ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80 ΑΘΗΝΑ
ΤΗΛ. 210 772 3009, 772 3032 - FAX: 210 772 3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
TEL. +30210 772 3009, 772 3032 - FAX: +30210 772 3025

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ιούνιος 2024 – Κ. Αναγνωστόπουλος

ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε κάθε θέμα σε **ξεχωριστές κόλλες**.

Ερωτήματα τα οποία έχουν σημειωθεί ώς **(bonus)** μπορείτε να μην τα απαντήσετε. Αν τα απαντήσετε σωστά, θα αυξήσουν τη βαθμολογία σας.

Χωρόχρονος Minkowski (20 βαθμοί)

Στον 4-διάστατο χωρόχρονο Minkowski θεωρείται η καμπύλη:

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= R\,\lambda\cosh\lambda\,, \qquad -\infty < \lambda < +\infty\,, \\ x(\lambda) &= R\,\lambda\sinh\lambda\,, \\ y(\lambda) &= 0\,, \quad z(\lambda) = 0\,. \end{aligned}$$

1. Να υπολογιστούν οι τιμές του λ για τις οποίες η καμπύλη είναι χωροειδής, χρονοειδής ή φωτοειδής
2. Να υπολογιστεί το χωροχρονικό μήκος της καμπύλης για $-1 \leq \lambda \leq 1$ (να υπολογίσετε το σχετικό ολοκλήρωμα)
3. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες του εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης.

Δίνεται: $\int_{-1}^{1}\left(1-\lambda^2\right)^n d\lambda = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}$, $n > 0$.

Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο στην ΕΘΣ (30 βαθμοί)

Οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή ορίζονται από τη σχέση

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,, \tag{1}$$

και οι εντάσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου δίνονται από τις σχέσεις

$$E_i = F_{i0}\,, \qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}\,. \tag{2}$$

Δύο από τις εξισώσεις του Maxwell είναι οι

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \vec{j}\,, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho\,, \tag{4}$$

που σε ισοδύναμη μορφή γράφονται ως

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu\,. \tag{5}$$

Η πυκνότητα ρεύματος $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ διατηρείται:

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,. \tag{6}$$

1. Να δείξετε ότι $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$
2. Να υπολογίσετε τις συνιστώσες του $F_{\mu\nu}$ συναρτήσει των E_i, B_i
3. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις (3) και (4) είναι ισοδύναμες με τις (5)
4. **(bonus)** Να δείξετε ότι αν η εξίσωση (4) (Gauss constraint) ικανοποιείται τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε οι εξισώσεις (3) και (6) συνεπάγονται πως θα ικανοποιείται κάθε χρονική στιγμή.

Δίνεται $\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, $(\vec{\nabla} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j B_k$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_i E_i$.

Τανυστής Ενέργειας-Ορμής (20 βαθμοί)

Δίνεται η δράση πραγματικού βαθμωτού πεδίου

$$S = \int \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] . \tag{7}$$

Υπολογίστε τον (canonical) τανυστή ενέργειας-ορμής

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} . \tag{8}$$

Δίνεται ότι $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$.

Το Σύμπαν του Gödel (30 βαθμοί)

Θεωρήστε τη μετρική στο σύμπαν του Gödel

$$ds^2 = -dt^2 - 2\frac{r^2}{\sqrt{2}a} dt d\phi + \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} + r^2 \left[1 - \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \right] d\phi^2 + dz^2 . \tag{9}$$

1. Εξετάστε αν τα ∂_μ είναι χρονοειδή, φωτοειδή ή χωροειδή.
2. Δείξτε ότι τα $\xi_0 = \partial_t$, $\xi_2 = \partial_\phi$, $\xi_3 = \partial_z$, είναι Killing Vector Fields (KVF), και υπολογίστε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες k_0, k_2, και k_3 κατά μήκος μιας γεωδαισιακής με εφαπτόμενο διάνυσμα $u^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z})$. Οι παράγωγοι $\dot{t}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z}$ είναι ως προς τον ιδιόχρονο για σωματίδιο με μη μηδενική μάζα, και ως προς την affine παράμετρο για σωματίδιο μηδενικής μάζας.
3. Υπολογίστε τα $\dot{t}$, $\dot{\phi}$ και $\dot{z}$ συναρτήσει των k_0, k_2, και k_3.
4. Δείξτε ότι η σχέση $u^\mu u_\mu = \kappa$, $\kappa = 0, -1$ για φωτοειδείς/χρονοειδείς γεωδαισιακές, δίνει

   $$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\dot{r})^2 + \frac{1}{2}A^2 r^2 + \frac{L^2}{2r^2} , \tag{10}$$

   όπου $\mathcal{E}$, A, και L είναι σταθερές, τις οποίες θα προσδιορίσετε.
5. **(bonus)** Θεωρήστε σωματίδιο μη μηδενικής μάζας με κοσμική γραμμή $t = 0$, $r = R$, $\phi = \omega\tau$, $z = 0$, όπου R, ω είναι σταθερές και τ ο ιδιόχρονος του σωματιδίου. Ποια είναι η συνθήκη για να είναι η 4-ταχύτητα του σωματιδίου χρονοειδής; Στην περίπτωση αυτή, υπολογίστε την $\omega = \omega(R)$.
6. **(bonus)** Υπολογίστε την 4-επιτάχυνση του σωματιδίου $a^\mu = \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho$ όταν η κοσμική του γραμμή είναι η παραπάνω καμπύλη, όπου $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$.

Δίνονται τα

$$\Gamma^t_{rt} = \frac{r}{2a^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} , \quad \Gamma^t_{\phi r} = \frac{r^3}{4\sqrt{2}a^3}\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} , \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r}{4a^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} , \tag{11}$$

$$\Gamma^r_{\phi t} = \frac{r}{\sqrt{2}a}\left(1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2\right) , \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = r\left(1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2\right)\left(2\left(\frac{r}{2a}\right)^2 - 1\right) , \tag{12}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} , \quad \Gamma^\phi_{rt} = -\frac{1}{\sqrt{2}ar}\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} . \tag{13}$$