ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80 ΑΘΗΝΑ
ΤΗΛ. 210 772 3009, 772 3032 - FAX: 210 772 3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
TEL. +30210 772 3009, 772 3032 - FAX: +30210 772 3025

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σεπτέμβριος 2024 – Κ. Αναγνωστόπουλος

ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε κάθε θέμα σε **ξεχωριστές κόλλες**.

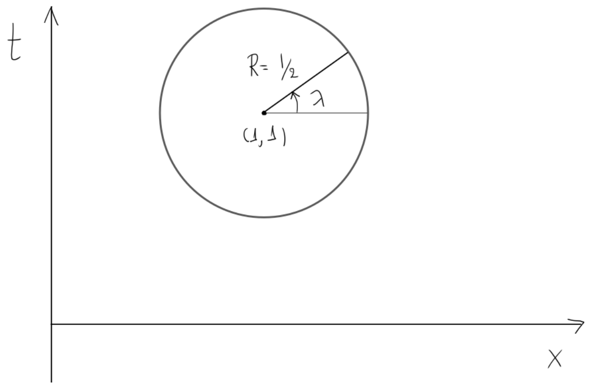
Ολοκληρώματα των οποίων τα αποτελέσματα είναι καθαροί (αδιάστατοι) αριθμοί, αν δεν ζητούνται ρητά από την εκφώνηση, θα μπαίνουν στην τελική απάντηση με συμβολική μορφή και δεν χρειάζεται να υπολογίζονται. Για παράδειγμα, αν σε μια έκφραση παρουσιάζεται το ολοκλήρωμα

$$I_1 = \int_0^{\pi/6} \left(4\cos^8\lambda - 2\cos^6\lambda\right)\, d\lambda \tag{1}$$

στην έκφραση θα βάλετε απλά I_1.

Όλες οι συνοχές (affine connections) υποτίθεται ότι είναι ελεύθερες στρέψης, και όπου υπάρχει μετρική, ότι είναι η αντίστοιχη συνοχή Levi-Civita.

Καμπύλες (20 βαθμοί)



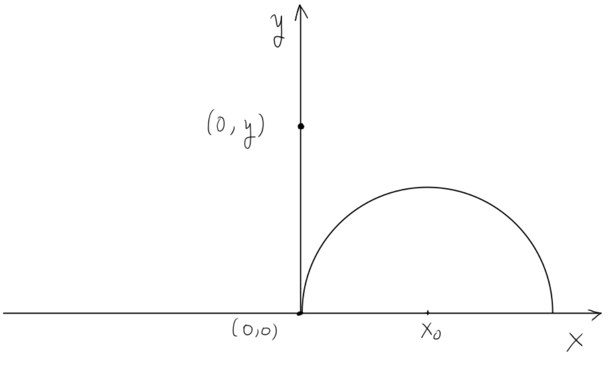
Δίνεται η μετρική

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2\,, \qquad x > 0\,, \quad -\infty < t < +\infty\,. \tag{2}$$

Να υπολογιστεί το χωροχρονικό μήκος $\int |ds|$ της καμπύλης του σχήματος, η οποία δίνεται από τη σχέση $(x-1)^2 + (t-1)^2 = 1/4$.

Να εξετάσετε το είδος της καμπύλης (χωροειδής/φωτοειδής/χρονοειδής) στα σημεία $\lambda = 0, \pi/3, \pi/2$.

Το Υπερβολικό Επίπεδο (30 βαθμοί)



Το υπερβολικό επίπεδο ορίζεται από την μετρική

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right), \qquad y \geq 0\,, \quad -\infty < x < +\infty\,. \tag{3}$$

1. Να δείξετε ότι η καμπύλη $x = 0$ που ξεκινάει από το σημείο $(0, y)$ του ημιεπιπέδου $y > 0$ και τελειώνει στο σημείο $(0, 0)$ έχει άπειρο μήκος.
2. Να δείξετε ότι $\Gamma^1{}_{21} = -1/y$, $\Gamma^2{}_{11} = 1/y$, $\Gamma^2{}_{22} = -1/y$. Στα παρακάτω μπορείτε να υποθέσετε ότι τα μη σχετιζόμενα $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0$.
3. Να γράψετε τις εξισώσεις των γεωδαισιακών.
4. Να βρείτε ένα Killing Vector Field της μετρικής, και να γράψετε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα πάνω σε μια γεωδαισιακή.
5. Να δείξετε πως οι γεωδαισιακές είναι ημικύκλια με κέντρο πάνω στον άξονα x ή ημιευθείες παράλληλες στον άξονα y.

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\int dy\, \frac{y}{R}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)^{-1/2} = -R\sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} + c$.

Τανυστής Ενέργειας-Ορμής (20 βαθμοί)

Δίνεται η δράση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}F^2\right), \qquad F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \qquad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu\,. \tag{4}$$

Ο canonical τανυστής ενέργειας-ορμής δίνεται από τη σχέση

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{5}$$

1. Να δείξετε ότι $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
2. Να υπολογίσετε τον $T_{\mu\nu}$.
3. Αν $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (μετρική Minkowski), να δείξετε ότι

$$T^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \tag{6}$$

$$T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})_i \tag{7}$$

$$T^{ij} = (-E_iE_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2) + (-B_iB_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2)\,. \tag{8}$$

Δίνεται ότι $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$, $F^{0i} = E^i$, $F^{ij} = \epsilon^{ijk}B^k$, $E^2 \equiv E_iE_i$, $B^2 \equiv B_iB_i$.

Καμπυλότητα (30 βαθμοί)

Δίνεται ότι

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,V^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}V^\lambda\,, \qquad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,\omega_\rho = -R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\omega_\lambda\,. \tag{9}$$

Να υπολογίσετε την έκφραση

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,T^\alpha{}_{\beta\gamma}\,, \tag{10}$$

συναρτήσει του τανυστή καμπυλότητας.