\mu\left[\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right]=$$

$$=(i\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi-\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right]$$

Η πρώτη και η τρίτη αγκύλη μηδενίζονται (Εξίσωση Lagrange). Επομένως, η απαίτηση $\delta\mathcal{L} = 0$ οδηγεί στη σχέση

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

όπου το ρεύμα

$$j^\mu = \frac{ie}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Η σταθερά εκλέγεται κατάλληλα ώστε το ρεύμα να συμπίπτει με την ηλεκτρομαγνητική πυκνότητα ρεύματος για το ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$. Άμεσα έπεται ότι το φορτίο

$$Q = \int d^3x\, j^0$$

είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα λόγω της αναλλοιώτητας φάσης $U(1)$

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x\, \partial_0 j_0 = \int d^3x\, (\partial_\mu j^\mu - \nabla\mathbf{j}) = -\int d^3x\, \nabla\mathbf{j} = 0$$

όπου η διατήρηση του ρεύματος δίνει $\partial_\mu j^\mu = 0$, ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, μετατρέποντας το σε επιφανειακό ολοκλήρωμα του ρεύματος και θεωρώντας ότι το ρεύμα μηδενίζεται πηγαίνοντας την επιφάνεια στο άπειρο.
Για την Λαγκραντζιανή ενός μιγαδικού βαθμωτού πεδίου

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi \phi^*$$

με μια διαδικασία τελείως ανάλογη με αυτή που κάναμε για το πεδίο Dirac, το διατηρησιμο ρεύμα, λόγω της αναλλοιώτητας σε $U(1)$, είναι

$$j^\mu = (ie)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\phi^*\right]$$

που δίνει

$$j^\mu = -ie\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right)$$

Προσέξτε ότι η Λαγκραντζιανή για το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, γράφεται

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2)$$

με $\mathcal{L}(\phi_i)$ η Λαγκραντζιανή του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Ο μετασχηματισμός $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ σημαίνει ότι το α ΔΕΝ είναι μετρήσιμο, ΔΕΝ έχει φυσική σημασία και η τιμή του μπορεί να διαλεχτεί αυθαίρετα, φυσικά την ίδια για όλα τα σημεία του χωροχρόνου. Μιλάμε για μια ''ολική βαθμίδα'' (global gauge).

Τοπική $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας και ΚΗΔ

Αναγάγουμε την φάση α σε συνάρτηση του x. Οπότε έχουμε τον λεγόμενο ''τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας''

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi \quad \text{και} \quad \bar{\psi}(x) \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός ΔΕΝ αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Πράγματι, ο δεύτερος όρος παραμένει αναλλοίωτος αλλά ο πρώτος όχι, μιας και

$$\partial_{\mu}\psi \to e^{i\alpha(x)}\partial_{\mu}\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_{\mu}\alpha(x)$$

Αν επιμένουμε να ζητάμε την αναλλοιώτητα της Λαγκραντζιανής κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, θα πρέπει να βρούμε μια ''κατάλληλη'' (συναλλοίωτη) παράγωγο που να μετασχηματίζεται

$$D_\mu\psi \to e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi$$

Για να το επιτύχουμε αυτό εισάγουμε ένα νέο πεδίο A_μ και ορίζουμε

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

απαιτώντας το νέο πεδίο να μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Τότε βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\,\psi \to & e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) \\ & - (ie)e^{i\alpha(x)}A_\mu\psi - ie\,\frac{1}{e}\,e^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) = \\ & = e^{i\alpha(x)}\,(\partial_\mu - ieA_\mu)\,\psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \end{aligned}$$

Οπότε, η νέα αναλλοίωτη Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}D_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

Υποχρεωθήκαμε λοιπόν στην εισαγωγή του **πεδίου βαθμίδας** A_μ, που αλληλεπιδρά με το ψ όπως ακριβώς το φωτόνιο. Αν το A_μ είναι φυσικό πεδίο, χρειάζεται και κινητικό όρο. Ο όρος αυτός είναι $(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, που είναι αναλλοίωτος κάτω από τον μετασχηματισμό του A_μ. Έτσι, καταλήγουμε στην Λαγκραντζιανή της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (ΚΗΔ)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Παρουσία μάζας για το A_μ αντιστοιχεί στον όρο $M^2 A^\mu A_\mu$ που όμως δεν παραμένει αναλλοίωτος στον μετασχηματισμό του A_μ. Το φωτόνιο δεν μπορεί να έχει μάζα.

Περιμέναμε την εμφάνιση ενός νέου πεδίου. Αν αλλάξουμε τη φάση ($\alpha(x)$) τοπικά, θα δημιουργούσε μια μετρήσιμη διαφορά φάσης, αν δεν μπορούσε να αντισταθμιστεί. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτό το αντιστάθμισμα γίνεται από το A_μ. Περιμένουμε επίσης το πεδίο αυτό να έχει άπειρη ακτίνα δράσης (το φωτόνιο άμαζο), μιας και το αντιστάθμισμα πρέπει να γίνει σε όλα τα σημεία του χωροχρόνου.

Συμπερασματικά, απαιτώντας αναλλοιώτητα σε τοπική αλλαγή φάσης της ελεύθερης Λαγκραντζιανής, οδηγούμαστε σε μια θεωρία με αλληλεπιδράσεις, την ΚΗΔ. Αυτό που φάνταζε σαν μια παραξενιά της θεωρίας του Maxwell, γίνεται τώρα σημαντικό στοιχείο.

Μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας και Κβαντική Χρωμοδυναμική

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική βασίζεται στην ομάδα $SU(3)$. Η ελεύθερη Λαγκραντζιανή είναι

$$\mathcal{L} = \bar{q}_j \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) q_j, \quad \text{όπου} \quad j = 1, 2, 3, \ \text{τα τρία χρώματα}$$

Θα συγκεντρωθούμε προς στιγμή σε μια ''γεύση'' κουαρκ. Ο μετασχηματισμός του πεδίου $q(x)$ είναι τώρα

$$q(x) \to Uq(x) = e^{i\alpha_j(x) T_j} q(x)$$

όπου U είναι ένας μοναδιακός (unitary) 3×3 πίνακας. Οι πίνακες T_j είναι οι 8 γενήτορες της $SU(3)$ $(j = 1, 2, ..., 8)$ και α_j οι παράμετροι του μετασχηματισμού.

Άσκηση 50 Για μοναδιακό μετασχηματισμό ($U^\dagger U = 1$), ισχύει ότι $\det U = e^{i\phi}$ με $\phi \in \mathbb{R}$. Αν περιοριστούμε στους μοναδιακούς πίνακες με $\det U = +1$ (ειδικούς μοναδιακούς, special unitary), τότε $\mathrm{Tr}(T_j) = 0$, και $\alpha_i T_j = \alpha_j^* T_j^\dagger$.

Η ομάδα $SU(3)$ δεν είναι αβελιανή

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$$

όπου f_{ijk} είναι οι σταθερές δομής (structure constants) της ομάδας. Οι σταθερές αυτές είναι πραγματικές και πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k.

Άσκηση 51 Δείξτε ότι οι σταθερές αυτές είναι πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k.

Θεωρώντας απειροστούς μετασχηματισμούς, παίρνουμε

$$q(x) \to (1 + i\alpha_j(x) T_j)\, q(x)$$
$$\partial_\mu q(x) \to (1 + i\alpha_j(x) T_j)\, \partial_\mu q(x) + iT_j q(x) \partial_\mu \alpha_j$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην ΚΗΔ, θα εισάγουμε 8 νέα πεδία G_j^μ που μετασχηματίζονται

$$G_j^\mu \to G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \alpha_j$$

και θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + igT_j G_j^\mu$$

Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

Ας δούμε πώς μετασχηματίζεται κάθε όρος

$$\begin{aligned} m\bar{q}q &\to m\bar{q}\left(1 - i\alpha_j(x)T_j\right)\left(1 + i\alpha_i(x)T_i\right)q = m\bar{q}q + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q &\to i\bar{q}\left(1 - i\alpha_i(x)T_i\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(1 + i\alpha_j(x)T_j\right)q = \\ &= -i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q - \bar{q}\gamma^\mu T_j q\partial_\mu\alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu \to -g\bar{q}\left(1 - i\alpha_i(x)T_i\right)\gamma_\mu T_j \left(1 + i\alpha_m(x)T_m\right) q\cdot \\
\cdot\left(G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \alpha_j\right) = \\
= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu - ig\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu [T_j, T_m] q G_j^\mu - \\
+ g\,\frac{1}{g}\,\bar{q}\gamma_\mu T_j q \partial^\mu \alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\
= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu + \underline{g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu} - \\
+ \bar{q}\gamma_\mu T_j q \partial^\mu \alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

Βλέπουμε ότι μας μένει ο όρος $g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu$ που χαλάει την αναλλοιώτητα. Αλλά, αν αναβαθμίσουμε το μετασχηματισμό του πεδίου βαθμίδας

$$
G_j^\mu \to G_j^\mu - \frac{1}{g}\,\partial^\mu \alpha_j - f_{jms}\alpha_m G_s^\mu
$$

στον μετασχηματισμό του όρου $-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu$ θα εμφανιστεί ο επιπλέον όρος

$$
g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jms} T_j q G_s^\mu
$$

Κάνοντας την αλλαγή στους ‘‘τυφλούς’’ δείκτες $j \to r$ και $s \to j$, παίρνουμε

$$g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{rmj} T_r q G_j^\mu = -g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $f_{rmj} = -f_{jmr}$. Οπότε, βλέπουμε ότι ο όρος που χαλούσε την αναλλοιώτητα εξαλείφεται. Βέβαια, στην Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

θα πρέπει να προσθέσουμε τον κινητικό όρο του πεδίου βαθμίδας, τον αντίστοιχο του $-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu - \frac{1}{4}G_j^{\mu\nu}G_{\mu\nu j}$$

όπου όμως, ο αναβαθμισμένος μετασχηματισμός του πεδίου βαθμίδας μας υποχρεώνει να ορίσουμε

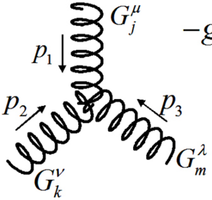
$$G_j^{\mu\nu} = \partial^\mu G_j^\nu - \partial^\nu G_j^\mu - g f_{jrs} G_r^\mu G_s^\nu$$

Η παραπάνω Λαγκραντζιανή περιγράφει ‘‘έγχρωμα’’ κουάρκ και γκλουόνια και είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς της ομάδας $SU(3)$. Τα γκλουόνια είναι και πάλι άμαζα.

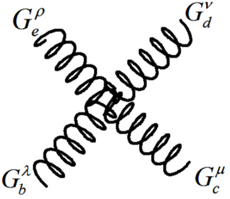
Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)q - \frac{1}{4}G_j^{\mu\nu}G_{\mu\nu j}$$

Ποιο είναι το καινούργιο στοιχείο με τα γκλουόνια; Ο κινητικός όρος περιέχει όρο αυτο-αλληλεπίδρασης μεταξύ των γκλουονίων: $gGGG$ και g^2GGGG.



$$-gf_{jkm}[(p_1 - p_2)_{\lambda}\, g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_{\mu}\, g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_{\nu}\, g_{\mu\lambda}]$$



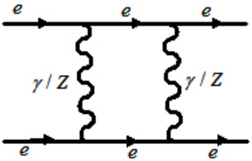
$$-ig^2[f_{abc}f_{ade}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + f_{adc}f_{abe}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f_{abd}f_{ace}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} - g_{\nu\mu}g_{\lambda\rho})]$$

Μη αβελιανές θεωρίες - Yang-Mills θεωρίες

Η μικρή ακτίνα δράσης των ασθενών αλληλεπιδράσεων μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα σωματίδια υπεύθυνα για αυτήν την αλληλεπίδραση (τα αντίστοιχα σωματίδια βαθμίδας) πρέπει να έχουν μάζα, πράγμα που δεν επιτρέπεται στις θεωρίες βαθμίδας (Θ.Β.). Οπότε, η εισαγωγή των Θ.Β. ήταν από ομορφιά μόνο; Μπορούμε να αγνοήσουμε τις Θ.Β. και να βάλουμε όρο μάζας, για π.χ. $M^2 W^\mu W_\mu$, στην Λαγκραντζιανή; Αν το εφαρμόσουμε, θα συναντήσουμε απειρίες στους υπολογισμούς μας που δεν μπορούμε ούτε να ''διώξουμε'' ούτε να ''κρύψουμε''.

Στο παρακάτω διάγραμμα ''ενός βρόχου'', αν τα σωματίδια με την κυματιστή γραμμή είναι φωτόνια, κάθε διαδότης του φωτονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q^2$ ενώ κάθε διαδότης του ηλεκτρονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q$, όπου q είναι η ορμή στο βρόχο που είναι ελεύθερη (μετά την διατήρηση της ορμής σε κάθε κορυφή), οπότε και θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την ορμή αυτή: $\int d^4q$

$$\int d^4q \, \frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{\not{q} + m} \frac{1}{\not{q} + m}$$



Για μεγάλα q το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα.
Αν όμως αντί φωτόνια έχουμε σωματίδια με μάζα, ο διαδότης είναι

$$\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{q^2 - M^2} \overset{q\to\infty}{\longrightarrow} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2}$$

οπότε, το διάγραμμα θα δίνει

$$\int d^4q \, \frac{1}{\not{q} + m} \frac{1}{\not{q} + m} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2} \frac{q_\rho q_\sigma}{M^2 q^2}$$

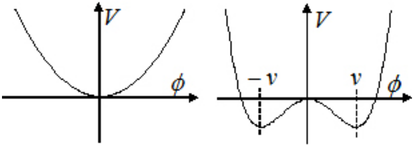
Το ολοκλήρωμα όμως τώρα αποκλίνει για μεγάλα q. Βέβαια, θα μπορούσαμε να βάλουμε ένα πάνω όριο στο ολοκλήρωμα, ως μια παράμετρο που θα μας δώσει το πείραμα. Αλλά, πηγαίνοντας σε διαγράμματα με περισσότερους βρόχους, οι απειρίες χειροτερεύουν και χρειαζόμαστε όλο και καινούργιες παραμέτρους. Μια τέτοια θεωρία ονομάζεται μη ‘‘ανακανονικοποιήσιμη’’ και δεν μπορεί να έχει προβλεψιμότητα.

Κρυμμένη συμμετρία - Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας

Ας θεωρήσουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

η οποία έχει μια συμμετρία $\phi \to -\phi$. Το λ θα πρέπει να είναι θετικό για να μπορούμε να έχουμε ελάχιστο. Για $\mu^2 > 0$, η Λαγκραντζιανή περιγράφει ένα βαθμωτό σωματίδιο με μάζα μ και αυτοαλληλεπιδράσεις. Η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας (ground state) είναι $\phi = 0$ και η κατάσταση αυτή υπακούει τη συμμετρία $\phi \to -\phi$. Για $\mu^2 < 0$, όμως, βλέπουμε ότι $\phi = 0$ δεν είναι ολικό ελάχιστο.



Πράγματι

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \to \phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$$

Εφαρμόζουμε θεωρία διαταραχών γύρω από ένα από τα ελάχιστα, επιλέγοντας το $\phi = +v$

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

όπου $\eta(x)$ περιγράφει τις κβαντικές διαταραχές γύρω από το ελάχιστο. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \text{σταθερά}$$

Ο δεύτερος όρος μας δείχνει ότι το η έχει μάζα

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Αλλά, η $\mathcal{L}$ και η $\mathcal{L}'$ είναι ισοδύναμες. Ένας μετασχηματισμός δεν μπορεί να αλλάξει τη φυσική που περιγράφει η Λαγκραντζιανή. Αν μπορούσαμε να ''λύσουμε'' πλήρως την $\mathcal{L}$ και την $\mathcal{L}'$ θα βρίσκαμε τα ίδια αποτελέσματα. Αλλά, στη θεωρία διαταραχών υπολογίζουμε διαταραχές γύρω από ένα ελάχιστο. Με την $\mathcal{L}$, η σειρά της θεωρίας διαταραχών δεν θα συνέκλινε γιατί θα αναπτύσαμε γύρω από ένα ασταθές ελάχιστο, $\phi = 0$.

Αυθόρμητη παραβίαση ολικής θεωρίας βαθμίδας

Η Λαγκραντζιανή για μιγαδικό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - \left(\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2\right) = \\ &= (\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2\end{aligned}$$

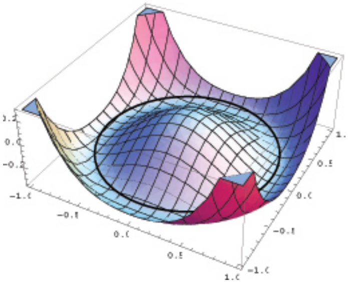
Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$, στο χώρο των (ϕ_1, ϕ_2) υπάρχει μια περιφέρεια $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\mu^2/\lambda \equiv v^2$ που η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη.

Σ' αυτήν την περιφέρεια, επιλέγουμε ένα σημείο

$$\phi_1 = v, \quad \text{και} \quad \phi_2 = 0$$

και γράφουμε το $\phi(x)$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,[v + \eta(x) + i\xi(x)]$$



όπου η είναι η "ακτινική" διαταραχή και ξ η διαταραχή στην κατεύθυνση της περιφέρειας του ελάχιστου, γύρω από το ελάχιστο που διαλέξαμε. Η Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 + \text{σταθερές} + (\text{κυβικοί όροι σε } \eta \text{ και } \xi)$$

βλέπουμε πάλι το πεδίο η να έχει μάζα $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$, αλλά το πεδίο ξ είναι άμαζο. Είναι το λεγόμενο ''μποζόνιο'' Goldstone. Επομένως, προσπαθώντας να παραβιάσουμε τη συμμετρία, επιλέγοντας το συγκεκριμένο ελάχιστο, δώσαμε μάζα σε ένα σωματίδιο αλλά μας μένει και ένα άμαζο. Το τελευταίο το περιμέναμε. Το ξ είναι στην διεύθυνση της περιφέρειας του ελάχιστου. Σ' αυτή τη διεύθυνση δεν υπάρχει ελάχιστο.
Το παράδειγμά μας είναι μια εφαρμογή του Θεωρήματος Goldstone, που αναφέρει ότι όποτε παραβιάζουμε αυθόρμητα μια ολική συμμετρία, εμφανίζονται άμαζα βαθμωτά πεδία. Επομένως, τι μπορεί να γίνει με την ασθενή αλληλεπίδραση, που τα σωματίδια βαθμίδας W και Z έχουν μάζα χωρίς την εμφάνιση άμαζων σωματιδίων;

Μηχανισμός Higgs

Πηγαίνουμε τώρα σε μια Λαγκραντζιανή που υπακούει μια τοπική συμμετρία βαθμίδας, $\phi(x) \to \exp[i\alpha(x)]\phi(x)$, και φυσικά χρειαζόμαστε την συναλλοίωτο παράγωγο $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ με $A_\mu \to A_\mu + (1/e)\partial_\mu \alpha(x)$. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Για $\mu^2 > 0$, αν εξαιρέσουμε το όρο $(\phi^*\phi)^2$, έχουμε την λεγόμενη ''βαθμωτή'' Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Για $\mu^2 < 0$ θα έχουμε αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας. Κάνοντας τα ίδια όπως και στην περίπτωση της ολικής συμμετρίας, θα πάρουμε

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 - \lambda v^2\eta^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\xi - \\ - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\text{όροι αλληλεπιδράσεων})$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_A = ev$$

αλλά υπάρχει και ένας ‘‘παράξενος’’ όρος, μη διαγώνιος: $-evA_\mu\partial^\mu\xi$. Ο λόγος είναι ότι το A_μ, αφού πήρε μάζα, απέκτησε (από 2) 3 βαθμούς ελευθερίας. Η $\mathcal{L}'$ δεν είναι ‘‘καλά’’ γραμμένη και μπερδεύει τις ανεξάρτητες καταστάσεις των πεδίων. Κατ' αρχή, αυτό δεν είναι κακό, αρκεί να μπορούμε να διακρίνουμε ποιες είναι οι φυσικές καταστάσεις.

Μπορούμε να βρούμε κάποιο συγκεκριμένη βαθμίδα, που να μας δείχνει εκπεφρασμένα αυτές τις φυσικές καταστάσεις;

Παρατηρήστε ότι

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta + i\xi) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v}$$

Επομένως, στην αρχική Λαγκραντζιανή επιλέγουμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\phi(x) \to \sqrt{\frac{1}{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta(x)$$

Επιλέγοντας αυτήν την βαθμίδα, περιμένουμε την ανεξαρτησία από το θ, μιας και είναι η φάση. Πράγματι, η νέα Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \\ + \frac{1}{2}e^2 h^2 A_\mu A^\mu + v e^2 h A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Το μποζόνιο Goldstone δεν εμφανίζεται πια. Ο βαθμός ελευθερίας του είναι ''πλαστός'' γιατί αντιστοιχεί στην ελευθερία του μετασχηματιστού βαθμίδας. Αυτός ο βαθμός ελευθερίας δόθηκε στο A_μ που τώρα έχει μάζα και έχει 3 βαθμούς ελευθερίας. Αυτός είναι ''ο μηχανισμός Higgs''.

Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας $SU(2)$

Ας πάρουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

με

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Απαιτώντας αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας της $SU(2)$

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha_j(x)\tau_j/2}\phi, \quad \text{όπου} \quad \tau_j \quad \text{οι πίνακες του Pauli}, j = 1, 2, 3$$

θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\frac{\tau_j}{2}W_j^\mu$$

Για απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\phi \to (1 + i\boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\tau}/2)\phi$$

$$\mathbf{W}_\mu \to \mathbf{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}_\mu$$

(θυμηθείτε ότι για την $SU(2)$ οι σταθερές δομής της ομάδας $f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$). Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\phi + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\mathbf{W}_\mu\phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu\phi + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\mathbf{W}^\mu\phi\right) - V(\phi) - \frac{1}{4}\mathbf{W}^{\mu\nu}\mathbf{W}_{\mu\nu}$$

με

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu - g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$$

$$V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$, το ελάχιστο του δυναμικού επιτυγχάνεται όταν

$$\phi^\dagger \phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Επιλέγουμε

$$\phi_1^2 = \phi_2^2 = \phi_4^2 = 0, \quad \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το ελάχιστο

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

και επιλέγοντας τη βαθμίδα

$$\phi(x) = e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

για απειροστούς μετασχηματισμούς πέρνουμε

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\theta_3/v & i(\theta_1 - i\theta_2)/v \\ i(\theta_1 + i\theta_2)/v & 1 - i\theta_3/v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 + i\theta_2 \\ v - h - i\theta_3 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα με αυτό που κάναμε στην πρηγούμενη περίπτωση.
Στην $\mathcal{L}'$, τα θ_1, θ_2 και θ_3 ''εξαφανίζονται'' και μένει μόνο το h.
Τα τρία θ έδωσαν το βαθμό ελευθερίας τους στα W_1, W_2 και W_3, που απέκτησαν μάζα.
Ποια είναι η μάζα των W; Αυτό θα το βρούμε από το τετραγωνικό όρο ως προς τα W

$$\left| ig\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^\mu \phi \right|^2 = \frac{g^2}{4} \left| \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \phi_0 \right|^2 = \\ = \frac{g^2 v^2}{8} \left[(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2 + (W_3^\mu)^2 \right]$$

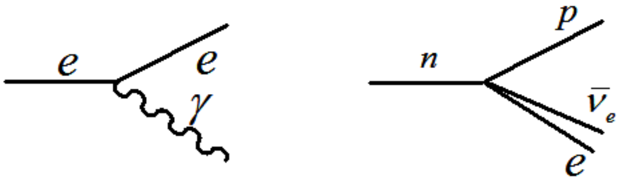
και η μάζα είναι

$$M = \frac{1}{2} g v$$

καταλήγουμε, λοιπόν, με 3 W με μάζα M και ένα βαθμωτό h με μάζα $\sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$.

ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

Ο Fermi, το 1934, έκανε την πρώτη προσπάθεια φαινομενολογικής περιγραφής των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Θεώρησε την διάσπαση β ως μια ηλεκτρομαγνητική μετάπτωση.



Το πλάτος θα δίνεται

$$M =< p|J_\mu^{wk}|n >< e\nu_e|J^\mu_{wk}|0 >$$

Λόγω της μικρής ενέργειας που εκλείεται, περιμένουμε ότι η εξάρτηση από την ορμή μπορεί να αγνοηθεί και να καταλήξουμε σε μια σταθερά $G = 1.14 \times 10^{-5}$ GeV^{-2}.

Αυτή η αλληλεπίδραση "ρεύματος - ρεύματος" μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες ασθενείς διαδικασίες. Ο κανόνας που έχουμε για τα αντισωματίδια οδηγεί στην διαδικασία

$$\nu_e + n \to p + e^-$$

που θα πρέπει να έχει την ίδια ισχύ όπως και η διάσπαση β. Θεωρώντας, επίσης, ότι το ασθενές ρεύμα έχει λεπτονικό και αδρονικό τμήμα

$$J_\mu^{wk} = J_\mu^h + J_\mu^l$$

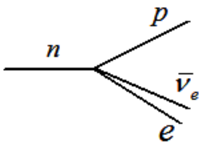
τότε, θα πρέπει να υπάρχουν καθαρές λεπτονικές διαδικασίες

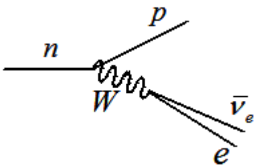
$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

και καθαρά αδρονικές διαδικασίες

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-$$

Η πρώτη διατύπωση της ''παγκοσμιότητας'' (universality) ήταν ότι όλες αυτές οι διαδικασίες θα έχουν κοινό G.
Η αντιστοιχεία του φωτονίου με το ζευγάρι $(e\nu_e)$ δεν είναι πολύ επιτυχής. Το φωτόνιο που εκπέμπεται αποτελεί το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Είναι δύσκολο να θεωρήσουμε το ζευγάρι $(e\nu_e)$ ως το κβάντο του αντίστοιχου ασθενούς πεδίου.
Από την άλλη πλευρά, η επιτυχία της ΚΗΔ οδηγεί άμεσα στην σκέψη εισαγωγής ενός πεδίου αντίστοιχου με το φωτόνιο, του ενδιάμεσου διανυσματικού μποζονίου (intermediate vectot boson). Αυτό ίσως ήταν το πρώτο βήμα για την ενοποίηση ηλεκτρομαγνητικών και ασθενών αλληλεπιδράσεων.





Παρέμεναν βέβαια πολλές διαφορές ανάμεσα στην ΚΗΔ και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το φωτόνιο είναι ουδέτερο ενώ το W έχει φορτίο. Το W πρέπει να έχει μάζα, λόγω της μικρής εμβέλειας των ασθενών αλληλεπίδρασεων, ενώ το φωτόνιο είναι άμαζο.
Η εισαγωγή της έννοιας του ενδιάμεσου μποζονίου οδηγεί στο πλάτος

$$\mathcal{M} = J_{\mu}^{(wk)} \left[\frac{-g^{\mu\nu} + q^{\mu} q^{\nu} / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right] J_{(wk)}^{\nu}$$

Επομένως, στην κορυφή Fermi έχουμε πια μια εξάρτηση από την ενέργεια. Για τυπικές ενέργειες της διάσπασης β, το $q^2 << M_W^2$, οπότε $G \sim g^2 / M_W^2$, όπου το g είναι η σταθερά σύζευξης, ανάλογη του e. Δηλαδή, οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι ασθενείς λόγω της μεγάλης μάζας του W. Αν $g \sim e$, τότε

$$M_W \sim \frac{e}{\sqrt{G}} \sim 90 \text{ GeV}$$

Το 1957 παρατηρήθηκε (Wu et al) εξάρτηση της γωνιακής κατανομής του e^- από την πόλωση του πυρήνα (n), κάτι που είχε ήδη αναφερθεί από τους Lee και Young. Άρα, θα πρέπει να εμφανίζεται όρος $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$. Μετά από πολλές προσπάθειες, παλινωδίες, αποτυχίες, καθιερώθηκε η ύπαρξη συνδυασμών V (διάνυσμα) και A (ψευδοδιάνυσμα) στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.
Γνωρίζουμε ότι $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ μετασχηματίζεται ως διάνυσμα, ενώ το $J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ ως ψευδοδιάνυσμα. Δηλαδή, σε μετασχηματισμό parity

$$P: \quad J^\mu \to (J^0, -\mathbf{J})$$
$$P: \quad J_5^\mu \to (J^0, \mathbf{J})$$

Η αρχική θεωρία του Fermi πέρασε από την υπόθεση του ενδιάμεσου μποζονίου και έφτασε στην μορφή $V - A$

$$< e^-|J^\mu_{wk}|\nu_e >= \frac{g}{\sqrt{2}} NN' \, \bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5) u_{\nu_e}$$

Επομένως, το $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ θα γράφεται

$$\frac{g^2}{2}\left[\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{(\nu_\mu)}\right]\left[\frac{-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M_W^2}{q^2-M_W^2}\right]\left[\bar{u}_{(\nu_e)}\gamma_\nu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{(e)}\right]$$

που αντιστοιχεί στην κορυφή Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right)u_{(\nu_\mu)}\right] g^{\mu\nu}\left[\bar{u}_{(\nu_e)}\gamma_\nu\left(1-\gamma_5\right)u_{(e)}\right]$$

Οπότε, για $q^2 << M_W^2$,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

και αυτό αποτελεί τον ορισμό του G_F.
Γράφοντας το

$$\bar{u}_1\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_2 = \bar{u}_1 \frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_2 = \bar{u}_1 P_R \gamma^\mu P_L u_2 = \overline{(u_{1_L})}\gamma^\mu u_{2_L}$$

σημαίνει ότι μόνο το αριστερόστροφο (L) τμήμα της κυματοσυνάρτησης παίζει ρόλο στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \overline{u_L}\gamma^\mu u_L + \overline{u_R}\gamma^\mu u_R$$

Τι γίνεται για τα δεξιόστροφα τμήματα;
Ας δούμε τι συμβαίνει στην απαίτηση η Λαγκραντζιανή να παραμένει αναλλοίωτη όταν η κυματοσυνάρτηση ψ μετασχηματίζεται κάτω από δύο μετασχηματισμούς

$$\psi \to e^{-i\alpha(x)Q}\psi, \quad \text{και} \quad \psi \to e^{-i\beta(x)Y}\psi$$

Τότε, θα πρέπει να εισαγάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_1 QA^\mu - ig_2 YB^\mu$$

όπου τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται ως

$$A^\mu \to A^\mu - \frac{1}{g_1 Q}\partial^\mu \alpha(x)$$
$$B^\mu \to B^\mu - \frac{1}{g_2 Y}\partial^\mu \beta(x)$$

Ουδέτερα ρεύματα

Η διάσπαση $n \to p + e^- + \nu_e$, στο επίπεδο των κουάρκ αντιστοιχεί στην $d \to u + W^-$ και με τη σειρά του το $W^- \to e^- + \nu_e$. Οπότε, η αλληλεπίδραση του ασθενούς ρεύματος των κουάρκ με το W^- γράφεται

$$(\overline{u_L}\gamma^\mu d_L)\, W_\mu^- = \left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^\mu \tau^+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_\mu^-$$

όπου

$$\tau^+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Και βέβαια, για την διαδικασία $u \to d + W^+$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$(\overline{d_L}\gamma^\mu u_L)\, W_\mu^+ = \left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^\mu \tau^- \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_\mu^+$$

με

$$\tau^- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Περιμένουμε (;) λοιπόν και την παρουσία του τ_3

$$(\bar{u}\,\bar{d})_L\,\gamma^\mu \tau_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = (\overline{u_L}\gamma^\mu u_L - \overline{d_L}\gamma^\mu d_L)$$

όπου βέβαια το αντίστοιχο $W_\mu^{(3)}$ πρέπει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Δουλεύοντας σε μια γενιά μόνο (u, d, e, ν_e), θα έχουμε

$$u_L, \quad u_R, \quad d_L, \quad d_R, \quad e_L, \quad e_R, \quad \nu_{e_L}$$

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις μας οδηγούν σε αριστερόστρεφες διπλέτες και δεξιόστροφες ''μονάδες'' (singlets)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R, \quad e_R$$

Τα αριστερόστροφα ''βλέπουν'' μια συμμετρία $SU(2)$ και μια $U(1)$ ενώ τα δεξιόστροφα ''βλέπουν'' μόνο την $U(1)$. Δηλαδή, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$
\begin{aligned}
\Psi_L^{(i)} &\to \exp\left(-i\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2 - i\beta(x)Y_L^{(i)}/2\right)\Psi_L^{(i)} \\
\Psi_R^{(i)} &\to \exp\left(-i\beta(x)Y_R^{(i)}/2\right)\Psi_R^{(i)}
\end{aligned}
$$

οπότε, οι αντίστοιχες συναλλοίωτες παράγωγοι θα είναι

$$
\begin{aligned}
D^\mu_{(L)} &= \partial^\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{W}^\mu + ig'\frac{Y_{(L)}}{2}B^\mu, \quad \text{για τα } L \text{ πεδία} \\
D^\mu_{(R)} &= \partial^\mu + ig'\frac{Y_{(R)}}{2}B^\mu, \qquad\qquad\qquad \text{για τα } R \text{ πεδία}
\end{aligned}
$$

και η Λαγκραντζιανή θα γράφεται

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = (\bar{u}\,\bar{d})_L\, i\gamma^\mu D^{(L)}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\, i\gamma^\mu D^{(L)}_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L + \\
+ \overline{u_R} i\gamma^\mu D^{(R)}_\mu u_R + \overline{d_R} i\gamma^\mu D^{(R)}_\mu d_R + \overline{e_R} i\gamma^\mu D^{(R)}_\mu e_R - \\
- \frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Για να δούμε πώς παρουσιάζεται το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα, π.χ. $\bar{e}\gamma^{\mu}e$. Ας πάρουμε το ρεύμα της $SU(2)$ που αντιστοιχεί στο τ_3

$$j_{\mu}^{(3)} = (\bar{\nu}_e \, \bar{e})_L \, \gamma_{\mu} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} \overline{\nu_{e_L}} \gamma_{\mu} \nu_{e_L} - \frac{1}{2} \overline{e_L} \gamma_{\mu} e_L$$

Για την ίδια διπλέτα, το ρεύμα που αντιστοιχεί στην $U(1)$ θα είναι

$$j_{\mu}^{(Y_L)} = (\bar{\nu}_e \, \bar{e})_L \, \gamma_{\mu} \frac{1}{2} Y_L \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} Y_L \overline{\nu_{e_L}} \gamma_{\mu} \nu_{e_L} + \frac{1}{2} Y_L \overline{e_L} \gamma_{\mu} e_L$$

Αν, λοιπόν, επιλεχθεί για την λεπτονική διπλέτα $Y_L = -1$, θα πάρουμε

$$j_{\mu}^{(3)} + j_{\mu}^{(Y_L)} = -\overline{e_L} \gamma_{\mu} e_L$$

Το ρεύμα για το δεξιόστροφο e_R είναι, βέβαια, μόνο από την $U(1)$

$$j_{\mu}^{(Y_R)} = \overline{e_R} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} Y_R' e_R$$

Επιλέγουμε $Y'_R = -2$, οπότε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} + j_\mu^{(Y_R)} = -\overline{e_L}\gamma_\mu e_L - \overline{e_R}\gamma_\mu e_R = -\bar{e}\gamma_\mu e = q_e \bar{e}\gamma_\mu e$$

που είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα. Δηλαδή, το φορτίο κάθε ψ θα δίνεται από τη σχέση

$$Q = t_3 + \frac{Y_{(L)}}{2} \quad \text{για τα } L, \quad Q = \frac{Y_{(R)}}{2} \quad \text{για τα } R$$

όπου

$$t_3 = \pm\frac{1}{2} \quad \text{για τις πάνω και κάτω συνιστώσες της } L \text{ διπλέτας}$$

Αυτό αναμενόταν, μιας και κάθε κατάσταση έχει καθορισμένο φορτίο. Οπότε, ο τελεστής του φορτίου θα πρέπει να είναι διαγώνιος πίνακας, άρα γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y.

Ας επαληθεύσουμε ότι ο συνδυασμός $Q = t_3 + \frac{Y}{2}$ δίνει το σωστό φορτίο σε κάθε σωματίδιο.

$$\begin{aligned} \text{για το } \nu_{e_L}: \quad & +\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0 \\ \text{για το } e_L: \quad & -\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\ \text{για το } e_R: \quad & 0 + \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε την τιμή του Y για την διπλέτα των κουάρκ και των δεξιόστροφων πεδίων

$$Y = \frac{1}{3}, \text{ για το } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Y = \frac{4}{3}, \text{ για το } u_R, \quad Y = -\frac{2}{3}, \text{ για το } d_R$$

Εφ΄ όσον το φορτίο είναι γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y, το φωτόνιο θα είναι γραμμικός συνδυασμός του W_3^μ και του B^μ

$$W_3^\mu = \sin\theta_W A^\mu + \cos\theta_W Z^\mu$$
$$B^\mu = \cos\theta_W A^\mu - \sin\theta_W Z^\mu$$

όπου θ_W η γωνία Weinberg που μας πηγαίνει από το ζευγάρι (W_3^μ, B^μ) στο (A^μ, Z^μ). Τώρα, οι όροι αλληλεπίδρασης των ρευμάτων $j_\mu^{(3)}$ και $j_\mu^{(Y)}$ γίνονται

$$\begin{aligned}
& -igj_\mu^{(3)} W_3^\mu - ig'\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)} B^\mu = \\
& = -i\left[g\sin\theta_W j_\mu^{(3)} + g'\frac{1}{2}\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right] A^\mu - \\
& \qquad\qquad - i\left[g\cos\theta_W j_\mu^{(3)} - g'\frac{1}{2}\sin\theta_W j_\mu^{(Y)}\right] Z^\mu = \\
& = -ig\sin\theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g}\frac{1}{\tan\theta_W}\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right] A^\mu - \\
& \qquad\qquad - i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right] Z^\mu
\end{aligned}$$

Αν $\frac{g'}{g} = \tan\theta_W$, τοτε, ο πρώτος όρος γίνεται

$$-ig\sin\theta_W\left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g}\frac{1}{\tan\theta_W}\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right]A^\mu =$$
$$-ig\sin\theta_W\left[j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right]A^\mu \equiv -iej_\mu^{(em)}A^\mu$$

όπου

$$e = g\sin\theta_W, \quad \text{και} \quad j_\mu^{(em)} = j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}$$

Ο δεύτερος όρος, ανάλογος του Z^μ, γίνεται

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]Z^\mu =$$
$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right]Z^\mu =$$
$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W\left(j_\mu^{(em)} - j_\mu^{(3)}\right)\right]Z^\mu =$$
$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W j_\mu^{(em)}\right]Z^\mu$$

Ο μηχανισμός Higgs

Θα πρέπει τώρα να εφαρμόσουμε τον μηχανισμό Higgs ώστε τα $W^{\pm}$ και Z να αποκτήσουν μάζα, ενώ το φωτόνιο να παραμείνει άμαζο. Εισάγουμε μια διπλέτα ϕ με $Y = 1$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{+} \\ \phi^{0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Βέβαια, θα προσθέσουμε στη Λαγκραντζιανή τους κατάλληλους όρους, κινητικό και δυναμικού, για το ϕ

$$\mathcal{L}_\phi = \left[\left(\partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}B^\mu \right) \phi \right]^2 - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

με $\mu^2 < 0$ και $\lambda > 0$. Επιλέγουμε για

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

με $v^2 = -\mu^2/\lambda$. Γιατί αυτή η επιλογή: μια διπλέτα μιγαδικών πεδίων με $Y = 1$ και τη συγκεκριμένη επιλογή του κενού, είναι η κατάλληλη για την περίπτωσή μας;

Κάθε τιμή του ϕ_0 που παραβιάζει μια συμμετρία θα δημιουργήσει όρο μάζας για το αντίστοιχο μποζόνιο βαθμίδας. Αλλά, αν το ϕ_0 παραμένει αναλλοίωτο από κάποια υποομάδα των μετασχηματισμών βαθμίδας, το μποζόνιο βαθμίδας που αντιστοιχεί σ΄ αυτήν την υποομάδα θα παραμείνει άμαζο. Η επιλογή του $\phi_0 = v$ παραβιάζει την $SU(2)$ και την $U(1)$. Αλλά, το ηλεκτρικό φορτίο του ϕ_0 είναι $Q = t_3 + Y/2 = -1/2 + 1/2 = 0$, δηλαδή

$$Q\phi_0 = 0$$

και βέβαια

$$\phi_0 \to e^{i\alpha(x)Q}\phi_0 = \phi_0$$

Δηλαδή, το κενό παραμένει αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό $U(1)_{em}$ και το φωτόνιο παραμένει άμαζο. Από τους τέσσερεις γενήτορες του $SU(2) \times U(1)$, $\boldsymbol{\tau}/2$ και Y, μόνο ο συνδυασμός Q υπακούει την σχέση $Q\phi_0 = 0$. Οι άλλοι τρεις παραβιάζουντην συμμετρία και δημιουργούν όρους μάζας. Με άλλα λόγια, λόγω της διατήρησης του φορτίου, μόνο αφόρτιστα βαθμωτά πεδία μπορούν να αποκτήσουν αναμενόμενη τιμή στο κενό διάφορη του μηδενός.

Οι μάζες των μποζονίων βαθμίδας

Οι μάζες θα προέλθουν από τον κινητικό ορο της Λαγκραντζιανής του ϕ, επιλέγοντας την αναμενόμενη τιμή του κενού ϕ_0

$$\left|\left(ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{W}_{\boldsymbol{\mu}}+i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2=$$

$$=\frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} gW_\mu^{(3)}+g'B_\mu & g(W_\mu^{(1)}-iW_\mu^{(2)}) \\ g(W_\mu^{(1)}+iW_\mu^{(2)}) & -gW_\mu^{(3)}+g'B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right|^2=$$

$$=\frac{v^2g^2}{8}\left[(W_\mu^{(1)})^2+(W_\mu^{(2)})^2\right]+\frac{v^2}{8}\left(g'B_\mu-gW_\mu^{(3)}\right)\left(g'B^\mu-gW^{\mu(3)}\right)=$$

$$=\left(\frac{vg}{2}\right)^2W_\mu^+W^{-\mu}+\frac{v^2}{8}\left(W_\mu^{(3)}\,B_\mu\right)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{(3)\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

όπου $W^{\pm} = (W^{(1)} \mp iW^{(2)})/\sqrt{2}$. Βλέπουμε άμεσα από τον πρώτο όρο ότι η μάζα των $W^{\pm}$

$$M_W = \frac{1}{2} v g$$

Ο δεύτερος όρος θα πρέπει να διαγωνοποιειθεί. Τα ιδιοδιανύσματα και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g^2}{gg'} \end{pmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμή } 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμή } g^2 + g'^2$$

Επομένως, ο γραμμικός συνδυασμός των $W^{(3)}$ και B που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{g^2}{gg'} \\ 1 & \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(3)} \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}} \begin{pmatrix} g' W^{(3)} + gB \\ gW^{(3)} - g'B \end{pmatrix}$$

Έτσι

$$A_\mu \equiv \frac{g' W_\mu^{(3)} + g B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad \text{με } m_A = 0$$

$$Z_\mu \equiv \frac{g W_\mu^{(3)} - g' B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad \text{με } m_Z^2 = \frac{v^2}{4}(g^2 + g'^2)$$

Επειδή $g'/g = \tan\theta_W$, οπότε

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^{(3)} + \cos\theta_W B_\mu$$
$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^{(3)} - \sin\theta_W B_\mu$$

όπως ακριβώς και στα ρεύματα.

Το ότι το φωτόνιο παραμένει άμαζο, είναι δική μας κατασκευή!
Ο λόγος των μαζών του W και

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{vg/2}{v\sqrt{g^2 + g'^2}/2} = \cos\theta_W$$

είναι πρόβλεψη που εξαρτάται από το ότι το H είναι διπλέτα.
Δηλαδή, στο πρότυπό μας, η παράμετρος ρ είναι

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1$$

Από τις σχέσεις

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \qquad M_W^2 = \frac{1}{4}g^2 v^2$$

και με γνωστή την τιμή του G_F, παίρνουμε

$$v = 246 \text{ GeV}$$

Οπότε

$$M_W = \frac{1}{2} g v = \frac{1}{2} \frac{e}{\sin\theta_W} \sim \frac{37.3 \text{ GeV}}{\sin\theta_W}$$
$$M_Z \sim \frac{74.6 \text{ GeV}}{\sin 2\theta_W}$$

Το 1982 παρατηρήθηκαν W και Z σε αντιδράσεις $p\bar{p} \to ZX \to (e^+e^-)X$ και $p\bar{p} \to W^\pm X \to (e^\pm \nu)X$, με $M_W \sim 81$ GeV και $M_Z \sim 93$ GeV.

Μάζες φερμιονίων

Ο όρος μάζας για τα φερμιόνια είναι $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$. Τώρα όμως τα αριστερόστροφα πεδία είναι ανήκουν σε διπλέτα της $SU(2)$, αντίθετα με τα δεξιόστροφα που βλέπουν μόνο την $U(1)$. Επομένως, ο όρος της μάζας δεν παραμένει αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς. Στο σημείο αυτό έρχεται πάλι το H. Προσθέτουμε στην Λαγκτραντζιανή τους όρους (ας περιοριστούμε μόνο στη μάζα του ηλεκτρόνιου)

$$\mathcal{L}_h = -G_e \left[(\bar{\nu}_e\, \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (\phi^- \; \phi^0) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \right]$$

Προσέξτε ότι στην άλγεβρα της $SU(2)$ έχουμε : $\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{3} + \mathbf{1}$ και επιπλέον βλέπουμε ότι και ως προς $U(1)$ οι όροι παραμένουν αναλλοίωτη μιας και $Y_{\text{διπλέτας}} = -1$, $Y_H = 1$ και $Y_{e_R} = -2$. Γράφοντας, κατά τα γνωστά,

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L}_h = -\frac{G_e}{\sqrt{2}} v(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}} h(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$$

Τώρα αναγνωρίζουμε την μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = G_e v/\sqrt{2}$ και έχουμε και ένα όρο αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου με το h

$$-\frac{G_e}{\sqrt{2}} h(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = -\frac{m_e}{v} h(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$$

Με αντίστοιχο τρόπο δημιουργούνται και οι μάζες των κουάρκ. Για το d κουάρκ η διαδικασία είναι ανάλογη με αυτήν του ηλεκτρόνιου. Για το u κουάρκ χρησιμοποιούμε αντί του ϕ το συζυγές του ϕ_C. Ειδικά για την $SU(2)$ η θεμελιώδης αναπαράσταση **2** και η συζυγής της $\bar{\mathbf{2}}$ μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο. Οπότε, στην Λαγκραντζιανή προσθέτουμε τους όρους

$$-G_d(\bar{u}\,\bar{d})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} d_R - G_u(\bar{u}\,\bar{d})_L \begin{pmatrix} -\bar{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix} u_R + \mathrm{h.c}$$

που θα δώσουν τους όρους

$$-m_d\bar{d}d - m_u\bar{u}u - \frac{m_d}{v}\bar{d}dh - \frac{m_d}{v}\bar{u}uh$$

με

$$m_u = \frac{G_u v}{\sqrt{2}}, \qquad m_d = \frac{G_d v}{\sqrt{2}}$$

Τέλος, η μάζα του h φαίνεται από το δυναμικό

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

και είναι

$$m_h^2 = 2\lambda v^2$$

Η ηλεκτρασθενής θεωρία, με εκπληκτική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, εννοποιεί πράγματι τις δύο αλληλεπιδράσεις; Η ομάδα της βαθμίδας, $SU(2) \times U(1)$, είναι απλά γινόμενο δύο ξεχωριστών μετασχηματισμών βαθμίδας με σταθερές g για την $SU(2)$ και g' για την $U(1)$. Αυτές οι δύο σταθερές δεν συσχετίζονται στο μοντέλο. Ο λόγος τους

$$\frac{g'}{g} = \tan\theta_W$$

πρέπει να μετρηθεί πειραματικά.
Αν όμως οι μετασχηματισμοί βαθμίδας των $SU(2)$ και $U(1)$ μπορούσαν να ενσωματωθούν σε ένα μεγαλύτερο σύνολο μετασχηματισμών G, Δηλαδή, αν

$$G \supset SU(2) \times U(1)$$

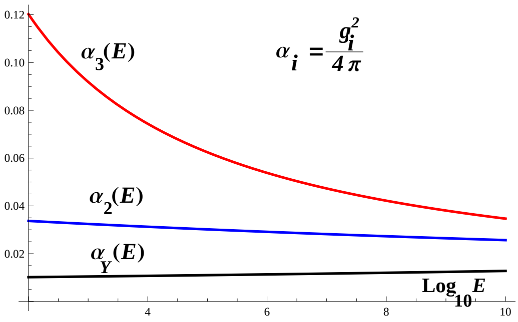
οι σταθερές g και g' θα μπορούσαν να συσχετισθούν. Οι νέοι μετασχηματισμοί που θα περιέχει το G, θα συσχετίζουν τα αρχικά ανεξάρτητα υποσύνολα των μετασημματισμών του $SU(2)$και $U(1)$.

Οπότε, περιμένουμε οι g και g' να συσχετίζονται μέσω κάποιου αριθμού (κάποιου συντελεστή Clebsch-Gordan της ομάδας G).
Έχοντας στο μυαλό μας για μια ''τελική'' θεωρία είναι λογικό να θέλουμε να συμπεριλάβουμε και τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις.
Δηλαδή, ψάχνουμε για μια ομάδα G

$$G \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

που φυσικά θα συσχετίζει τα g και g' με την σταθερά της ισχυρής αλληλεπίδρασης g_s. Όλες οι αλληλεπιδράσεις, επομένως, θα περιγράφονται από μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία (Grand Unified Theory, GUT) με μια μοναδική σταθερά g_G με την οποία όλες οι σταθερές θα συσχετίζονται μιας και ορισθεί η ομάδα G.
Αλλά πώς οι τρείς σταθερές (πηγαίνοντας σε μια καλύτερη ονοματολογία) g_Y, g_2 και g_3 των $U(1)$, $SU(2)$ και $SU(3)$, με διαφορετικές τιμές μπορούν να συσχετισθούν με μια σταθερά την g_G;
Εδώ, στο ''παιχνίδι'' μπαίνει το γεγονός ότι αυτές οι σταθερές *δεν* είναι σταθερές αλλά η τιμή τους εξαρτάται από την ενέργεια της αλληλεπίδρασης.

Η μη αβελιανότητα των $SU(3)$ και $SU(2)$, και το συγκεκριμένο σωματιδιακό περιεχόμενο, οδηγεί τις αντίστοιχες σταθερές σε μείωση της τιμής τους όσο αυξάνεται η ενέργεια. Αντίθετα, η τιμή της σταθεράς του $U(1)$ αυξάνεται με την ενέργεια. Επομένως, πιθανόν είναι ότι σε κάποια υψηλή τιμή της ενέργειας, οι τρεις σταθερές να έχουν μια κοινή τιμή: την τιμή της σταθεράς g_G της μεγαλοενοποιημένης θεωρίας.



Η εξέλιξη της σταθεράς σύζευξης με την ενέργεια καθορίζεται από την λεγόμενη *συνάρτηση βήτα* της αντίστοιχης αλληλεπίδρασης

$$\frac{d}{d(\ln E)}\,\alpha_i(E) = \beta_i, \quad \alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}, \quad i = 3, 2, Y$$

Στην κβαντική θεωρία πεδίου μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση β στη θεωρία διαταραχών. Για την περίπτωση του Καθιερωμένου Προτύπου με 3 γενιές σωματιδίων και μία διπλέτα Higgs, σε πρώτη προσέγγιση (προσέγγιση ενός βρόχου) οι συναρτήσεις β είναι

$$\beta_3 = -7\frac{\alpha_3^2}{2\pi}, \quad \beta_2 = -\frac{19}{6}\frac{\alpha_2^2}{2\pi}, \quad \beta_Y = \frac{41}{6}\frac{\alpha_Y^2}{2\pi}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\frac{1}{\alpha_i(E)} = \frac{1}{\alpha_i(E_0)} - \frac{b_i}{2\pi}\ln\frac{E}{E_0}, \qquad i = 3, 2, Y$$

όπου $b_3 = -7$, $b_2 = -19/6$ και $b_Y = 41/6$.

Η *μικρότερη* ομάδα που μπορεί να περιέχει τις ομάδες του Καθιερωμένου Προτύπου ως υποομάδες είναι η $SU(5)$.
Πώς κατατάσσουμε τα σωματίδια ως προς αυτήν την ομάδα;
Για μία οικογένεια έχουμε

$$\left.\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_R, d_R \right\} \qquad \text{το καθένα σε 3 χρώματα}$$
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, e_R^-$$

με τα αντισωματίδιά τους. Σύνολο 15 σωματίδια. Μπορούμε να κάνουμε την ''αντικατάσταση''

$$u_R \to \bar{u}_L, \quad d_R \to \bar{d}_L, \quad e_R^- \to e_L^+$$

Στην $SU(5)$ μπορούμε να ‘‘τοποθετήσουμε’’ τα σωματίδια αυτά σε μια (αντι-)θεμελιώδη αναπαράσταση $\bar{5}$ και στην αναπαράσταση 10. Αυτή η τελευταία αναπαράσταση είναι το αντισυμμετρικό τμήμα από το γινόμενο δύο θεμελιωδών αναπαράστασεων 5 ($5 \times 5 = 10_A + 15_S$).
Τα 3 $\bar{d}_L$ και το ζευγάρι $(\nu_e, e^-)_L$ ανήκουν στην $\bar{5}$

$$\bar{5} = (1,2) + (\bar{3},1) = (\nu_e, e^-)_L + \bar{d}_L(3 \text{ χρώματα})$$

και τα υπόλοιπα 10

$$10 = (1,1) + (\bar{3},1) + (3,2) = e_L^+ + \bar{u}_L(3 \text{ χρώματα}) + (u,d)_L(3 \text{ χρώματα})$$

όπου στις παρενθέσεις φαίνονται οι αναπαραστάσεις κάτω από τις $SU(3)$ και $SU(2)$.

$$\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{d} \\ \bar{d} \\ e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u} & -\bar{u} & -u & -d \\ -\bar{u} & 0 & \bar{u} & -u & -d \\ \bar{u} & -\bar{u} & 0 & -u & -d \\ u & u & u & 0 & -\bar{e}^+ \\ d & d & d & \bar{e}^+ & 0 \end{pmatrix}_L$$

Και τα σωματίδια βαθμίδας τις $SU(5)$; Είναι βέβαια 24 και ανήκουν στην συζηγή (adjoint) αναπαράσταση της ομάδας

$$24 = \underbrace{(8,1)}_{\text{γκλουόνια}} + \underbrace{(1,3) + (1,1)}_{W_1, W_2, W_3, B} + \underbrace{(3,2) + (\bar{3},2)}_{X, Y}$$

Δηλαδή, έχουμε επιπλέον σωματίδια βαθμίδας που σχηματίζουν διπλέτες κάτω από την $SU(2)$ και τριπλέτες κάτω από την $SU(3)$, έχουν χρώμα. Τα σωματίδια αυτά επιτρέπουν την αλληλεπίδραση λεπτονίων με κουαρκ. Για παράδειγμα

$$(u,d)_L \to e_L^+ + (\bar{Y}, \bar{X})$$

που σημαίνει ότι τα φορτία των X και Y είναι $Q_X = 4/3$ και $Q_Y = 1/3$.

Είναι πράγματι αυτή η διαδικασία μη αναμενόμενη; Θυμηθείτε ότι για ενέργειες πάνω από την μάζα του M_W η διαφορά μεταξύ ηλεκτρομαγνητικών και ασθενών αλληλεπιδράσεων εξαφανίζεται. Αντίστοιχα, πάνω από την ενέργεια ενοποίησης των 3 αλληλεπιδράσεων η ισχυρή αλληλεπίδραση ενσωματώνεται στην ηλεκτρασθενή και η διάκριση μεταξύ των έγχρωμων κουαρκ και άχρωμων λεπτονίων εξαφανίζεται.
Λίγα λόγια για την $SU(5)$.
Από τους 24 γενήτορες της ομάδας, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους 8 της $SU(3)$ στους T_i, $i = 1, ..., 8$ που έχουν στοιχεία διάφορα του μηδενός μόνο στις 3 πρώτες στήλες και γραμμές. Τους γενήτορες της $SU(2)$ τους αναγνωρίζουμε με αυτούς που έχουν διάφορα του μηδενός τα στοιχεία μόνο στην 4η και 5η γραμμή και στήλη: T_{22}, T_{23} και $(\sqrt{10}T_{24} - \sqrt{6}T_{15})/4$.
Ο διαγώνιος γενήτορας της $SU(2)$ είναι ο τρίτος

$$\frac{1}{4}(\sqrt{10}T_{24} - \sqrt{6}T_{15}) = diag(0, 0, 0, 1/2, -1/2)$$

Πρέπει τώρα να αναγνωρίσουμε την τιμή του υπερφορτίου Y για τη σχέση που δίνει το ηλεκτρικό φορτίο

$$Q = T_3^{SU(2)} + \frac{Y}{2}$$

Το φορτίο Q θα πρέπει να είναι ένας από τους γενήτορες της $SU(5)$ (ή γραμμικός συνδυασμός τους) και θα πρέπει να είναι διαγώνιος. Η κατάλληλη επιλογή για να παίρνουμε το σωστό φορτίο των σωματιδίων είναι

$$Y = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{10}\,T_{24} + \frac{5}{3}\sqrt{6}\,T_{15}\right) = diag(-2/3, -2/3, -2/3, 1, 1)$$

Ας δούμε αν παίρνουμε το σωστό ηλεκτρικό φορτίο για την $\bar{5}$. Θα πρέπει να θυμηθούμε ότι η συζυγής αναπαράσταση μετασχηματίζεται με τους πίνακες $-T_i^*$. Επομένως, για την αναπαράσταση $\bar{5}$ θα έχουμε

$$Q_{\bar{5}} = -diag(0,0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}diag(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},1,1) =$$
$$= diag(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1,0)$$

που είναι ακριβώς τα φορτία της πεντάδας $(\bar{d}, \bar{d}, \bar{d}, e, \nu_e)$. Έχοντας προσδιορίσει το υπερφορτίο του Καθιερωμένου Προτύπου ως προς του γενήτορες της $SU(5)$, μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ της σταθεράς g' και της ενοποιημένης σταθεράς g_G

$$g' = \sqrt{\frac{3}{5}}\, g_G$$

ενώ για της σταθερές σύζευξης των $SU(3)$ και $SU(2)$ ο συντελεστής αναλογίας είναι μονάδα. Οπότε, τώρα μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της ενέργειας όπου οι τρεις σταθερές του ΚΠ πλησιάζουν μια κοινή τιμή. Πρέπει να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων $\alpha_3(Q) = \alpha_2(Q) = \frac{5}{3}\alpha_Y(Q)$

$$\frac{1}{\alpha_3(E_0)} - \frac{b_3}{2\pi} \ln \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\alpha_2(E_0)} - \frac{b_2}{2\pi} \ln \frac{E}{E_0} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{\alpha_Y(E_0)} - \frac{b_Y}{2\pi} \ln \frac{E}{E_0}\right)$$

Με αρχικές τιμές, από τα πειράματα,

$$E_0 = M_Z = 91,2 \text{ GeV}, \quad \alpha_3 \sim 0,118, \quad \alpha_2 \sim 0,034, \quad \alpha_Y \sim 0,010$$

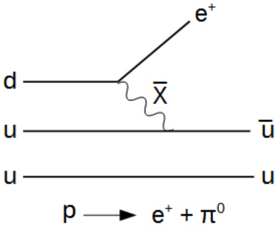
η ενέργεια όπου $\alpha_2 = \alpha_3$ είναι $\sim 10^{15}$GeV και η κοινή τιμή 0,021. Η $\alpha_1 \equiv (5/3)\alpha_Y$ *δεν* περνά από το κοινό σημείο των α_2 και α_3.

Βέβαια, υπάρχουν και τα σφάλματα στον προσδιορισμό των αρχικών τιμών (κυρίως στο α_3) αλλά και πάλι οι τρεις σταθερές σύζευξεις δεν φαίνεται να συγκλίνουν. Χρειάζεται να έρθει η έννοια της υπερσυμμετρίας και η πρόβλεψη για νέα (τα υπερσυμμετρικά) σωματίδια που αλλάζουν την εξέλιξη των σταθερών που δείχνουν πλέον μια πολύ καλύτερη σύγκλιση σε ενέργειες της τάξης των 10^{16} GeV.

Άλλες ''επιπτώσεις'' της μεγαλοενοποίησης

α. Η διάσπαση του πρωτονίου

Με δεδομένο ότι τα X και Y μετατρέπουν λεπτόνια σε βαρυόνια, περιμένουμε διάσπαση του πρωτονίου



Περιμένουμε ότι η μάζα του X και του Y να είναι ίδιας τάξης με την ενέργεια ενοποίησης, δηλαδή $\sim 10^{15}$GeV. Οπότε, κατ΄ αναλογία με την ασθενή αλληλεπίδραση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αλληλεπίδραση ανταλλαγής του X με μια αλληλεπίδραση της μορφής $ud \to e^+\bar{u}$. Και η ενεργός σταθερά σύζευξης θα είναι της τάξης

$$\frac{\alpha_U}{M_X^2}$$

όπου α_U είναι η τιμή της σταθεράς σύζευξης της ενοποιημένης θεωρίας που είναι της τάξης του 0.022 Το τετράγωνου του πλάτους, Γ, αυτής της διαδικασίας θα είναι της τάξης

$$\Gamma \sim \left(\frac{\alpha_U}{M_X^2}\right)^2 E^5$$

όπου E είναι μια χαρακτηριστική ενέργεια της διαδικασίας διάσπασης, οπότε η τιμή $E = m_p$ είναι μια λογική επιλογή.

Ο χρόνος ζωής τ είναι το αντίστροφο του Γ

$$\tau = \Gamma^{-1} \sim \frac{M_X^4}{\alpha_U^2 m_p^5} \sim 10^{29} - 10^{30} \text{ χρόνια}$$

(Για σύγκριση αναφέρουμε ότι η ηλικία του σύμπαντος είναι 10^{10} χρόνια!)

Τα πειράματα, μη παρατηρώντας διάσπαση του πρωτονίου, βάζουν ένα κάτω όριο στο χρόνο ζωής μεγαλύτερο του 5×10^{32} χρόνια. Οπότε, ουσιαστικά, το συγκεκριμένο πρότυπο $SU(5)$ είναι ασύμβατο.

β. Τα φορτία των λεπτονίων και των κουαρκ

Το πρότυπο $SU(5)$ απαντά σε ένα διαχρονικό αίνιγμα: την ισότητα της (απόλυτης) τιμής του φορτίου του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο, οι τιμές $-2e/3$ και $e/3$ για τα φορτία των u και d κουαρκ είναι εμπειρικές. Στο πρότυπο $SU(5)$, μπορεί να δειχθεί ότι το συνολικό φορτίο των σωματιδίων που περιέχονται σε μια αναπαράσταση θα πρέπει να μηδενίζεται. Οπότε, βλέποντας την αναπαράσταση

$$\bar{5} = (1,2) + (\bar{3},1) = (\nu_e, e^-)_L + \bar{d}_L(3 \text{ χρώματα})$$

θα πρέπει

$$3Q_{\bar{d}} + Q_{e^-} = 0 \Rightarrow Q_{\bar{d}} = -\frac{Q_{e^-}}{3} = \frac{1}{3}$$

Δηλαδή, η παρουσία του συντελεστή 1/3 στο φορτίο του d κουαρκ είναι αποτέλεσμα του χρώματος των κουαρκ. Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε ότι το φορτίο του u κουαρκ είνα 2/3, και από το περιεχόμενο του πρωτονίου (uud), παίρνουμε ότι το φορτίο του πρωτονίου είναι $-Q_{e^-}$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ β για το Καθιερωμένο Πρότυπο σε προσέγγιση 1 βρόχου

Ας υποθέσουμε ότι το μοντέλο μας στηρίζεται στο ευθύ άθροισμα των ομάδων $G_1 \times G_2$. Η συνάρτηση-β_1 της σταθεράς σύζευξης g_1 που αντιστοιχεί στο G_1, για προσέγγιση 1 βρόχου, δίνεται από τον

$$16\pi^2\beta_1 = g_1^3\left[-\frac{11}{3}C_2(G) + \frac{2}{3}T(R_1)d_{R2} + \frac{1}{3}T(S_1)d_{S2}\right]$$

όπου
R_1 και S_1 είναι η μη αναγωγίσημη αναπαράσταση της ομάδας G_1 που βρίσκονται τα φερμιόνια και τα μποζόνια αντίστοιχα,
το $T(R)$ ορίζεται από τη σχέση: $T(R)\delta^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left[R^\alpha R^\beta\right]$,
το $C_2(R)$ (ο τετραγωνικός τελεστής του Casimir) ορίζεται από τη σχέση: $C_2(R)I = R^\alpha R^\alpha$,
το $C_2(G)$ είναι ο τετραγωνικός τελεστής του Casimir για την συζηγή αναπαράσταση,
το d_{R2} και d_{S2} είναι η πολλαπλότητα των φερμιονίων και μποζονίων αντίστοιχα ως προς την άλλη ομάδα G_2.

Τα $T(R)$, $C_2(R)$ συνδέονται με την σχέση

$$C_2(R)d(R) = T(R)r$$

όπου r ο αριθμός των γεννητόρων και $d(R)$ η διάσταση της αναπαράστασης. Για παράδειγμα, για την θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$, έχουμε 3 γεννήτορες, $r = 3$ και διάσταση $d = 2$. Γνωρίζοντας ότι για κάθε πίνακα του Pauli ισχύει $\tau^2 = 1/4$, έχουμε $C_2(R) = 3/4$. Οπότε, $T(R) = 1/2$. Η τιμή αυτή του $T(R)$ ισχύει για την θεμελιώδη αναπαράσταση κάθε $SU(N)$. Για $U(1)$, έχουμε $C_2(G) = 0$ και $T(R) = C_2(R) = Y^2$ με Y το υπερφορτίο.
Ας πάμε τώρα στο Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ). Η ομάδα είναι $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

$$\begin{pmatrix} (u_r & u_g & u_b) \\ (d_r & d_g & d_b) \end{pmatrix}_L, \begin{matrix} (u_r & u_g & u_b)_R \\ (d_r & d_g & d_b)_R \end{matrix}, \begin{pmatrix} \nu_3 \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}_L, e_R$$

Ας ξεκινήσουμε τον υπολογισμό της β-συνάρτηση της $SU(3)$.

Εδώ έχουμε:
την χρωματική τριπλέτα του ζεύγους $(u, d)_L$. Δηλαδή, $(u_r, d_r)_L, (u_g, d_g)_L, (u_b, d_b)_L$ με r, g, b τα τρία χρώματα. Επομένως έχουμε την θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(3)$ με πολλαπλότητα 2 ως προς την $SU(2)$ λόγω του ζεύγους

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,2$$

την χρωματική τριπλέτα του u_R, στην θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(3)$ με πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(2)$ (δεν την ''βλέπει''). Επομένως

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$$

Το ίδιο για την χρωματική τριπλέτα του d_R

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$$

Τέλος, έχουμε τα γκλουόνια, που βέβαια είναι στην συζηγή αναπαράσταση. Για τις $SU(N)$, ο $C_2(G) = N$. Οπότε

$$-\frac{11}{3}\,3$$

Κανένα άλλο σωματίδιο στο ΚΠ δεν ''βλέπει'' την $SU(3)$. Οπότε

$$16\pi^2\beta_3(g_3) = g_3^3\left[-11 + \frac{4}{3}\,n_g\right] = -7g_3^3$$

όπου $n_g = 3$ ο αριθμός των οικογενειών.
Προχωράμε στην συνάρτηση β της $SU(2)$. Εδώ έχουμε το ζεύγος $(u, d)_L$, στην θεμελιώδη αναπαράσταση, αλλά σε 3 χρώματα

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,3$$

το ζεύγος $(\nu_e, e)_L$, στην θεμελιώδη αναπαράσταση με πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(3)$ (δεν την ''βλέπει'')

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$$

και το βαθμωτό ζεύγος του Higgs, στην θεμελιώδη αναπαράσταση με πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(3)$ (δεν την ''βλέπει'')

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$$

Τα μποζόνια βαθμίδας συνεισφέρουν τον όρο

$$-\frac{11}{3}\,2$$

Τα u_R και d_R δεν ''βλέπουν'' την $SU(2)$. Και έχουμε τελικά

$$16\pi^2\beta_2(g_2) = g_2^3\left[\frac{22}{3} + \frac{2}{3}\,2\,n_g + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\right] = -\frac{19}{6}g_2^3$$

Τέλος, προχωράμε στο $U(1)$. Κατ' αρχάς, από τη σχέση $Q = \tau_3/2 + Y$ βρίσκουμε το υπερφορτίο των σωματιδίων μας

$$(u\ d)_L \to \frac{1}{6}, \quad u_R \to \frac{2}{3}, \quad d_R \to -\frac{1}{3}, \quad (\nu_e\ e)_L \to -\frac{1}{2}$$
$$e_R \to -1, \quad (H^+\ H_0) \to -\frac{1}{2},$$

και έχουμε

$$
\begin{aligned}
16\pi^2\beta_1(g_1) =& g_1^3\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 6+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 3+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 3+\right.\\
&\left.\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 2+\frac{2}{3}(-1)^2\right] n_g+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 2
\end{aligned}
$$

που τελικά δίνει

$$16\pi^2\beta_1(g_1)=\frac{41}{6}\,g_1^3$$

Ξαναγράφουμε συνολικά για το ΚΠ

$$16\pi^2\beta_3(g_3)=-7g_3^2,\quad 16\pi^2\beta_2(g_2)=-\frac{19}{6}\,g_2^2,\quad 16\pi^2\beta_1(g_1)=\frac{41}{6}\,g_1^3$$

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία $i\theta$ στον χώρο (ict, x).(Π)

Λύση

$$x' = \frac{x - (v/c)ct}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad ct' = \frac{ct - (v/c)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}, \quad \cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad \tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

$$\cos(i\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i(i\theta)} + e^{-i(i\theta)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\theta} + e^{\theta}\right) = \cosh\theta$$

$$\sin(i\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-\theta} - e^{\theta}\right) = i\sinh\theta$$

Ονομάζοντας $\tanh\theta = v/c$, παίρνουμε
$\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} = \left[\left(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta\right) / \cosh^2\theta\right]^{-1/2} = \cosh\theta$.
Οπότε

$$x' = x\cosh\theta - ct\sinh\theta, \quad ct' = ct\cosh\theta - x\sinh\theta$$

ή δουλεύοντας με x και ict

$$x' = x\cos(i\theta) + ict\sin(i\theta), \quad ict' = ict\cos(i\theta) - x\sin(i\theta)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & \sin(i\theta) \\ -\sin(i\theta) & \cos(i\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$.(Π)
Λύση

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g_{00}g^{00} + g_{11}g^{11} + g_{22}g^{22} + g_{33}g^{33} =$$
$$1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 4$$

Υπενθυμίζουμε ότι τόσο ο $g_{\mu\nu}$ όσο και ο $g^{\mu\nu}$ περιγράφονται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3 Δύο σωματίδια με ίση μάζα M συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι E_{cm}. Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια E_{lab} του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση (υπολογίστε το s στο σύστημα εργαστηρίου)

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

(Π)

Λύση

Στο σύστημα Κέντρου Μάζας

$$p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}) \text{ και } p_2^\mu = (E_2, -\mathbf{p})$$

Οπότε

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2, 0)^2 = E_{cm}^2$$

Στη δεύτερη περίπτωση $p_1^\mu = (E_{lab}, \mathbf{p}_1)$ και $p_2^\mu = (M, 0)$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_{lab} + M, \mathbf{p_1})^2 = (E_{lab} + M)^2 - \mathbf{p}_1^2 =$$
$$(E_{lab} + M)^2 - (E_{lab}^2 - M^2) = 2E_{lab}M + 2M^2$$

Αλλά το s είναι αναλλοίωτο, οπότε

$$E_{cm}^2 = 2E_{lab}M + 2M^2 \rightarrow E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

Άσκηση 4 Δείξτε ότι ο ρυθμός μετάβασης i→f για την προσέγγιση 2ης τάξης δίνεται από τη σχέση $W_{fi} = 2\pi \left| V_{fi} \right|^2 \rho(E_i)$, όπου το V_{fi} αντικαθίσταται από τη σχέση

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} + \ldots$$

Ποιά είναι η σχέση για την επόμενη διόρθωση (3ης τάξης σε V). (Π)

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$W_{fi} = \lim_{T \to \infty} \frac{\left| T_{fi} \right|^2}{T}$$

και

$$T_{fi} = -iV_{fi} 2\pi\delta(E_f - E_i) - i \left(\sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \right) 2\pi\delta(E_f - E_i) =$$

$$= -i2\pi\delta(E_f - E_i) \left[V_{fi} + \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \right]$$

Οπότε

$$\frac{1}{T}|T_{fi}|^2 = \frac{1}{T}\left(2\pi\delta(E_f - E_i)\right)^2 \left[V_{fi} + \sum_{n\neq i}\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon}\right]^2 =$$

$$= 2\pi\delta(E_f - E_i)\left[V_{fi} + \sum_{n\neq i}\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon}\right]^2$$

Και το W_{fi} γράφεται

$$W_{fi} = 2\pi\int dE_f\,\rho(E_f)\delta(E_f - E_i)\left[V_{fi} + \sum_{n\neq i}\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon}\right]^2 =$$

$$= 2\pi\rho(E_i)\left[V_{fi} + \sum_{n\neq i}\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon}\right]^2$$

Για την επόμενη διόρθωση θα έχουμε

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n - i\epsilon} V_{ni} +$$
$$+ \sum_{n_2 \neq n_1} \sum_{n_1 \neq i} V_{fn_2} \frac{1}{E_{n_1} - E_{n_2} + i\epsilon} V_{n_2 n_1} \frac{1}{E_i - E_{n_1} + i\epsilon} V_{n_1 i} + \ldots$$

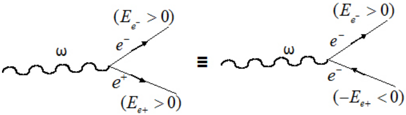
Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο κανόνας $\int \phi^*_{\text{outgoing}} V \phi_{\text{ingoing}}\, d^4x$ πληροί τη διατήρηση ενέργειας στην περίπτωση της δημιουργίας ζεύγους e^+e^- ή στην αντίστοιχη εξαΰλωση. Να γίνει το ίδιο και για την διατήρηση της ορμής. Ο όρος του φωτονίου είναι $e^{-i(\omega t - \mathbf{px})}$ (Π)

Λύση

Δίδυμη γένεση

$$\int \left(e^{-iE_{e^-}t}\right)^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_{e^+})t}\, dt = 2\pi\delta\left(E_{e^+} - \omega + E_{e^-}\right)$$

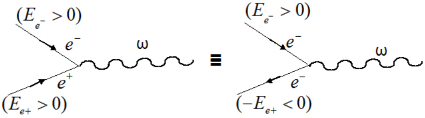
δηλαδή $\omega = E_{e^+} + E_{e^-}$



Για την εξαΰλωση

$$\int \left(e^{-i(-E_{e^+} t)}\right)^* \left(e^{-i\omega t}\right)^* e^{-iE_{e^-} t}\, dt = 2\pi\delta\left(-E_{e^+} + \omega - E_{e^-}\right)$$

δηλαδή, και πάλι, $\omega = E_{e^+} + E_{e^-}$.



Άσκηση 6 Δείξτε ότι η Klein-Gordon

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)^2 \phi = (-i\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A})^2 \phi + m^2\phi$$

παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f, \qquad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

και την αλλαγή φάσης της κυματοσυνάρτησης $\phi' = \phi e^{iqf}$.
(Π)

Λύση

Με $A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu f$ και $\phi' = e^{iqf}\phi$ έχουμε

$$\left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\phi' = \left(\partial^\mu + iqA^\mu - iq\partial^\mu f\right)e^{iqf}\phi =$$
$$e^{iqf}\partial^\mu\phi + iq(\partial^\mu f)\phi e^{iqf} + iqA^\mu\phi e^{iqf} - iq(\partial^\mu f)e^{iqf}\phi =$$
$$= e^{iqf}\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\phi$$

Δηλαδή η έκφραση $\Phi = \left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\phi$ μετασχηματίζεται όπως η ϕ.

Επομένως

$$\left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right)\phi' = \left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\Phi' =$$
$$= e^{iqf}\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\Phi = e^{iqf}\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\phi$$

Και

$$\left[\left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right) + m^2\right]\phi' = 0 \rightarrow$$
$$e^{iqf}\left[\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) + m^2\right]\phi = 0$$
$$\left[\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) + m^2\right]\phi = 0$$

Άσκηση 7 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε συναλλοίωτη μορφή ως $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ όπου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία επιλογής της βαθμίδας μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι $\Box^2 A^\mu = j^\mu$.(Π)

Λύση

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} F^{12} &= -F^{21} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_z = -B_z \\ -F^{13} &= F^{31} = -\partial_z A_x + \partial_x A_z = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_y = -B_y \\ F^{23} &= -F^{32} = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x = -B_x \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} F^{01} &= -F^{10} = \partial_t A_x + \partial_x V = -E_x \\ F^{02} &= -F^{20} = \partial_t A_y + \partial_y V = -E_y \\ F^{03} &= -F^{30} = \partial_t A_z + \partial_z V = -E_z \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\text{για } \nu = 0: \quad \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_x F^{10} + \partial_y F^{20} + \partial_z F^{30} = \\ = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = j^0$$

$$\text{για } \nu = 1: \quad \partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_t F^{01} + \partial_y F^{21} + \partial_z F^{31} = \\ = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = \\ = -\partial_t E_x + (\nabla \times \mathbf{B})_x = j_x$$

Όμοια, $\partial_\mu F^{\mu 2} = j_y$ και $\partial_\mu F^{\mu 3} = j_z$. Άρα, πράγματι $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\rho, \mathbf{j}) = j^\nu$. Τέλος

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \Box^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)$$

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$. Οπότε, μπορώ νε επιλέξω κατάλληλα την συνάρτηση χ έτσι ώστε να έχω $\partial_\mu A^\mu = 0$. Επομένως, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box^2 A^\nu$

Άσκηση 8 Δείξτε ότι η έκφραση $F = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B$ είναι, για $\mathbf{p}_A$ και $\mathbf{p}_B$ συγγραμικά και με αντίθετη φορά, ίση με $4\left(|\mathbf{p}_A|E_B + |\mathbf{p}_B|E_A\right)$ και στη συνέχεια ότι είναι ίση με $4\left[\left(p_A^\mu p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2}$, οπότε και σχετικιστικά αναλλοίωτη.
(Π)
Λύση

$$F = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B = \left|\frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B}\right| 4E_A E_B =$$
$$= 4\left|\mathbf{p}_A E_B - \mathbf{p}_B E_A\right| = 4\left(|\mathbf{p}_A|E_B + |\mathbf{p}_B|E_A\right)$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα ($p_A = |\mathbf{p}_A|$ και $p_B = |\mathbf{p}_B|$)

$$
\begin{aligned}
&\left(p_A^{\mu} \cdot p_{B\mu}\right)^2 = (E_A E_B - \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 = (E_A E_B + p_A p_B)^2 = \\
&= (E_A E_B)^2 + (p_A p_B)^2 + 2 E_A E_B p_A p_B = \\
&= \left(p_A^2 + m_A^2\right)\left(p_B^2 + m_B^2\right) + p_A^2 p_B^2 + 2 E_A E_B p_A p_B = \\
&= p_A^2 m_B^2 + p_B^2 m_A^2 + p_A^2 p_B^2 + m_A^2 m_B^2 + p_A^2 p_B^2 + 2 E_A E_B p_A p_B = \\
&= p_A^2\left(m_B^2 + p_B^2\right) + p_B^2\left(m_A^2 + p_A^2\right) + 2 E_A E_B p_A p_B + m_A^2 m_B^2 \\
&= p_A^2 E_B^2 + p_B^2 E_A^2 + 2 E_A E_B p_A p_B + m_A^2 m_B^2 = \\
&(p_A E_B + p_B E_A)^2 + m_A^2 m_B^2
\end{aligned}
$$

Άρα, πράγματι, $(p_A E_B + p_B E_A)^2 = \left(p_A^{\mu} \cdot p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2$

Άσκηση 9 Δείξτε ότι στο σύστημα Κ.Μ. της $A + B \to C + D$ οι όροι F και dQ στον τύπο της ενεργού διατομής

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)}{2E_A \, |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| \, 2E_B} \frac{Vd^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{Vd^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} |\mathcal{M}|^2$$
$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ$$

γίνονται

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} \, d\Omega, \qquad F = 4p_i\sqrt{s}, \quad s = (E_A + E_B)^2$$

όπου $p_i = |\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $p_f = |\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D|$ και $d\Omega$ η στοιχειώδης στερεά γωνία γύρω από την $\mathbf{p}_C$. Οπότε, η ενεργός διατομή στο Κ.Μ. γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s}$$

(Π)

Λύση

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2}\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\frac{d^3p_C}{2E_C}\frac{d^3p_D}{2E_D}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\delta(E_A + E_B - E_C - E_D)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_D)\frac{d^3p_C}{2E_C}\frac{d^3p_D}{2E_D}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\delta(E_C + E_D - \sqrt{s})\frac{p_f^2}{2E_D 2E_C}\, dp_f\, d\Omega$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε (α) από τη χρήση της συνάρτησης $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_D)$ και ολοκλήρωσης ως προς d^3p_D, (β) $d^3p_C = p_C^2 dp_C d\Omega$, και τέλος (γ) από το ότι στο Κ.Μ., $s = (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2$ και ότι $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| = p_f$. Ας δούμε τώρα την συνάρτηση $\delta(E_C + E_D - \sqrt{s})$. Έχουμε τη σχέση $E_C + E_D = (p_f^2 + m_C^2)^{1/2} + (p_f^2 + m_D^2)^{1/2}$ και την ιδιότητα της συνάρτησης δ

$$\int dx\, f(x)\,\delta\left(g(x) - K\right) = \frac{f(x_0)}{\left|\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}}, \qquad \text{όπου } g(x_0) = K$$

Στην περίπτωσή μας, η $g(x)$ είναι η $E_C + E_D$ ως συνάρτηση του p_f. Οπότε, θα χρειαστούμε

$$\frac{d(E_C + E_D)}{dp_f} = p_f \left(\frac{1}{E_C} + \frac{1}{E_D} \right) = p_f \frac{\sqrt{s}}{E_C E_D}$$

(από διατήρηση ενέργειας: $E_A + E_B = E_C + E_D$). Επομένως

$$\int \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) p_f^2 \, dp_f = \frac{{p_f^o}^2}{p_f^o \sqrt{s}} E_C E_D = \frac{p_f^o}{\sqrt{s}} E_C E_D$$

όπου p_f^o είναι το κατάλληλο μέτρο της (τρι)ορμής που ικανοποιεί την $E_C + E_D = \sqrt{s}$.
Άρα, το dQ γράφεται

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4\pi^2} \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) \frac{p_f^2 \, dp_f \, d\Omega}{2E_D 2E_C} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f^o}{4\sqrt{s}} d\Omega \end{aligned}$$

Για τη ροή F έχουμε

$$F = 4\left[\left(p_A^{\mu}\cdot p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2} = 4\left[\left(E_A E_B + p_i^2\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2} =$$

$$= 4\left[\left(p_i^2 + m_A^2\right)\left(p_i^2 + m_B^2\right) + p_i^2 p_i^2 + 2E_A E_B p_i^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2}$$

$$= 4\left[2p_i^2 p_i^2 + p_i^2\left(m_A^2 + m_B^2\right) + 2E_A E_B p_i^2\right]^{1/2}$$

$$= 4p_i\left[2p_i^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B\right]^{1/2} =$$

$$= 4p_i\left[E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B\right]^{1/2} = 4p_i(E_A + E_B) = 4p_i\sqrt{s}$$

και, επομένως, για τη διαδικασία $A + B \to C + D$ στο Κ.Μ. έχουμε

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{p_f}{p_i}\,|\mathcal{M}|^2$$

Άσκηση 10 Στο Κ.Μ. και για υψηλές ενέργειες, η σκέδαση ''ηλεκτρονίου''-''μιονίου'' δίνεται από τη σχέση

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \frac{\alpha^2}{4s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

όπου $\alpha = e^2/(4\pi)$ και θ είναι η γωνία σκέδασης στο κέντρο μάζας. (Π)

Λύση

Σε υψηλές ενέργειες, οι μάζες αμελούνται, οπότε $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = p$ και $E = p$. Άρα, σ' αυτή τη περίπτωση έχουμε μόνο μια μεταβλητή: p και τη γωνία σκέδασης βέβαια). Οπότε, ξεκινώντας από το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \frac{\left[(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu\right]^2}{\left[(p_C - p_A)^\mu (p_C - p_A)_\mu\right]^2}$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
&(p_A + p_C)^\mu = (2p, \mathbf{p_i} + \mathbf{p_f}) \\
&(p_B + p_D)^\mu = (2p, -\mathbf{p_i} - \mathbf{p_f}) \\
&(p_A + p_C)^\mu \, (p_B + p_D)_\mu = 4p^2 + 2p^2 + 2p^2 \cos\theta = 2p^2(3 + \cos\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(p_C - p_A)^2 = (p - p, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2 = (0, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2 \\
&= -p^2 - p^2 + 2p^2 \cos\theta = -2p^2(1 - \cos\theta)
\end{aligned}
$$

Επομένως, το αναλλοίωτο πλάτος γράφεται

$$
|\mathcal{M}|^2 = e^4 \frac{4p^4(3 + \cos\theta)^2}{4p^4(1 - \cos\theta)^2}
$$

και η ενεργός διατομή

$$
\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \frac{e^4}{64\pi^2 s} \frac{(3 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{\alpha^2}{4s} \frac{(3 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2}
$$

Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1 + 2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

(Π)

Λύση

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int \frac{1}{2E_A} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \, \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_A) = \\
&= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{1}{E_1 E_2} d^3 p_1 \, d^3 p_2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_A) = \\
&= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{1}{E_1 E_2} d^3 p_1 \, \delta(E_1 + E_2 - m_A) = \\
&= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{d\Omega}{E_1 E_2} p_1^2 dp_1 \delta \left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_A \right)
\end{aligned}$$

Αλλά ($m_A = E_1 + E_2,\ p_1 = p_2 = p_f$)

$$\int p_1^2 dp_1 \delta\left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_A\right) = \frac{p_f^2}{p_f \frac{m_A}{E_1 E_2}}$$

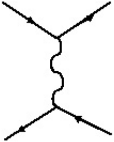
Οπότε

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{d\Omega}{E_1 E_2} \frac{p_f}{m_A} E_1 E_2 = \\ &= \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 d\Omega\end{aligned}$$

Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ και $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. (Π)

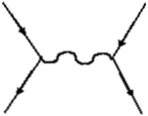
Λύση

$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$



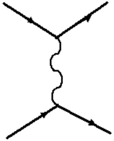
$(ie)^2 \frac{(p_A+p_C)(-p_B-p_D)}{(p_A-p_C)^2}$

$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$



$(ie)^2 \frac{(p_A-p_B)(p_D-p_C)}{(p_A+p_B)^2}$

$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$



$(ie)^2 \frac{(p_A+p_C)(p_B+p_D)}{(p_A-p_C)^2}$

Η κατάλληλη εναλλαγή από την $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ στην $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ είναι $p_B \leftrightarrow -p_D$. Η αντίστοιχη από την $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ στην $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ είναι $p_B \leftrightarrow -p_C$.

Άσκηση 13 Δείξτε ότι $s + t + u = \sum m_i^2$
(Π)
Λύση

$$s + t + u = (p_A + p_B)^2 + (p_A - p_C)^2 + (p_A - p_D)^2 =$$
$$m_A^2 + m_B^2 + 2p_A p_B + m_A^2 + m_C^2 - 2p_A p_C + m_A^2 + m_D^2 - 2p_A p_D =$$
$$= 3m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 +$$
$$+ 2(E_A E_B - \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B - E_A E_C + \mathbf{p}_A \mathbf{p}_C - E_A E_D + \mathbf{p}_A \mathbf{p}_D) =$$
$$= 3m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 +$$
$$+ 2(E_A E_B - \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B) - 2E_A(E_C + E_D) + 2\mathbf{p}_A(\mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D) =$$
$$= 3m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 +$$
$$+ 2(E_A E_B - \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B) - 2E_A(E_A + E_B) + 2\mathbf{p}_A(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) =$$

$$= 3m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 - 2(E_A^2 - \mathbf{p}_A^2) =$$
$$= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, η φυσική περιοχή των μεταβλητών είναι $t=0$ και $su=(M^2-m^2)^2$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam. (Π)

Λύση

Στο Κ.Μ. έχουμε

$$s=(p_A+p_B)^2=m^2+M^2+2(E_AE_B+p^2)\geq(m+M)^2$$

$$t=(p_A-p_C)^2=2m^2-2p_Cp_A=2m^2-2(E_A^2-p^2\cos\theta)=$$

$$=2p^2(\cos\theta-1),\quad \text{άρα}\quad -4p^2\leq t\leq 0$$

Πρέπει να εκφράσουμε το p ως συνάρτηση του s ή/και u για να βρούμε την καμπύλη όπου το t είναι ελάχιστο. Από την έκφραση για το s έχουμε

$$-2E_AE_B=2p^2-s+M^2+m^2$$

$$4(m^2+p^2)(M^2+p^2)=(2p^2-s+M^2+m^2)^2$$

$$4m^2M^2=(M^2+m^2-s)^2-4p^2s$$

$$4p^2=\frac{(M^2+m^2-s)^2-4m^2M^2}{s}$$

Επομένως

$$t_{min} = -\frac{1}{s}\left[(M^2+m^2-s)^2 - 4m^2M^2\right]$$

που είναι μια παραβολή. Να βρούμε τις ασύπτωτες ευθείες

$$\text{για} \quad s \to 0^+ \quad \text{τότε} \quad t_{min} \to -\infty$$

Για $s \to \infty$ τότε $t_{min} \to -\infty$ με ασύπτωτη που την βρίσκουμε γράφοντας το t_{min}

$$t_{min} = -\left(\frac{s^2}{s} - \frac{2s(M^2+m^2)}{s} + \frac{1}{s}(\cdots)\right)$$

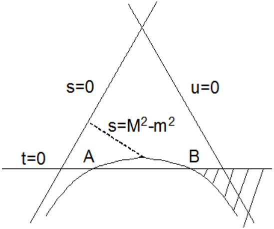
οπότε η ασύμπτωτη είναι η $t = -s + 2(M^2+m^2)$ ή άλλως $0 = -t - s + 2(M^2+m^2)$ ή $u = 0$. Τα σημεία A και B αντιστοιχούν στον μηδενισμό της t_{min}

$$(M^2+m^2-s)^2 = 4m^2M^2$$

$$s^2 + (M^2+m^2)^2 - 2s(M^2+m^2) = 4M^2m^2$$

$$\left[s-(M+m)^2\right]\left[s-(M-m)^2\right] = 0$$

Επίσης μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της καμπύλης t_{min}. Μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς s βρίσκουμε ότι το μέγιστο αντιστοιχεί στην τιμή $s = (M^2 - m^2)$ που δεν ανήκει στην φυσική περιοχή του s (στην αρχή της άσκησης είχαμε βρει $s \geq (m + M)^2$). Γι' αυτήν την τελευταία τιμή του s, το $t = 0$. Είναι το σημείο B.



Από την εξίσωση του t_{min}, εύκολα παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
st &= 4M^2m^2 - (M^2 + m^2 - s)^2 \rightarrow \\
s(2M^2 + 2m^2 - s - u) &= 4M^2m^2 - M^4 - m^4 - s^2 \\
&\quad - 2M^2m^2 + 2M^2s + 2m^2s \rightarrow \\
-su &= 2M^2m^2 - M^4 - m^4 = -(M^2 - m^2)^2
\end{aligned}
$$

Άσκηση 15 Ελέγξτε ότι η Εξ.12 είναι της μορφής

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s,t,u) = \mathcal{M}_{e^-e^-}(u,t,s)$$

(Π)

Λύση

Η Εξ.12 είναι η

$$\mathcal{M}_{e^-e^+\to e^-e^+}(p_A,p_B,p_C,p_D) = \mathcal{M}_{e^-e^-\to e^-e^-}(p_A,-p_D,p_C,-p_B)$$

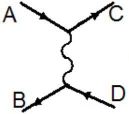
Οπότε, για τις δυο σκεδάσεις έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} s &= (p_A+p_B)^2 & \qquad s &= (p_A-p_D)^2 \\ t &= (p_A-p_C)^2 & \qquad t &= (p_A-p_C)^2 \\ u &= (p_A-p_D)^2 & \qquad u &= (p_A+p_B)^2 \end{aligned}$$

οπότε φαίνεται άμεσα το crossing $s \longleftrightarrow u$.

$$\boxed{e^- e^+ \to e^- e^+}$$

$$\sim \frac{(p_A - p_B)^\mu (p_C - p_D)_\mu}{(p_A + p_B)^2}$$

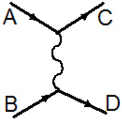


$$\sim \frac{(p_A + p_C)^\mu (-p_B - p_D)_\mu}{(p_A - p_C)^2}$$

$$\boxed{e^- e^- \to e^- e^-}$$

$$\sim \frac{(p_A + p_D)^\mu (p_B + p_C)_\mu}{(p_A - p_D)^2}$$

$$\sim \frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_A - p_C)^2}$$



$$p_B \leftrightarrow -p_D$$

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1. (Π)

Λύση

Τα a_i και β, όντας στην Χαμιλτονιανή, θα πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες.

$$Tr[a_i] = Tr[\beta^2 a_i] = Tr[(\beta)(\beta a_i)] = Tr[(\beta a_i)(\beta)] =$$
$$= -Tr[\beta\beta a_i] = -Tr[\beta^2 a_i] = -Tr[a_i] \rightarrow Tr[a_i] = 0$$

από την αντιμεταθετικότητα των a_i και β και $\beta^2 = 1$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνεται ότι $Tr[\beta] = 0$.

Μιας $\beta^2 = a_i^2 = 1$, γράφοντας τους πίνακες σε διαγώνια μορφή (με έναν μοναδιαίο μετασχηματισμό), θα πρέπει το τετράγωνο κάθε ιδιοτιμής να είναι ίσο με $+1$. Άρα, κάθε ιδιοτιμή είναι ίση με ± 1.

Επειδή $Tr[\beta \text{ ή } a_i] = \Sigma[\text{ιδιοτιμών}] = 0$, θα πρέπει να έχουμε ίσο αριθμό $+1$ και -1. Δηλαδή άρτιες διαστάσεις.

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon. (Π)

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του Dirac επί $\gamma^\nu\partial_\nu$ από αριστερά

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 &\to i\gamma^\nu\partial_\nu\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \gamma^\nu\partial_\nu m\psi = 0 \\ &\to i\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu\psi - \gamma^\nu\partial_\nu m\psi = 0 \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τους 'τυφλούς' δείκτες $\mu \leftrightarrow \nu$ στον πρώτο όρο παίρνουμε

$$i\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\psi - \gamma^\nu\partial_\nu m\psi = 0$$

και αθροίζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, χρησιμοποιώντας ότι $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ και $\gamma^\nu\partial_\nu\psi = -im\psi$, έχουμε

$$2ig^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu\psi - 2\gamma^\nu\partial_\nu m\psi = 0 \to \Box^2\psi + m^2\psi = 0$$

Άσκηση 18 Δείξτε ότι οι 4 λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι ορθογώνιες

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)} = 0, \quad r \neq s$$

(Π)

Λύση

Για $r, s = 1, 2$ ή $3, 4$ έχουμε

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)} = \left(\chi^{T(r)}\, \chi^{T(r)}\frac{\sigma^{\dagger}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right)\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

ή

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)} = \left(-\chi^{T(r)}\frac{\sigma^{\dagger}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\,\chi^{T(r)}\right)\begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

Γράφοντας το $\chi^{(s)}$ ως $\begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix}$, παίρνουμε και στις δυο περιπτώσεις ($\sigma^{\dagger} = \sigma$ και $|E| = E$ για την περίπτωση $s = 1, 2$)

$$
\left(\delta^{1r}\,\delta^{2r}\right)\begin{pmatrix}\delta^{1s}\\ \delta^{2s}\end{pmatrix}+\left(\delta^{1r}\,\delta^{2r}\right)\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\begin{pmatrix}\delta^{1s}\\ \delta^{2s}\end{pmatrix}=
$$

$$
=\left(1+\frac{\mathbf{p}^2}{(|E|+m)^2}\right)\delta^{rs}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $(\sigma\cdot\mathbf{p})(\sigma\cdot\mathbf{p})=\mathbf{p}^2$. Για $r=1,2$ και $s=3,4$ (ή $r=3,4$ και $s=1,2$) έχουμε

$$
\left(\delta^{1r}\,\delta^{2r}\right)\frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\begin{pmatrix}\delta^{1s}\\ \delta^{2s}\end{pmatrix}+\left(\delta^{1r}\,\delta^{2r}\right)\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix}\delta^{1s}\\ \delta^{2s}\end{pmatrix}=0
$$

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+\beta m$, $[H,\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}]=0$. (Π)

Λύση

Οι πίνακες β και $\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ είναι διαγώνιοι, οπότε μετατίθενται. Επομένως θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $[\mathbf{a}\cdot\mathbf{p},\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}]=0$.

$$[a_i p_i,\Sigma_j\hat{p}_j]=[a_i,\Sigma_j]\frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|}=\left[\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\ \sigma_i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_j&0\\ 0&\sigma_j\end{pmatrix}\right]\frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|}=$$
$$\begin{pmatrix}0&\sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i\\ \sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i&0\end{pmatrix}\frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|}=2\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}0&\sigma_k\\ \sigma_k&0\end{pmatrix}\frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|}=0$$

γιατί το ϵ_{ijk} είναι αντισυμμετρικό στα i,j ενώ το $p_i p_j$ είναι συμμετρικό.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή 1/2. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλτονιανή δεν μετατίθεται με τη στροφορμή $\mathbf{L}$ αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ (Π)

Λύση

Να βρούμε την ποσότητα $[H, \mathbf{L}]$, όπου $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ και γνωρίζουμε ότι $[r_i, p_j] = i\delta_{ij}$. Οπότε

$$[H, \mathbf{L}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] + [\beta m, \mathbf{L}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{r} \times \mathbf{p}] = a_i[p_i, r_j p_k]\epsilon^{mjk}$$
$$= a_i[p_i, r_j]p_k\epsilon^{mjk} = -ia_i p_k \epsilon^{mjk}\delta_{ij} = -ia_i p_k \epsilon^{mik} = -i\mathbf{a} \times \mathbf{p}$$

Άρα, η στροφορμή δεν διατηρείται. Ας υπολογίσουμε τώρα το $[H, \mathbf{\Sigma}]$.

$$[H, \mathbf{\Sigma}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{\Sigma}] + [m\beta, \mathbf{\Sigma}] = [a_i, \Sigma_j]p_i + [\beta, \mathbf{\Sigma}]m =$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}\right] p_i = \begin{pmatrix} 0 & 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i =$$
$$2i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i = 2i(\mathbf{a} \times \mathbf{p})$$

Επομένως, $[H, \mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}] = 0$, δηλαδή, η συνολική διατηρήσιμη στροφορμή είναι $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$ (Π)

Λύση

Η ελάχιστη αντικατάσταση $p^\mu \to p^\mu + eA^\mu$ σημαίνει $E \to E + eV$ και $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + e\mathbf{A}$. Οπότε θα έχουμε από την εξίσωση του Dirac

$$E\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \beta m)\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \to$$

$$(E + eV)\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m)\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \to$$

$$(E + eV)\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $(E + eV)\psi_A = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\psi_B + m\psi_A$. Αλλά, $\psi_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})}{2m}\psi_A$ $(eV << E \sim m)$. Άρα παίρνουμε

$$(E + eV - m)\psi_A = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \frac{1}{2m} \psi_a$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (*), παίρνουμε,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})$$
$$= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A}) + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{p})$$
$$= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i)\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

Για να καταλάβουμε πώς πήγαμε από την δεύτερη στην τρίτη γραμμή της προηγούμενης σχέσης ας δούμε πώς η x-συνιστώσα δρα σε ένα ψ

$$[(\mathbf{p} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{p})]_x \psi = -i\,[\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \boldsymbol{\nabla}]_x \psi =$$
$$= -i\,[\partial_y A_z - \partial_z A_y + A_y \partial_z - A_z \partial_y]\,\psi$$
$$= -i\,[(\partial_y A_z)\psi + A_z \partial_y \psi - (\partial_z A_y)\psi - A_y \partial_z \psi + A_y \partial_z \psi - A_z \partial_y \psi]$$
$$= -i\,[\partial_y A_z - \partial_z A_y]\,\psi = -i(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x \psi$$

Οπότε η εξίσωση Dirac γίνεται

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\right]\psi_A$$

που είναι ακριβώς η εξίσωση του Pauli.
(*) Από $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ και $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ παίρνουμε αθροίζοντας κατά μέλη

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Οπότε

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \sigma_i a_i\, \sigma_j b_j = a_i b_j \sigma_i \sigma_j = a_i b_j\left(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\right)\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

Άσκηση 22 Δείξτε ότι με την συγκεκριμένη μορφή των πινάκων γ, η μορφή $C\gamma^0 = i\gamma^2$ πληροί την συνθήκη $-C\gamma^0\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu C\gamma^0$. (Π)

Λύση

Θα πρέπει $-i\gamma^2\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu i\gamma^2 \to -\gamma^2\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu\gamma^2$ Αλλά, $(\gamma^{0,1,3})^* = \gamma^{0,1,3}$ και $\gamma^{2*} = -\gamma^2$, οπότε, για $\mu = 0, 1, 3$ η σχέση γίνεται

$$-\gamma^2\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu\gamma^2 \to -\gamma^2\gamma^\mu = \gamma^\mu\gamma^2$$

πράγμα αληθές λόγω της σχέσης $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$.
Για $\mu = 2$, η σχέση γίνεται

$$-\gamma^2\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu\gamma^2 \to \left(\gamma^2\right)^2 = \left(\gamma^2\right)^2$$

πράγμα αληθές.

Άσκηση 23 Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις $C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T$, $C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$, $\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1}$. (Π)

Λύση

Από το $C\gamma^0 = i\gamma^2$ παίρνουμε ότι $C = i\gamma^2\gamma^0$. Οπότε

$$\begin{aligned}
C^{-1}\gamma^\mu C &= \left(i\gamma^2\gamma^0\right)^{-1}\gamma^\mu i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^{0^{-1}}\gamma^{2^{-1}}\gamma^\mu i\gamma^2\gamma^0 = \\
&= -\gamma^0\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2(2g^{\mu 2} - \gamma^2\gamma^\mu)\gamma^0 = \\
&= -2g^{\mu 2}\gamma^0\gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^\mu\gamma^0 = 2g^{\mu 2}\gamma^2 - \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \\
&= 2g^{\mu 2}\gamma^2 - 2g^{0\mu}\gamma^0 + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^0 = 2g^{\mu 2}\gamma^2 - 2g^{0\mu}\gamma^0 + \gamma^\mu
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\gamma^{0^2} = I$, $\gamma^{i^2} = -I$ και $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$.

Διακρίνουμε σε περιπτώσεις ($\gamma^{0^T} = \gamma^0$, $\gamma^{2^T} = \gamma^2$, $(\gamma^{1,3})^T = -\gamma^{1,3}$)

$$\begin{aligned}
\mu = 2, &\quad C^{-1}\gamma^2 C = -\gamma^2 = -(\gamma^2)^T \\
\mu = 0, &\quad C^{-1}\gamma^0 C = -\gamma^0 = -(\gamma^0)^T \\
\mu = 1, 3, &\quad C^{-1}\gamma^\mu C = \gamma^\mu = -(\gamma^\mu)^T
\end{aligned}$$

Επίσης

$$C^{-1} = \left(i\gamma^2\gamma^0\right)^{-1} = -i\gamma^{0^{-1}}\gamma^{2^{-1}} = i\gamma^0\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0 = -C$$

$$C^\dagger = \left(i\gamma^2\gamma^0\right)^\dagger = -i\gamma^{0^\dagger}\gamma^{2^\dagger} = i\gamma^0\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0 = -C$$

$$C^T = \left(i\gamma^2\gamma^0\right)^T = i\gamma^{0^T}\gamma^{2^T} = i\gamma^0\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0 = -C$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τις $\gamma^{0^\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{i^\dagger} = -\gamma^i$. Τέλος, $\bar{\psi}_C = \psi_C^\dagger\gamma^0 = \left(C\gamma^0\psi^*\right)^\dagger\gamma^0 = \psi^T\gamma^{0\dagger}C^\dagger\gamma^0 = \psi^T\gamma^0 C^{-1}\gamma^0 = -\psi^T C^{-1}$.

Άσκηση 24 Δείξτε τις σχέσεις πληρότητας

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m$$

(Π)

Λύση

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)u^{(s)\dagger}(p)\gamma^0 =$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right) \gamma^0 N^2 =$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix} & -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} N^2 =$$

$$\sum_s \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} (E+m) & -\begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} & -\frac{p^2}{E+m} \begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} \end{array} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} (E+m) & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -(E-m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -p^0 \end{pmatrix} + mI$$

Το τελευταίο φαίνεται ότι είναι ίσο με $p^0\gamma^0 - p^i\gamma^i + m = \not{p} + m$.
Όμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

Άσκηση 25 Δείξτε ότι $\not{p}\not{p} = p^2$ (Π)
Λύση

$$\not{p}\not{p} = p^\mu \gamma_\mu p^\lambda \gamma_\lambda = \gamma_\mu \gamma_\lambda p^\mu p^\lambda$$

Αλλάζοντας τα ονόματα στους 'τυφλούς' δείκτες έχουμε

$$\not{p}\not{p} = \gamma_\lambda \gamma_\mu p^\lambda p^\mu$$

Αθροίζοντας κατά μέλη

$$2\not{p}\not{p} = [\gamma_\mu, \gamma_\lambda]_+ p^\lambda p^\mu = 2g_{\mu\lambda} p^\lambda p^\mu = 2p^2$$

Άσκηση 26 Δείξτε ότι οι τελεστές

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad \Lambda_- = \frac{-\not{p} + m}{2m}$$

προβάλλουν τις καταστάσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Ελέγξτε ότι, ως προβολικοί τελεστές, υπακούουν στους κανόνες: $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$ και $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$. (Π)

Λύση

Ένα τυχαίο spinor γράφεται ως $\sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)}$. Οπότε

$$\Lambda_+ \sum_{r=1}^{4} a_r u^{(r)} = \frac{\not{p} + m}{2m} \sum_{r=1}^{4} a_r u^{(r)} = \frac{1}{2m} \sum_{s=1}^{2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} \sum_{r=1}^{4} a_r u^{(r)} =$$
$$\frac{1}{2m}(a_1 u^{(1)} \bar{u}^{(1)} u^{(1)} + a_2 u^{(2)} \bar{u}^{(2)} u^{(2)}) = \frac{1}{2m}(a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)}) 2m =$$
$$a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\bar{u}^{(s)} u^{(s')} = 2m\delta^{ss'}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\Lambda_- \sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)} = a_3 u^{(3)} + a_4 u^{(4)}$.

Εύκολα φαίνεται ότι $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$ και επίσης

$$\Lambda_+^2 = \frac{1}{4m^2}(\not{p} + m)^2 = \frac{p^2 + m^2 + 2\not{p}m}{4m^2} = \frac{2(\not{p} + m)m}{4m^2} = \frac{\not{p} + m}{2m}$$

και όμοια για τον Λ_-^2.

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση: $S_L^{-1}\gamma^{\sigma}S_L = \gamma^{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^{\dagger}\gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L\gamma^5$$

(Π)

Λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$S_L^{-1}\gamma^{\sigma}S_L = \gamma^{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$$

Ξεκινάμε με το αριστερό σκέλος. Για απειροστό μετασχηματισμό

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \to S_L^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \left(1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)\gamma^\sigma\left(1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)\\
&= \gamma^\sigma + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\sigma_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

Ας συγκεντρωθούμε στην παρένθεση της τελευταίας σχέσης. Εισάγοντας τον ορισμό του $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma^\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu\right) &=\\
\frac{i}{2}\Big(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - 2g_\mu^\sigma\gamma_\nu + 2g_\nu^\sigma\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma &\\
+2g_\nu^\sigma\gamma_\mu - 2g_\mu^\sigma\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma\Big) &=\\
-2i\left(g_\mu^\sigma\gamma_\nu - g_\nu^\sigma\gamma_\mu\right)&
\end{aligned}
$$

Οπότε, η αρχική σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\left(g_\mu^\sigma\gamma_\nu - g_\nu^\sigma\gamma_\mu\right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu - \epsilon^{\mu\sigma}\gamma_\mu\right) \qquad \left(\epsilon^{\sigma\mu} = -\epsilon^{\mu\sigma}\right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu + \epsilon^{\sigma\mu}\gamma_\mu\right) \\ &= \gamma^\sigma + \epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau g^{\nu\tau}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\gamma^\tau \end{aligned}$$

Αλλά το δεξί μέλος της αρχικής προς απόδειξη σχέσης γράφεται

$$\gamma^\tau\Lambda^\sigma{}_\tau = \gamma^\tau\left(\delta_\tau^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\right) = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\gamma^\tau$$

Οπότε, αποδείξαμε την αρχική σχέση

$$S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau\Lambda^\sigma{}_\tau$$

Για την σχέση $S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger\gamma^0$, προσέξτε ότι

$$\gamma^0\sigma_{\mu\nu}^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\nu^\dagger\gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger\gamma_\nu^\dagger\right)\gamma^0 = -\frac{i}{2}\left(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\right) = \sigma_{\mu\nu}$$

λόγω της ταυτότητας $\gamma^0\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu\gamma^0$.

Οπότε, εύκολα φαίνεται ότι

$$\gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} = S_L^{-1}$$

Η τελευταία σχέση, $\gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$ αποδεικνύεται εύκολα μιας και ο γ_5 αντιμετατίθεται με τους υπόλοιπους γ πίνακες, οπότε

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\gamma_5$$

Άσκηση 28 Δείξτε την παρακάτω σχέση (ανάπτυξη Gordon)

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

(Π)

Λύση

$$\bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu \right] u_i =$$

$$\bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu + i\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(p_f - p_i)_\nu \right] u_i =$$

$$\bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu p_{f_\nu} - \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu p_{i_\nu} + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu p_{i_\nu} + \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu p_{f_\nu} \right] u_i =$$

$$\bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu p_{f_\nu} - \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu p_{i_\nu} + m\gamma^\mu \right] u_i =$$

$$\bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu - p_f^\mu + \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu p_{f\nu} - p_i^\mu + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu p_{i\nu} + m\gamma^\mu \right] u_i =$$

$$\bar{u}_f 2m\gamma^\mu u_i = (2m)\bar{u}_f \gamma^\mu u_i$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση του Dirac: $(\not{p}_i - m)u_i = 0$ και $\bar{u}_f(\not{p}_f - m) = 0$ και ότι $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$.

Άσκηση 29 Δείξτε τα θεωρήματα των ιχνών
(Π)
Λύση
Για τα $Tr[I]=4$, $Tr[\gamma^\mu]=0$ και $Tr[\gamma^5]=0$ η απόδειξη είναι άμεση.
Για k περιττός

$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_k] = Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_k\gamma^5\gamma^5] = -Tr[\gamma^5\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_k\gamma^5]$$
$$= -Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_k\gamma^5\gamma^5] \to Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_k] = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(\gamma^5)^2 = 1$, την αντιμεταθετικότητα του γ^5 με τους πίνακες γ και την ιδιότητα $Tr[AB] = Tr[BA]$.

$$Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = Tr[\gamma^\nu\gamma^\mu] = \frac{1}{2}Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu] =$$
$$\frac{1}{2}Tr[2g^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}2g^{\mu\nu}Tr[I] = 4g^{\mu\nu}$$

Για k άρτιος

$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n] = 2(a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - Tr[\not{a}_2\not{a}_1...\not{a}_n] =$$
$$2(a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - 2(a_1 \cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + Tr[\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_1...\not{a}_n] =$$
$$2(a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - 2(a_1 \cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + ... - Tr[\not{a}_2...\not{a}_n\not{a}_1] =$$
$$2(a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - 2(a_1 \cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + ... - Tr[\not{a}_2...\not{a}_n\not{a}_1]$$

Ο τελευταίος όρος της τελευταίας γραμμής είναι ίσος με τον πρώτο της πρώτης γραμμής ($Tr[AB] = Tr[BA]$).Επομένως

$$2Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n] = 2(a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - 2(a_1 \cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + ... \rightarrow$$
$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n] = (a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - (a_1 \cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + ...$$
$$+ (a_1 \cdot a_n)Tr[\not{a}_2\not{a}_3...\not{a}_{n-1}]$$

Για το $Tr[\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu] = 0$.
Αν $\mu = \nu$, τότε

$$Tr[\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu] = \pm Tr[\gamma_5] = 0$$

μιας και $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$ και $\left(\gamma^i\right)^2 = -1$

Αν $\mu \neq \nu$,

$$Tr[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = Tr[i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu\gamma^\nu]$$

Τα μ και ν είναι ίσα με ένα από τα 0, 1, 2 και 3. Μετακινώντας τα, και χρησιμοποιώντας πάλι ότι $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$ και $\left(\gamma^i\right)^2 = -1$, θα καταλήξουμε σε ένα άθροισμα από ίχνη όπου το καθένα περιέχει δύο γάμμα πίνακες με ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥΣ δείκτες. Αλλά, $Tr[\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}$. Επομένως, καθένα από αυτά τα ίχνη θα είναι μηδέν.

Για το $Tr[\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Αν κάποιο ζευγάρι από τα μ, ν, ρ, σ είναι ίσα, τότε μπορούμε με μεταθέσεις καταλήξουμε σε άθροισμα ιχνών της μορφής $Tr[\gamma_5\gamma^\tau\gamma^\omega]$ που είναι ίσο με μηδέν, από την προηγούμενη ιδιότητα. Αν τρεις δείκτες είναι ίσοι καταλήγουμε σε ίχνος της μορφής $Tr[\gamma_5\gamma^\tau]$ που είναι μηδέν γιατί καταλήγουμε σε περιττό αριθμό γ πινάκων (αντικαθιστώντας το γ_5 με το ίσο του).

Οπότε, θα πρέπει οι δείκτες μ, ν, ρ, σ να είναι διαφορετικοί. Επίσης οποιαδήποτε εναλλαγή δύο κοντινών δεικτών οδηγεί σε αλλαγή προσήμου:

$$
\begin{aligned}
&Tr[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = \\
&2g_{\mu\nu} Tr[\gamma_5 \gamma^\rho \gamma^\sigma] - Tr[\gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = -Tr[\gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma]
\end{aligned}
$$

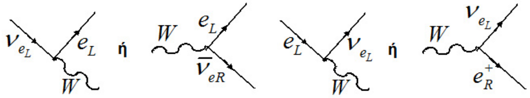
Επομένως, το ίχνος που ζητάμε είναι ανάλογο του $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Για να βρούμε τον νορμαλισμό μπορούμε να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση

$$
\begin{aligned}
&Tr[\gamma_5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = Tr[i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = \\
&- iTr[\gamma_5 \gamma_5] = -iTr[(\gamma^5)^2] = -4i
\end{aligned}
$$

Άσκηση 30 Δείξτε ότι στην διάσπαση $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ το e είναι αριστερόστροφο. Στην $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$, ποια είναι η χειραλικότητα του e^+;
(Π)

Λύση

Στην ασθενή αλληλεπίδραση έχουμε $\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_e$ ή $\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)e$



Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε αριστερόστροφα νετρίνα και δεξιόστροφα αντι-νετρίνα. Οπότε, στη διάσπαση $\mu^- \to \nu_\mu W^-$ και $W^- \to e\bar{\nu}_e$ το αντινετρίνο είναι δεξιόστροφο άρα το ηλεκτρόνιο είναι αριστερόστροφο. Αντίθετα στην $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu W^+$ και $W^+ \to e^+\nu_e$ το νετρίνο είναι αριστερόστροφο οπότε το ποζιτρόνιο είναι δεξιόστροφο.

Άσκηση 31 Δείξτε, με την παραπάνω μέθοδο, ότι για σωματίδια με spin=0, το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ είναι ανάλογο του $(t-u)/s = \cos\theta$
(Π)

Λύση

Από την Εξ.(17) βλέπουμε ότι όρος για μετάβαση $(0 \to 0)$ είναι $\cos\theta$. Από τις σχέσεις $\frac{1+\cos\theta}{2} = -u/s$ και $\frac{1-\cos\theta}{2} = -t/s$ εύκολα φαίνεται ότι $\cos\theta = (t-u)/s$

Άσκηση 32 Δείξτε, ότι η ενεργός διαφορική διατομή για σκέδαση ηλεκτρονίου από στόχο με spin=0 δίνεται από τον τύπο

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

(Π)

Λύση

Ακριβώς ανάλογα με τη σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου θα έχουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{e^4}{q^4}\, L^{\mu\nu}_{(e)} L'^{(\mu')}_{\mu\nu}$$

με

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}_{(e)} &= \frac{1}{2} Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu\right] = 2(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} kk') \\
L^{('\mu')}_{\mu\nu} &= (p+p')_\mu (p+p')_\nu \\
L^{\mu\nu}_{(e)} L^{('\mu')}_{\mu\nu} &= 2\left[2\left(k(p+p')\right)\left(k'(p+p')\right) - kk'(p+p')^2\right]
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε τις σχέσεις για το σύστημα εργαστηρίου, όπου $p=(M,0)$ και $k^2 = k'^2 = 0$

$$kp = ME, \qquad kp' = k(k - k' + p) = -kk' + ME,$$
$$k'p = ME', \qquad k'p' = k'(k - k' + p) = kk' + ME'$$
$$(p + p')^2 = 2M^2 + 2pp'$$
$$pp' = p(k - k' + p) = EM - E'M + M^2 = M(E - E' + M)$$

Έτσι έχουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{e^4}{q^4} 2 \left[2(2ME - kk')(2ME' + kk') - kk'(M^2 + pp')2 \right] =$$
$$= \frac{e^4}{q^4} 4 \left[4M^2EE' + 2MEkk' - 2ME'kk' - (kk')^2 - M^2kk' - \right.$$
$$\left. -(kk')(pp') \right]$$
$$= \frac{4e^4}{q^4} \left[4M^2EE' + (2M(E - E') - M^2 - pp' - kk')kk' \right] =$$
$$= \frac{4e^4}{q^4} \left[4M^2EE' + \right.$$
$$\left. \left(-q^2 - M^2 - \left(M^2 - \frac{q^2}{2} \right) + \frac{q^2}{2} \right) (-\frac{q^2}{2}) \right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $E - E' = -\frac{q^2}{2M}$,
$q^2 = (k-k')^2 = -2kk'$ και $pp' = M(E - E' + M) = M^2 - \frac{q^2}{2}$.
Συνεχίζοντας

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{4e^4}{q^4}\left[4M^2EE' + 2M^2\left(\frac{q^2}{2}\right)\right] = \frac{4e^4}{q^4}\,4M^2EE'\left[1 + \frac{q^2}{4EE'}\right]$$

$$= \frac{4e^4}{q^4}\,4M^2EE'\left[1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{16e^4}{q^4}\,M^2EE'\cos^2\frac{\theta}{2}$$

όπου $\frac{q^2}{4EE'} = \frac{(k-k')^2}{4EE'} = \frac{-2kk'}{4EE'} = -\frac{1}{2}\frac{EE'(1-\cos\theta)}{EE'} = -\sin^2\theta/2$.
Σε αντίθεση με τον αντίστοιχο τύπο για στόχο με spin=1/2

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{16e^4}{q^4}M^2EE'\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Το cross term του $e^-e^- \to e^-e^-$.

$$\left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right]\left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right]\left[\bar{u}(p')\gamma^\nu u(k)\right]^\dagger\left[\bar{u}(k')\gamma_\nu u(p)\right]^\dagger =$$
$$\left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right]\left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right]\left[\bar{u}(k)\gamma^\nu u(p')\right]\left[\bar{u}(p)\gamma_\nu u(k')\right] =$$
$$Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{p}'\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\right] = Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{p}'\gamma_\mu(2p_\nu - \gamma_\nu\not{p})\right] =$$
$$2Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\not{p}\not{p}'\gamma_\mu\right] - Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{p}'\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}\right] =$$

$$
\begin{aligned}
&-4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}\not{p}'\right]-2Tr\left[\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\gamma_{\mu}\not{p}'\not{p}\right]+Tr\left[\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}\not{p}'\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\not{p}\right]=\\
&-4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}\not{p}'\right]+4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}'\not{p}\right]-2Tr\left[\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\not{p}'\gamma_{\mu}\not{p}\right]=\\
&-4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}\not{p}'\right]+4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}'\not{p}\right]-4Tr\left[\not{k}'\not{p}'\not{k}\not{p}\right]+2Tr\left[\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\gamma_{\mu}\not{p}'\not{p}\right]=\\
&-4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}\not{p}'\right]+4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}'\not{p}\right]-4Tr\left[\not{k}'\not{p}'\not{k}\not{p}\right]-4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}'\not{p}\right]=\\
&-4Tr\left[\not{k}'\not{k}\not{p}\not{p}'\right]-4Tr\left[\not{k}'\not{p}'\not{k}\not{p}\right]=-4Tr\left[\not{p}'\not{k}'\not{k}\not{p}\right]-4Tr\left[\not{k}'\not{p}'\not{k}\not{p}\right]=\\
&-4Tr\left[(\not{p}'\not{k}'+\not{k}'\not{p}')\not{k}\not{p}\right]=-8Tr\left[(p'k')\not{k}\not{p}\right]=-32(p'k')(kp)=\\
&-32(s/2)(s/2)=-8s^2
\end{aligned}
$$

Άσκηση 33 Δείξτε πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_1 + i\epsilon_2\right), \quad \epsilon_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_1 - i\epsilon_2\right)$$

σε μια στροφή με γωνία θ γύρω από τον άξονα z. Τα διανύσματα αυτά ονόμαζονται διανύσματα κυκλικής πόλωσης και το δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα. (Π)

Λύση

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_1 + i\epsilon_2\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left((1,0,0) + i(0,1,0)\right) \rightarrow$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}}\left[(\cos\theta, \sin\theta, 0) + i(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}}\left[e^{-i\theta}, ie^{-i\theta}, 0\right] = -\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}(1, i, 0) = e^{-i\theta}\epsilon_R$$

Όμοια, $\epsilon_L \rightarrow e^{+i\theta}\epsilon_L$. Οπότε

$$\epsilon_{R,L} \rightarrow e^{-i\lambda_{R,L}\theta}\epsilon_{R,L} \quad \text{με} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_R = +1 \\ \lambda_L = -1 \end{array} \right.$$

Άσκηση 34 Δείξτε ότι για άμαζα σωματιδια με spin=1 στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)$$

(Π)

Λύση

Φαίνεται εύκολα ότι

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i} \epsilon_{\kappa_j}$$

Αυτός ο τελεστής, που έχει δύο δείκτες, i, j, θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυσμός των δύο τελεστών που μπορούμε να φτιάξουμε: δ_{ij} και $q_i q_j$

$$\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j} = A\delta_{ij} + Bq_iq_j$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\sum_i \epsilon_{\xi_i}$, $\xi = 1, 2$, και γνωρίζοντας ότι $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q} = \sum_i \epsilon_{\kappa_i} q_i = 0$ και $\boldsymbol{\epsilon}_\xi \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\kappa = \sum_i \epsilon_{\xi_i}\epsilon_{\kappa_i} = \delta_{\xi\kappa}$ έχουμε

$$\sum_i \epsilon_{\xi_i} \left[\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j} \right] = A \sum_i \epsilon_{\xi_i}\delta_{ij} + B \sum_i \epsilon_{\xi_i} q_i q_j$$

$$\sum_{\kappa=1,2} \delta_{\xi\kappa}\epsilon_{\kappa_j} = A\epsilon_{\xi_j} \rightarrow \epsilon_{\xi_j} = A\epsilon_{\xi_j}$$

Άρα, $A = 1$. Τώρα πολλαπλασιάζουμε, την αρχική σχέση, επί δ_{ij}

$$\delta_{ij} \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j} = \delta_{ij}\delta_{ji} + B\delta_{ij} q_i q_j$$

$$\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_i} = 3 + B\mathbf{q}^2 \rightarrow 1 + 1 = 3 + B\mathbf{q}^2$$

Άρα $B = -1/\mathbf{q}^2$, και $-q_iq_j/\mathbf{q}^2 = -\hat{q}_i\hat{q}_j$

Επομένως, έχουμε

$$\sum_{\lambda=L,R}(\epsilon_\lambda)_i^*(\epsilon_\lambda)_j = \sum_{\kappa=1,2}\epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j} = A\delta_{ij} + Bq_iq_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j$$

Άσκηση 35 Δείξτε ότι η σχέση πληρότητας για τα spin=1 με μάζα

$$\sum_{\lambda=-1,0,1} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \tag{27}$$

(Π)

Λύση

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, οι μόνοι τελεστές με δύο δείκτες που μπορούμε να φτιάξουμε είναι οι $g_{\mu\nu}$ και $p_\mu p_\nu$

$$\sum_{\lambda=-1,0,1} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = A g_{\mu\nu} + B p_\mu p_\nu$$

Πολλαπλασιάζοντας μια φορά επί p^ν και μια επί $g^{\mu\nu}$, παίρνουμε

$$p^\nu \sum_{\lambda=-1,0,1} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = A p_\mu + B p^2 p_\mu \to 0 = A + BM^2 \to A = -BM^2$$

$$g^{\mu\nu} \sum_{\lambda=-1,0,1} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = A4 + Bp^2 \to -1-1-1 = 4A - A \to A = -1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη σχέση ότι $p^\nu \epsilon_\nu = 0$ και ότι $(\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)^\mu = -1$, για $\lambda = -1, 0, +1$, στη δεύτερη. Επομένως $A = -1$ και $B = 1/M^2$.

Άσκηση 36 Δείξτε ότι δεν μπορείτε να ορίσετε τον αντίστροφο του $g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu$
(Π)
Λύση
Ο αντίστροφος του $-g_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu$ θα είναι της μορφής $Ag^{\nu\lambda} + Bp^\nu p^\lambda$ και θα πρέπει

$$\left[-g_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu\right]\left[Ag^{\nu\lambda} + Bp^\nu p^\lambda\right] = g_\mu^\lambda$$

Κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} -Ap^2 g_\mu^\lambda - Bp^2 p_\mu p^\lambda + Ap_\mu p^\lambda + Bp^2 p_\mu p^\lambda &= g_\mu^\lambda \\ A(-p^2 g_\mu^\lambda + p_\mu p^\lambda) &= g_\mu^\lambda \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε τα A και B.

Άσκηση 37 Η συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$ αφήνει ακόμα μια ελευθερία επιλογής του A^μ: $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ όπου $\Box^2\Lambda = 0$. Οπότε, η Εξ.(22) μπορεί να γραφεί

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu = j_\mu$$

και τότε ο αντίστροφος του τελεστή είναι

$$\frac{i}{q^2}\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]$$

(Π)

Λύση

Από τη συνθήκη Lorentz, μπορώ να αφαιρέσω από την εξίσωση του φωτονίου, $g^{\mu\nu}\Box^2 A_\nu = j^\mu$, την ποσότητα $\partial^\mu\partial^\nu(1-a)A_\nu$ που είναι ίση με μηδέν. Οπότε έχουμε την εξίσωση

$$g^{\mu\nu}\Box^2 A_\nu - \partial^\mu\partial^\nu(1-a)A_\nu = j^\mu$$

Ένα ερώτημα είναι αυτή η αλλαγή σε ποιο μετασχηματισμό βαθμίδας αντιστοιχεί; Ας ονομάσουμε A'_ν το πεδίο που πληροί την νέα εξίσωση.

Οπότε έχουμε

$$g^{\mu\nu}\Box^2 A'_\nu - \partial^\mu\partial^\nu(1-a)A'_\nu = j^\mu$$

Αν $(1-a)A'_\nu = A_\nu$, τότε ο δεύτερος όρος μηδενίζεται (συνθήκη Lorentz), και απλοποιώντας τον παράγοντα $1/(1-a)$ καταλήγουμε στην αρχική σχέση $g^{\mu\nu}\Box^2 A_\nu = j^\mu$. Ο μετασχηματισμός $(1-a)A'_\nu = A_\nu$ γράφεται

$$A'_\nu = A_\nu + \frac{a}{1-a}A_\nu$$

που είναι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας, $A'_\nu = A_\nu + \partial_\nu\Lambda$ που πληροί την συνθήκη Lorentz, δηλαδή: $\partial^\nu\partial_\nu\Lambda = 0$, μιας και στην περίπτωσή μας $\partial_\nu\Lambda = \frac{a}{1-a}A_\nu$. Βάζοντας $a = 1/\xi$ παίρνουμε την σχέση

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu = j_\mu$$

Για να βρούμε τον αντίστροφο δουλεύουμε όπως και πρίν: γυρεύουμε τα A και B τέτοια ώστε

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]\left[Aq^2 g^{\nu\lambda} + Bq^\nu q^\lambda)\right] = g_\mu^\lambda$$

απ΄ όπου παίρνουμε ότι $A = -1/q^4$ και $B = (\xi - 1)A$. Οπότε, ο ανάστροφος του τελεστή επί $-i$ θα είναι

$$\frac{i}{q^2}\left[-g_{\mu\nu} + (1 - \xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]$$

Άσκηση 38 Δείξτε ότι ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{M^2}\right)}{q^2-M^2}$$

(Π)

Λύση

Όμοια με τις προηγούμενες ασκήσεις

$$\left[g^{\mu\nu}\left(-q^2+M^2\right)+q^\mu q^\nu\right]\left[Ag_{\nu\lambda}q^2+Bq_\nu q_\lambda\right]=g^\mu_\lambda$$

απ΄ όπου παίρνουμε $A=-1/(q^2-M^2))$ και $B=1/(M^2(q^2-M^2))$. Οπότε, ο αντίστροφος του τελεστή επί $-i$ γίνεται

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{M^2}\right)}{q^2-M^2}$$

Άσκηση 39 Στην σκέδαση Compton, δείξτε ότι πράγματι ισχύει η σχέση $k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά.
(Π)
Λύση

$$k_\mu T^{\mu\nu} = (ie)^2 i\bar{u}_{p'}^{(s')}\left[\gamma^\nu \frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2}\not{k} + \not{k}\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu\right]u_p^{(s)} =$$

(όπου k' βάζουμε $k+p-p'$ και χρησιμοποιούμε $\not{k}\not{k}=k^2=0$)

$$-ie^2\bar{u}_{p'}^{(s')}\left[\gamma^\nu \frac{\not{p}\not{k}+m\not{k}}{(p+k)^2-m^2} + \frac{\not{k}\not{p}-\not{k}(\not{p}-\not{p}')+m\not{k}}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu\right]u_p^{(s)} =$$

(χρησιμοποιούμε $\not{p}\not{k} = 2pk - \not{k}\not{p}$ και $\not{k}\not{p}' = 2p'k - \not{p}'\not{k}$

$$-ie^2\bar{u}_{p'}^{(s')}\left[\gamma^\nu \frac{2pk-\not{k}\not{p}+m\not{k}}{(p+k)^2-m^2} + \frac{2p'k-\not{p}'\not{k}+m\not{k}}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu\right]u_p^{(s)} =$$

τώρα χρησιμοποιούμε ότι $\not{p}u_p = mu_p$ και $\bar{u}_{p'}\not{p}' = m\bar{u}_{p'}$)

$$-ie^2\bar{u}_{p'}^{(s')}\left[\gamma^\nu\frac{2pk - \not{k}m + m\not{k}}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{2p'k - m\not{k} + m\not{k}}{(p-k')^2 - m^2}\gamma^\nu\right]u_p^{(s)} =$$

(οι παρονομαστές $(p+k)^2 - m^2 = 2pk$ και $(p-k')^2 - m^2 = -2pk'$)

$$-ie^2\bar{u}_{p'}^{(s')}\left[\gamma^\nu\frac{2pk}{2pk} + \frac{2kp'}{-2kp'}\gamma^\nu\right]u_p^{(s)} = 0$$

Όμοια δείχνεται ότι και $k'_\nu T^{\nu\mu} = 0$.

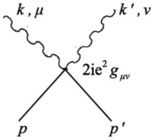
Άσκηση 40 Δείξτε ότι στη σκέδαση Compton $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* = 0$
Επομένως,

$$\overline{|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2} = 2e^4\left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u}\right)$$

(Π)

Άσκηση 41 Αν το φωτόνιο είναι δυνητικό, οπότε $k^2 = -Q^2 \neq 0$, δείξτε ότι $\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2Q^2 t}{su} \right)$
(Π)

Σκέδαση Compton βαθμωτού ''ηλεκτρονίου'' Δείξτε ότι για να είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό βαθμίδας το αναλλοίωτο πλάτος για σκέδαση Compton βαθμωτού ''ηλεκτρονίου'', χρειάζεται να συμπεριληφθεί άλλη μια αλληλεπίδραση της μορφής ''ηλεκτρόνιο''-''ηλεκτρόνιο'' -φωτόνιο-φωτόνιο, που φαίνεται στο σχ.(Π)



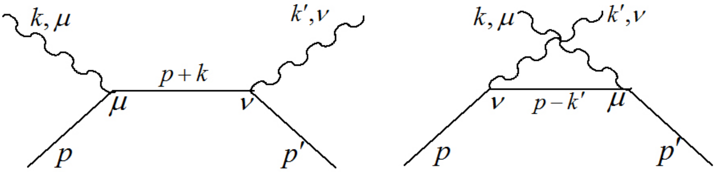
Λύση

Το αναλλοίωτο πλάτος για καθένα από τα δύο διαγράμματα που φαίνονται στο σχ. παρακάτω δίνεται από τις σχέσεις

$$-i\mathfrak{M}_1 = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \left(ie(p+p+k)^\mu\right) \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} \left(ie(p+k+p')^\nu\right) =$$
$$= \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \, T_1^{\mu\nu}$$

$$-i\mathfrak{M}_2 = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \left(ie(p+p-k')^\nu\right) \frac{i}{(p-k')^2 - m^2} \left(ie(p-k'+p')^\mu\right) =$$

$$= \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \, T_2^{\mu\nu}$$



Όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση με ηλεκτρόνιο, η αναλλοίωτητα ως προς τη συμμετρία βαθμίδας σημαίνει ότι αν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα πόλωσης του φωτονίου με ορμή k

$$\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + a k_\mu$$

το πλάτος θα μείνει αναλλοίωτο. Φυσικά το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει με αντίστοιχη αλλαγή του διανύσματος πόλωσης του φωτονίου με ορμή k'.

Οπότε, θα πρέπει να ισχύει (όπως και πάλι στην περίπτωση του ηλεκτρονίου)

$$k_\mu (T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}) = 0$$

και αντίστοιχα και για την ορμή k'_ν. Ας υπολογίσουμε κάθε όρο

$$\begin{aligned} k_\mu T_1^{\mu\nu} &= k(2p+k) \frac{-ie^2}{(p+k)^2 - m^2} (p+k+p')^\nu = \\ &= 2pk \frac{-ie^2}{p^2+k^2+2pk-m^2} (p+k+p')^\nu = \\ &= -ie^2 (p+k+p')^\nu \end{aligned}$$

μιας και $k^2 = 0$ και $p^2 = m^2$. Συνεχίζουμε με τον δεύτερο όρο

$$\begin{aligned} k_\mu T_2^{\mu\nu} &= (p+p-k')^\nu \frac{-ie^2}{(p-k')^2 - m^2} k(p-k'+p') = \\ &= (2p-k')^\nu \frac{-ie^2}{p^2+k'^2-2pk'-m^2} k(2p'-k) = \\ &= (2p-k')^\nu \frac{-ie^2}{-2pk'} 2kp' = +ie^2 (2p-k')^\nu \end{aligned}$$

όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε την διατήρηση της ορμής και την ισότητα $pk' = p'k$

$$k + p = k' + p' \to k - p' = k' - p \to kp' = k'p$$

Αθροίζοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} k_\mu T_1^{\mu\nu} + k_\mu T_2^{\mu\nu} &= ie^2 \left(2p - k' - p - k - p'\right)^\nu = \\ &= ie^2 \left(p - p' - k - k'\right)_\nu = -2ie^2 k_\nu \end{aligned}$$

πράγμα που είναι διάφορο του μηδενός. Πράγματι, λοιπόν, λείπει ένα όρος της ίδιας ταξης ως προς g. Αυτός ακριβώς ο όρος προέρχεται από τον επιπλέον κόμβο που έχει η αλληλεπίδραση βαθμωτού ηλεκτρονίου-φωτονίου, όπως δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης. Αυτό αντιστοιχεί σε ένα αναλλοίωτο πλάτος

$$-i\mathfrak{M}_3 = \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* 2ie^2 g^{\mu\nu} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* \; T_3^{\mu\nu}$$

Τώρα

$$k^\mu T_3^{\mu\nu} = 2ie^2 k_\nu$$

και επομένως

$$k_\mu\,(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu}) = 0$$

Αντίστοιχα αποδεικνύεται και ότι

$$k'_\nu\,(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu}) = 0$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.23 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 \left[F(\mathbf{q}^2)\right]^2$$

Οπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \to 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το ''ηλεκτρόνιο'' με spin=0;
(Π)

Λύση

Η έκφραση $4E^2\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$ προέρχεται από τον υπολογισμό του $(1/2)\left|\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right|^2$. Στην περίπτωση του βαθμωτού ηλεκτρονίου, η αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει τη μορφή $(p + p')^\mu A_\mu$ με p και p' η ορμή του εισερχόμενου και εξερχόμενου ηλεκτρόνιου.

Στην περίπτωσή μας, που έχουμε στατικό πεδίο θα πάρουμε $(p+p')^0 A_0$, οπότε, το αντίστοιχο του $(1/2)\left|\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right|^2$ είναι απλά $\left((p+p')^0\right)^2 = (E+E')^2 = 4E^2$ μιας και $E = E'$.
Για χαμηλές ενέργειες γνωρίζουμε ότι το ηλελτρόνιο δεν αλλάζει το spin του, αλληλεπιδρά δηλαδή μόνο με το φορτίο του και αυτό αντιστοιχεί στον πρώτο όρο της ανάπτυξης Gordon του όρου $\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$ που είναι ανάλογος του $(p+p')^\mu$

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr}, δείξτε ότι ο παράγοντας μοφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

(Π)

Λύση

Το ζητούμενο $F(\mathbf{q})$ δίνεται από τη σχέση

$$F(\mathbf{q}) = \int \exp[-mr] \exp[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}]\, d^3x$$

Επιλέγοντας $\mathbf{q} = (0, 0, q)$, οπότε $i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} = iqz = iqr\cos\theta$ και $d^3x = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$, όπου ο παράγοντας 2π προέρχεται από την ολοκλήρωση ως προς την αζιμουθιακή γωνία ϕ. Έτσι, η ολοκλήρωση ως προς θ θα δώσει

$$\int_0^\pi e^{iqr\cos\theta} \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{iqr} e^{iqr\cos\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$$

Και μένει η ολοκλήρωση ως προς r

$$\int_0^\infty e^{-mr} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} r^2 dr$$

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{e^{(-m\pm iq)r}}{iq} rdr = \frac{1}{iq} \frac{1}{(-m \pm iq)} \int_0^\infty r\, de^{(-m\pm iq)r} =$$

$$= \frac{1}{iq} \frac{1}{(-m \pm iq)} \left[re^{(-m\pm iq)r}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{(-m\pm iq)r}\, dr \right] =$$

$$= \frac{1}{iq} \frac{1}{(-m \pm iq)} \left[-\frac{1}{(-m \pm iq)} e^{(-m\pm iq)r}\Big|_0^\infty \right] = \frac{1}{iq} \frac{1}{(-m \pm iq)^2}$$

Οπότε,

$$\int_0^\infty e^{-mr} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} r^2 dr = \frac{1}{iq} \left[\frac{1}{(-m+iq)^2} - \frac{1}{(-m-iq)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{iq} \frac{4iqm}{(m^2+q^2)^2} = \frac{4m}{(m^2+q^2)^2} = \frac{4}{m^3} \left(1 - q'^2\right)^{-2}$$

όπου $q'^2 = -q^2 = -|\mathbf{q}|^2$.

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το J^μ είναι ($q = p' - p$)

$$F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3 i\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu + F_4 q^\mu + F_5(p+p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο οι δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2.
(Π)

Λύση

Από την ανάπτυξη κατά Gordon

$$\bar{u}_f\gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m}\bar{u}_f\left[(p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu\right]u_i$$

βλέπουμε ότι ο όρος $(p+p')^\mu$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των όρων γ^μ και $\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu$. Δηλαδή, ο όρος F_5 εκφράζεται μέσω των όρων F_1 και F_2. Επίσης, για τον όρο $\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu u(p) \sim \bar{u}(p')(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(p+p')_\nu u(p) = \\
&= \bar{u}(p')[\gamma^\mu(\not{p}+\not{p}') - (\not{p}+\not{p}')\gamma^\mu]u(p) = \\
&= \bar{u}(p')[\gamma^\mu(M+\not{p}') - (\not{p}+M)\gamma^\mu]u(p) = \\
&= \bar{u}(p')[2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu - 2p^\mu + \gamma^\mu\not{p}]u(p) = \\
&= \bar{u}(p')2(p'-p)^\mu u(p) = 2\bar{u}(p')q^\mu u(p)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση του Dirac: $\not{p}u(p) = Mu(p)$ και $\bar{u}(p')\not{p}' = M\bar{u}(p')$.Άρα, το F_3 εκφράζεται μέσω του F_4. Επομένως, έχουμε φτάσει στο

$$F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_4 q^\mu$$

Αλλά από την διατήρηση του ρεύματος, $\partial_\mu J^\mu = 0$ ή $q_\mu J^\mu = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&q_\mu \bar{u}(p')\left[F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_4 q^\mu\right]u(p) = 0 \rightarrow \\
&\bar{u}(p')\left[F_1\not{q} + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu q_\mu + F_4 q^2\right]u(p) = 0 \rightarrow \\
&\bar{u}(p')\left[F_1(\not{p}' - \not{p}) + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu q_\mu + F_4 q^2\right]u(p) = 0
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται από την εξίσωση του Dirac. Ο δεύτερος από την αντισυμμετρικότητα του $\sigma^{\mu\nu}$ και την συμμετρικότητα του $q_\mu q_\nu$. Επομένως, $F_4 = 0$. Έτσι, μένουμε μόνο με

$$F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

Άσκηση 45 Δείξτε ότι η διατήρηση του ρεύματος στην αδρονική κορυφή (δηλαδή $q^\nu W_{\mu\nu} = 0$) οδηγεί στις σχέσεις

$$W_5 = -\frac{pq}{q^2} W_2, \qquad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{pq}{q^2}\right)^2 W_2$$

(Π)

Λύση

Από το $q^\mu W_{\mu\nu} = 0$ παίρνουμε

$$-W_1 q^\nu + \frac{W_2}{M^2}(qp)p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^2 q^\nu + \frac{W_5}{M^2}((pq)q^\nu + q^2 p^\nu) = 0 \to$$

$$\left(\frac{W_2}{M^2}(qp) + \frac{W_5}{M^2} q^2\right) p^\nu + \left(-W_1 + \frac{W_4}{M^2} q^2 + \frac{W_5}{M^2}(pq)\right) q^\nu = 0 \to$$

Επομένως, θα πρέπει

$$W_5 = -\frac{pq}{q^2} W_2$$

$$W_4 = \frac{M^2}{q^2}\left(W_1 - \frac{W_5}{M^2} pq\right) = \frac{M^2}{q^2}\left(W_1 + \frac{(pq)^2}{M^2 q^2} W_2\right) =$$

$$= \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{pq}{q^2}\right)^2 W_2$$

Δείξτε ότι η Langragian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^{\mu} A_{\mu}$$

οδηγεί, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Langrage, στις εξισώσεις του Maxwell

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}$$

όπου βέβαια $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$.

Λύση

Οι εξισώσεις Langrage

$$\partial_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta} A_{\alpha})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha}} = 0$$

Από τον δεύτερο όρο θα έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha}} = -j^{\mu} g_{\mu}^{\alpha} = -j^{\alpha}$$

Για τον πρώτο όρο τώρα

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \partial_\beta \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{1}{4} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} F_{\mu\nu} \right)$$

Ας δούμε την πρώτη παραγώγιση μέσα στην παρένθεση

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = g_\mu^\beta g_\nu^\alpha - g_\nu^\beta g_\mu^\alpha$$

Αντίστοιχα, η δεύτερη παραγώγιση στην παρένθεση δίνει

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha}$$

και η παρένθεση γίνεται

$$-\frac{1}{4}\left(F^{\mu\nu}\left(g_\mu^\beta g_\nu^\alpha - g_\nu^\beta g_\mu^\alpha\right) + \left(g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha}\right) F_{\mu\nu}\right) =$$
$$-\frac{1}{4}\left(F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta}\right) = -F^{\beta\alpha}$$

Οπότε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -\partial_\beta F^{\beta\alpha}$$

Και οι εξισώσεις Lagrange δίνουν

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0 \Rightarrow -\partial_\beta F^{\beta\alpha} + j^\alpha \Rightarrow \partial_\beta F^{\beta\alpha} = j^\alpha$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Ανταλλοίωτο και συναλλοίωτο τετρα-διάνυσμα

Ο μετασχηματισμός Lorentz, για κίνηση στον άξονα x (δηλαδή x_1) είναι ($c = 1$)

$$t' = \frac{t - vx_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$t = \frac{t' + vx_1'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Όσα τετραδιανύσματα μετασχηματίζονται όπως ο ευθύς μετασχηματισμός τα ονομάζουμε ανταλλοίωτα (contravariant) διανύσματα και τα συμβολίζουμε με δείκτη πάνω. Οπότε, το t και το $\mathbf{x}$ αποτελούν ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα

$$(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, x_2, x_3) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = x^\mu$$

Τα τετραδιανύσματα που μετασχηματίζονται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό ονομάζονται συναλλοίωτα (covariant) και βάζουμε τον δείκτη κάτω. Εύκολα φαίνεται ότο το τετραδιάνυσμα $(t, -\mathbf{x})$ είναι ένα συναλλοίωτο τετραδιάνυσμα:

$$(t, -\mathbf{x}) = (t, -x_1, -x_2, -x_3) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = x_\mu$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι το $(\partial/\partial t, \boldsymbol{\nabla})$ μετασχηματίζεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Πράγματι

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + v\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Το $(\partial/\partial t, -\boldsymbol{\nabla})$ μετασχηματίζεται με τον ευθύ μετασχηματισμό. Οπότε, γράφουμε

$$(\partial/\partial t, -\boldsymbol{\nabla}) = \partial^\mu, \quad (\partial/\partial t, \boldsymbol{\nabla}) = \partial_\mu$$

Παράρτημα 2

Μετασχηματισμός Lorentz

Για κίνηση στον άξονα x (δηλαδή x^1) έχουμε ($c = 1$)

$$x'^0 = \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$$

όπου

$$\Lambda^0_{\ 0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^0_{\ 1} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^1_{\ 1} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^1_{\ 0} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

Χρησιμοποιώντας τα $x_0 = x^0$ και $x_1 = -x^1$ θα έχουμε

$$x'^0 = \frac{x_0 + vx_1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x'^1 = \frac{-x_1 - vx_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^{\nu\sigma} x_\sigma$$

όπου

$$\Lambda^{00} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{01} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{11} = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{10} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

δηλαδή

$$\Lambda^{01} = -\Lambda^{10}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετρικό τανυστή

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} g^{\mu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma}$$

Θέλει προσοχή η σειρά των δεικτών ν, σ. Επίσης, μπορούμε να γράψουμε (πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση επί $g_{\nu\rho}$)

$$g_{\nu\rho} x'^{\nu} = g_{\nu\rho} \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda_{\rho}^{\ \sigma} x_{\sigma}$$

δηλαδή

$$x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}^{\ \sigma} x_{\sigma}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα είναι το 'τετράγωνο' του τετραδιανύσματος

$$(x')^2 = (x)^2 \to x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\nu} x_{\nu} \to x'^{\mu} x'^{\rho} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu} \to$$
$$\Lambda^{\mu}_{\ \mu'} x^{\mu'} \Lambda^{\rho}_{\ \rho'} x^{\rho'} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu}$$

Τα x είναι βέβαια ανεξάρτητες παράμετροι. Οπότε, εξισώνοντας δεξιά και αριστερά τους ίδιους όρους, δηλαδή θέτοντας $\mu' = \nu$ και $\rho' = \sigma$, θα έχουμε

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} g_{\rho\mu} = g_{\sigma\nu} \to \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} = g_{\sigma\nu} \to \Lambda^{T} g \Lambda = g$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to g_{\mu\nu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to x'_{\mu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to$$
$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu} = g_{\rho\sigma} x^{\sigma} = x_{\rho}$$

και όμοια $x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} x'^{\mu}$. Συνοψίζοντας

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}, \; x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}{}^{\sigma} x_{\sigma}, \; x_{\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu}, \; x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} x'^{\mu}$$

Τέλος

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \Lambda_{\sigma}{}^{\mu} x'^{\sigma} \to \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \Lambda_{\sigma}{}^{\mu} = \delta^{\nu}_{\sigma}$$

Απειροστός μετασχηματισμός

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$$

Από τη σχέση $\Lambda^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g_{\sigma\nu}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g_{\sigma\nu} = \Lambda^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} &= (\delta^{\rho}_{\sigma} + \epsilon^{\rho}{}_{\sigma}) g_{\rho\mu} (\delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}) = \\ &= g_{\sigma\nu} + \epsilon^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \delta^{\mu}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \epsilon^{\mu}{}_{\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= g_{\sigma\nu} + (\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

δηλαδή $\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu} = 0$.

Ο πίνακας $\epsilon_{\nu\sigma}$ είναι αντισυμμετρικός, επομένως έχει 6 ανεξάρτητα στοιχεία: 3 στροφές και 3 κινήσεις. Για παράδειγμα, στροφή γύρω απο τον άξονα z

$$\left.\begin{array}{l} x'^0 = x^0,\ x'^3 = x^3, \\ x'^1 = x^1 + \epsilon x^2, \\ x'^2 = -\epsilon x^1 + x^2 \end{array}\right\}, \quad \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποιος είναι ο $\epsilon_{\mu\nu}$

$$\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\, \epsilon^\rho{}_\nu = g_{\mu 1}\, \epsilon^1{}_\nu + g_{\mu 2}\, \epsilon^2{}_\nu$$

Τα διάφορα του μηδενός είναι $\epsilon^1{}_2 = -\epsilon^2{}_1 = \epsilon$. Επομένως τα μόνα διάφορα του μηδενός στοιχεία είναι $-\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon$, δηλαδή

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για κίνηση στον άξονα z (τώρα $\epsilon = v$)

$$\left.\begin{array}{l} x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2, \\ x'^0 = x^0 - \epsilon x^3, \\ x'^3 = -\epsilon x^0 + x^3 \end{array}\right\}, \quad \epsilon^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και όπως πριν

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράρτημα 3

Σχέσεις πληρότητας για τα φωτόνια (Π)

Γνωρίζουμε ότι για φωτόνια ισχύει η σχέση πληρότητας (βλ. την Άσκηση 34)

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_i (\epsilon_\lambda)_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i} \epsilon_{\kappa_j} = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)\,, \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$$

Πώς θα γράψουμε τη σχέση αυτή με συναλλοίωτο τρόπο; Σε κάθε διαδικασία με εισερχόμενο φωτόνιο, το αναλλοίωτο πλάτος θα περιέχει την μορφή

$$\epsilon_\mu T^{\mu\ldots}_{\ldots}$$

όπου οι ... αντιστοιχούν σε δείκτες που είναι ''αθροισμένοι'' (το αναλλοίωτο πλάτος είναι αναλλοίωτο Lorentz!!).

Όταν πάμε στο τετράγωνο του πλάτους και αθροίσουμε στα διανύσματα πόλωσης θα πάρουμε

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} T^{\mu\cdots}_{\cdots} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} (T^{\mu'\cdots}_{\cdots})^{\dagger}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα πόλωσης ϵ_1 και ϵ_2, οπότε έχουμε θεωρήσει ότι η ορμή του φωτονίου μας είναι $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ (λόγω της σχέσης $\mathbf{q} \cdot \epsilon = 0$). Τώρα θα ''ανάγουμε'' τα διανύσματα αυτά σε τετραδιανύσματα. Για το φωτόνιο θα έχουμε $q^{\mu} = (q, 0, 0, q)$ μιας και πρέπει $q^{\mu} q_{\mu} = 0$. Λόγω της σχέσης $q^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0$, τα ϵ_1 και ϵ_2 θα γίνουν $\epsilon_1^{\mu} = (0, 1, 0, 0)$ και $\epsilon_2^{\mu} = (0, 0, 1, 0)$. Επομένως, το πλάτος θα γίνει

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} T^{\mu\cdots}_{\cdots} (T^{\mu'\cdots}_{\cdots})^{\dagger} &= T^{1\cdots}_{\cdots} (T^{1\cdots}_{\cdots})^{\dagger} + T^{2\cdots}_{\cdots} (T^{2\cdots}_{\cdots})^{\dagger} \\
&= T^{0\cdots}_{\cdots} (T^{0\cdots}_{\cdots})^{\dagger} - T^{3\cdots}_{\cdots} (T^{3\cdots}_{\cdots})^{\dagger} - T^{\nu\cdots}_{\cdots} (T^{\cdots}_{\nu\cdots})^{\dagger}
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί

$$T^{\nu\dots}_{\dots}(T^{\dots}_{\nu\dots})^\dagger = T^{0\dots}_{\dots}(T^{\dots}_{0\dots})^\dagger + T^{1\dots}_{\dots}(T^{\dots}_{1\dots})^\dagger + T^{2\dots}_{\dots}(T^{\dots}_{2\dots})^\dagger + T^{3\dots}_{\dots}(T^{\dots}_{3\dots})^\dagger =$$
$$= T^{0\dots}_{\dots}(T^{0\dots}_{\dots})^\dagger - T^{1\dots}_{\dots}(T^{1\dots}_{\dots})^\dagger - T^{2\dots}_{\dots}(T^{2\dots}_{\dots})^\dagger - T^{3\dots}_{\dots}(T^{3\dots}_{\dots})^\dagger$$

Επί πλέον, θα πρέπει $q_\mu T^{\nu\cdots}_{\dots} = 0$. Επειδή το q^μ έχει τη συγκεκριμένη μορφή, $(q, 0, 0, q)$, θα πρέπει υποχρεωτικά

$$T^{0\dots}_{\dots} = T^{3\dots}_{\dots}$$

Επομένως, καταλήγουμε

$$\sum_\lambda \epsilon^{(\lambda)}_\mu \epsilon^{(\lambda)*}_{\mu'} T^{\mu\dots}_{\dots}(T^{\mu'\dots}_{\dots})^\dagger = -T^{\nu\dots}_{\dots}(T^{\dots}_{\nu\dots})^\dagger = -g_{\mu'\mu} T^{\mu\dots}_{\dots}(T^{\mu'\dots}_{\dots})^\dagger$$

δηλαδή

$$\sum_\lambda \epsilon^{(\lambda)}_\mu \epsilon^{(\lambda)*}_{\mu'} = -g_{\mu'\mu}$$

Παράρτημα 4

Η ομάδα $SU(5)$ $T_i = \lambda_i/2,\ Tr[T_i T_j] = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ **(Π)**

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{13}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0\\0&0&i&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{15}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{16}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{17}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\i&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{18}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{19}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{20}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{23}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{24}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$