ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα I-1

Τό κάθισμα ἑνός αὐτοκινήτου εἶναι ἀναρτημένο σέ κατάλληλο ἐλατήριο πού χρησιμοποιεῖται γιά νά ἀπορροφάει ἀπότομα τινάγματα ἀπό ἀνωμαλίες τοῦ δρόμου. Ὅταν ὁ ὁδηγός καθήσει στό κάθισμα τό τελευταῖο κατεβαίνει κατά 1.6 cm. Ἄν τό ὄχημα πέσει σέ μιά λακκούβα τό κάθισμα θά ἀρχίσει νά ἐκτελεῖ ταλαντώσεις.

α) Νά βρεθεῖ ἡ συχνότητα τῶν ταλαντώσεων αὐτῶν ἄν ἀμεληθεῖ ἡ ἀπόσβεση.

β) Νά βρεθεῖ ἡ νέα συχνότητα ω, τῶν ταλαντώσεων ἄν ὁ συντελεστής ἀπόσβεσης εἶναι $\Gamma=50\ s^{-1}$. Τί εἴδους κίνηση θά ἐκτελέσει τό κάθισμα;

γ) Σέ πόσο περίπου χρόνο ἡ ταλάντωση θά ἔχει τελείως ἀποσβεσθεῖ; ($g=10\ ms^{-2}$).

Λύση

α) Ἔστω z ἡ μετατόπιση ὅταν ὁ ὁδηγός κάτσει στό κάθισμακαί ἔστω ἀκόμα ὅτι B=Mg τό μικτό βάρος καθίσματος καί ὁδηγοῦ. Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται στό ἐλατήριο θά εἶναι ἴση μέ

$$B=Mg=-Kz$$

ἤ

$$-\frac{K}{M}=\frac{g}{z}$$

ἀλλά $z=-1.6\ cm=-1.6\times10^{-2}m$

καί $g=10\ ms^{-2}$

ὁπότε $$\frac{K}{M}=\omega_0^2=625\ s^{-2}$$

Ἑπομένως ἄν τό ἐλατήριο ἐκτελέσει ἀμείωτες ταλαντώσεις ἡ συχνότητα τους θά εἶναι

$$\nu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}\simeq 4Hz$$

β) Ὅταν τό ἐλατήριο ἐκτελεῖ ταλαντώσεις μέ ἀπόσβεση, ἡ νέα συχνότητα ω_1 δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\omega_1^2=\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}=0$$

ἀφοῦ $\Gamma=50\ s^{-1}$.

Δηλαδή ἡ ἀπόσβεση τοῦ ἐλατηρίου θά εἶναι κρίσιμη.

γ) Ἀφοῦ $\omega_1=0$, ἡ ἐξίσωση κίνησης θά εἶναι

$$z(t)=z_0e^{-t/2\tau},\quad\left(\tau=\frac{1}{\Gamma}=\frac{1}{50}=0.02\ s\right)$$

Ἡ ταλάντωση θά ἔχει πρακτικά μηδενισθεῖ ὅταν

$$\frac{z(t)}{z_0} \leqslant \frac{1}{20}$$

Βάζουμε λοιπόν

$$\frac{z(t)}{z_0} = e^{-t/2\tau} = \frac{1}{20}$$

ἤ

$$-\frac{t}{2\tau} = \ln\left(\frac{1}{20}\right) \simeq -3$$

ἤ

$$t = 6\tau = 0.12s$$

δηλαδή σέ 1/10 τοῦ δευτερολέπτου περίπου.

Παράδειγμα Ι-2

Ἕνα φυσικό σύστημα χαρακτηρίζεται ἀπό δύο μεγέθη x(t) καί y(t) τά ὁποῖα ὑπακούουν στίς ἐξισώσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega_0^2(y-5x) \quad \text{καί} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega_0^2\,(x-5y)$$

μέ ω_0=1000 rad/s. Νά βρεθοῦν οἱ συχνότητες τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης τοῦ συστήματος καί οἱ ἀντίστοιχοι λόγοι τῶν πλατῶν ταλάντωσης τῶν x καί y.

Λύση

Οἱ κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ἔχουν τή μορφή

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$y = B\cos(\omega t + \varphi)$$

Ἀντικαθιστῶντας στίς διαφορικές, ἐξισώσεις βρίσκουμε δύο γραμμικές καί ὁμογενεῖς ἐξισώσεις γιά τά πλάτη A καί B:

$$\begin{aligned} (5\omega_0^2 - \omega^2)A - \omega_0^2 B &= 0 \\ -\omega_0^2 A + (5\omega_0^2 - \omega^2)B &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Γιά νά ἔχουμε λύση ἐκτός ἀπό τήν τετριμμένη (A=B=0), πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν νά μηδενίζεται δηλ.

$$\begin{vmatrix} 5\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 5\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ἡ δευτεροβάθμια αὐτή ἐξίσωση ὡς πρός ω^2 ἔχει τίς ρίζες $\omega_1^2 = 4\omega_0^2$ καί $\omega_2^2 = 6\omega_0^2$. Οἱ ζητούμενες συχνότητες εἶναι λοιπόν:

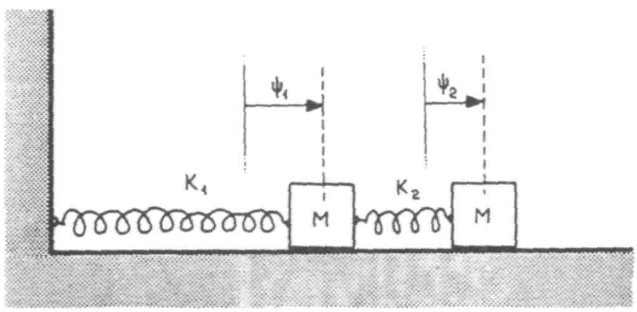
$$\omega_1 = 2\omega_0 = 2000 \quad \text{rad/s}$$

καί $\omega_2=\sqrt{6}\ \omega_0=2450$ rad/s

Γιά τήν ω_1 ὁ λόγος πλατῶν (πού προκύπτει ἀπό τίς ἐξ. (1)) εἶναι $A/B=1$ ἐνῶ γιά τήν ω_2 ὁ λόγος πλατῶν εἶναι $A/B=-1$.

Παράδειγμα 1-3

Θεωρῆστε ἕνα σύστημα δύο ἴσων μαζῶν καί δύο ἐλατηρίων (χωρίς μάζα) πού κινοῦνται χωρίς τριβές πάνω σ'ἕνα ὁριζόντιο τραπέζι ὅπως δείχνει τό παρακάτω σχῆμα. Ὁ λόγος τῶν σταθερῶν K_1 καί K_2 τῶν ἐλατηρίων εἶναι $K_1/K_2=3/2$. Ὑπολογίστε τόν λόγο τῶν συχνοτήτων τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης τοῦ συστήματος.



Λύση

Ἄν ψ_1 καί ψ_2 οἱ ὁριζόντιες μετατοπίσεις ἀπό τίς θέσεις ἰσορροπίας τῶν δύο μαζῶν (βλέπε σχῆμα), οἱ διαφορικές ἐξισώσεις κίνησης εἶναι οἱ ἀκόλουθες

$$M\frac{d^2\psi_1}{dt^2}=-K_1\psi_1+K_2(\psi_2-\psi_1)$$

$$M\frac{d^2\psi_2}{dt^2}=-K_2(\psi_2-\psi_1)$$

Ἀντικαθιστῶντας στίς παραπάνω ἐξισώσεις τήν γενική μορφή ἑνός κανονικοῦ τρόπου ταλάντωσης συχνότητας ω:

$$\psi_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\psi_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi)$$

ἔχουμε τό ἀκόλουθο γραμμικό σύστημα ἐξισώσεων γιά τά πλάτη A_1 καί A_2:

$$(M\omega^2-K_1-K_2)A_1+K_2A_2=0$$

Γιά νά ὑπάρχει μή τετριμμένη λύση τοῦ παραπάνω συστήματος πρέπει νά μηδενίζεται ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν:

$$\begin{vmatrix} M\omega^2-K_1-K_2 & K_2 \\ K_2 & M\omega^2-K_2 \end{vmatrix}=0$$

Λύνοντας τήν παραπάνω 2βάθμια ἐξίσωση ὡς πρός ω^2 ἔχουμε τίς λύσεις

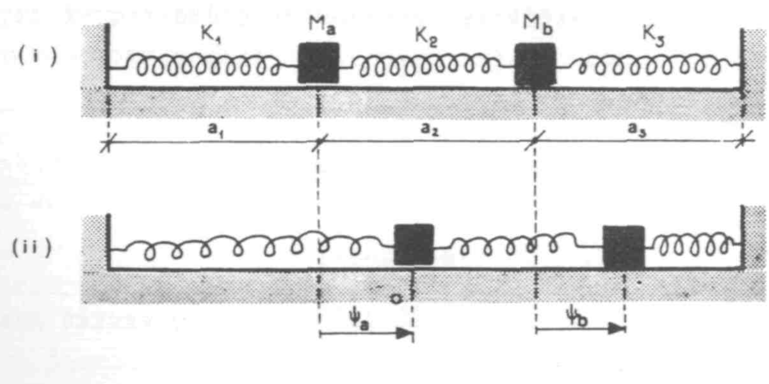
$$\omega^2=\frac{2K_2+K_1\pm\sqrt{4K_2^2+K_1^2}}{2M}$$

Ἄρα ὁ λόγος τῶν δύο συχνοτήτων τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης εἶναι ἴσος μέ

$$\sqrt{\frac{2K_2+K_1+\sqrt{4K_2^2+K_1^2}}{2K_2+K_1-\sqrt{4K_2^2+K_1^2}}}=\sqrt{\frac{2\cdot2+3+\sqrt{4\cdot2^2+3^2}}{2\cdot2+3-\sqrt{4\cdot2^2+3^2}}}=\sqrt{6}$$

Παράδειγμα Ι-4 Διαμήκεις ταλαντώσεις συζευγμένων μαζῶν

Δυό μάζες M_a καί M_b, εἶναι συζευγμένες μέ ἐλατήρια, πού ἔχουν σταθερές K_1, K_2, K_3. Τό σύστημα ἐκτελεῖ διαμήκεις ταλαντώσεις κατά τή διεύθυνση x (βλ. τό σχῆμα -ὅλες οἱ τριβές ἀμελοῦνται). Γράψτε τήν ἐξίσωση κίνησης κάθε μάζας καί προσδιορίστε τίς συχνότητες τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης τοῦ συστήματος.



Λύση

Μέ a_{01}, a_{02}, a_{03} συμβολίζουμε τά μήκη τῶν τριῶν ἐλατηρίων ἀντίστοιχα, πρίν αὐτά ὑποστοῦν ὁποιαδήποτε παραμόρφωση. Ἑπομένως, οἱ δυνάμεις F_a καί F_b πού δροῦν πάνω στίς μάζες M_a καί M_b, ὅταν αὐτές ἔχουν ἀπομακρυνθεῖ κατά ψ_a καί ψ_b ἀντίστοιχα ἀπό τίς θέσεις ἰσορροπίας τους, ἔχουν τή μορφή

$$F_a=-K_1(a_1-a_{01}+\psi_a)+K_2(a_2-a_{02}+\psi_b-\psi_a)=-(K_1+K_2)\psi_a+K_2\psi_b,$$

$$F_b=-K_2(a_2-a_{02}+\psi_b-\psi_a)+K_3(a_3-a_{03}-\psi_b)=K_2\psi_a-(K_2+K_3)\psi_b.$$

Χρησιμοποιήσαμε τή σχέση

$$K_1(a_1-a_{01})=K_2(a_2-a_{02})=K_3(a_3-a_{03}),$$

πού ἀποτελεῖ τή συνθήκη ἰσορροπίας, ὅταν τό σύστημα βρίσκεται στήν κατάσταση ἰσορροπίας (i). Ἑπομένως, οἱ ἐξισώσεις κίνησης τῶν δύο μαζῶν γράφονται

$$M_a\frac{d^2\psi_a}{dt^2}=-(K_1+K_2)\psi_a+K_2\psi_b,\qquad M_b\frac{d^2\psi_b}{dt^2}=K_2\psi_a-(K_2+K_3)\psi_b \tag{1}$$

καί ἀποτελοῦν σύστημα συζευγμένων διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Γιά νά βρίσκεται τό σύστημα σέ κανονικό τρόπο ταλάντωσης θά πρέπει καί οἱ δυό μάζες M_a, M_b νά ἐκτελοῦν ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση μέ τήν ἴδια κυκλική συχνότητα ω (πού ἀποτελεῖ καί τή συχνότητα τοῦ ἀντίστοιχου τρόπου ταλάντωσης) καί τήν ἴδια σταθερά φάσης φ. Μποροῦμε δηλαδή νά γράψουμε

$$\psi_a=A\cos(\omega t+\varphi),\qquad \psi_b=B\cos(\omega t+\varphi)\qquad (A,B \text{ σταθερές})$$

ἤ

$$\frac{d^2\psi_a}{dt^2}=-\omega^2\psi_a,\qquad \frac{d^2\psi_b}{dt^2}=-\omega^2\psi_b.$$

Ἑπομένως, ὅταν τό σύστημα βρίσκεται σέ κανονικό τρόπο ταλάντωσης, τό διαφορικό σύστημα (1) ἀνάγεται στό ἀκόλουθο γραμμικό καί ὁμογενές ἀλγεβρικό σύστημα

$$(K_1+K_2-M_a\omega^2)\psi_a-K_2\psi_b=0$$

$$-K_2\psi_a+(K_2+K_3-M_b\omega^2)\psi_b=0,$$

τό ὁποῖο ἔχει λύση διάφορη τῆς μηδενικῆς μόνο ἄν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν του μηδενίζεται, δηλαδή ἄν

$$\begin{vmatrix} K_1+K_2-M_a\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3-M_b\omega^2 \end{vmatrix}=0.$$

Ἡ τελευταία συνθήκη ὁδηγεῖ σέ μιά ἐξίσωση δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός ω^2, δηλ.

$$M_aM_b\omega^4-[M_a(K_2+K_3)+M_b(K_1+K_2)]\omega^2+(K_1+K_2)(K_2+K_3)-K_2^2=0, \tag{2}$$

τῆς ὁποίας οἱ πραγματικές καί θετικές λύσεις ἀποτελοῦν τίς ζητούμενες συχνότητες.

Ἐδῶ ἔχουμε ἕνα σύστημα μέ δύο βαθμούς ἐλευθερίας καί ἐπομένως περιμένουμε αὐτό νά ἔχει δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Περιμένουμε λοιπόν ὅτι ἡ (2) θά ἔχει δ ύ ο πραγματικές καί θετικές λύσεις, ω_1^2, ω_2^2. Πράγματι ἔχουμε

$$\Delta = [M_a(K_2+K_3)-M_b(K_1+K_2)]^2+4M_aM_bK_2^2 > 0$$

καί ἡ συνθήκη θετικότητας τῶν λύσεων ἰσοδυναμεῖ μέ τή συνθήκη

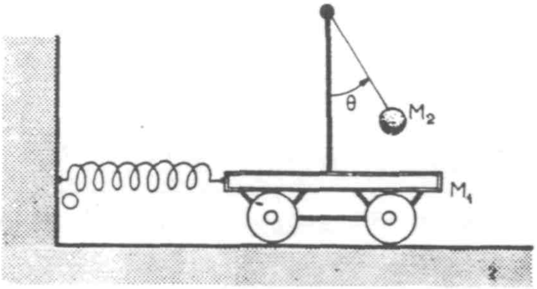
$$(K_1+K_2)(K_2+K_3) > K_2^2,$$

πού ἱκανοποιεῖται πάντα.

Σημ. Γενικά γιά μικρές ταλαντώσεις συστημάτων γύρω ἀπό μιά θέση ἰσορροπίας ἡ θετικότητα τῶν τιμῶν τοῦ ω^2 εἶναι μαθηματικά ἰσοδύναμη μέ τή συνθήκη ε ὐ σ τ ά θ ε ι α ς τῆς θέσης ἰσορροπίας.

Παράδειγμα I-5

Ἕνα ὄχημα μέ μάζα M_1 συνδέεται μέσω ἑνός ἐλατηρίου μέ τό σταθερό σημεῖο O. Τό ὄχημα μπορεῖ νά κινεῖται χωρίς τριβές κατά μῆκος τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα x. Πάνω στό ὄχημα στήνουμε ἕνα ἁπλό ἐκκρεμές μέ μῆκος ℓ καί μάζα M_2. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἰδιοσυχνότητες τῶν μικρῶν ταλαντώσεων τοῦ συστήματος γύρω ἀπό τή θέση ἰσορροπίας συναρτήσει τῶν μεγεθῶν M_1, M_2, ℓ, τῆς σταθερᾶς τοῦ ἐλατηρίου K καί τῆς ἐπιτάχυνσης τῆς βαρύτητας g.



Λύση

Ἔστω x ἡ συντεταγμένη τοῦ κέντρου μάζας τοῦ ὀχήματος (χωρίς τό ἐκκρεμές) καί θ ἡ γωνιακή ἀπόκλιση τοῦ νήματος ἀπό τήν κατακόρυφο. Χωρίς νά χάσουμε γενικότητα μποροῦμε νά ὑποθέσουμε, ὅτι τό ἐκκρεμές εἶναι στερεωμένο στό μέσο τοῦ ὀχήματος. Τότε τό κέντρο μάζας τοῦ συστήματος ὄχημα + ἐκκρεμές ἔχει συντεταγμένη (γιά μικρή γωνία θ)

$$x_c = \frac{M_1 x + M_2(x+\ell\theta)}{M_1+M_2} \qquad (1)$$

Ἀφοῦ ἡ μόνη ἐξωτερική δύναμη πάνω στό σύστημα εἶναι ἡ τοῦ ἐλατηρίου, ἔχουμε

$$(M_1+M_2)\ddot{x}_c = -K(x-x_0) \qquad (2)$$

ὅπου x_0 εἶναι ἡ τιμή τοῦ x γιά τήν ὁποία τό ἐλατήριο ἔχει τό φυσικό μῆκος του.

Ἀντικαθιστῶντας τήν (1) στήν (2) ἔχουμε:

$$M_1\ddot{x}+M_2(\ddot{x}+\ell\ddot{\theta}) = -K(x-x_0) \qquad (3)$$

Μιά δεύτερη διαφορική ἐξίσωση ἔχουμε ἄν θεωρήσουμε τό σωμάτιο μέ μάζα M_2 τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἡ συνισταμένη τῆς τάσης τοῦ νήματος καί τοῦ βάρους $M_2 g$ ἔχει μέτρο $\sim M_2\ell\theta$ καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὁριζόντια γιά μικρές γωνίες θ. Ἄρα ἀφοῦ ἡ συντεταγμένη τῆς M_2 εἶναι $x+\ell\theta$, ἔχουμε

$$M_2(\ddot{x}+\ell\ddot{\theta}) = -M_2 g\theta \qquad (4)$$

Ἀναζητοῦμε τώρα τίς ἁπλές ἁρμονικές λύσεις τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων (3) καί (4). Θέτουμε

$$x-x_0 = X\cos\omega t$$

$$\theta = \Theta\cos\omega t$$

καί βρίσκουμε

$$-M_1\omega^2 X - \omega^2 M_2(X+\ell\Theta) = -KX$$

$$-M_2\omega^2(X+\ell\Theta) = -M_2 g\Theta$$

Οἱ δυνατές συχνότητες ω πρέπει νά πληροῦν τή συνθήκη

$$\begin{vmatrix} -M_1\omega^2-M_2\omega^2+K & -M_2\omega^2\ell \\ -M_2\omega^2 & M_2 g-M_2\omega^2\ell \end{vmatrix} = 0$$

δηλαδή

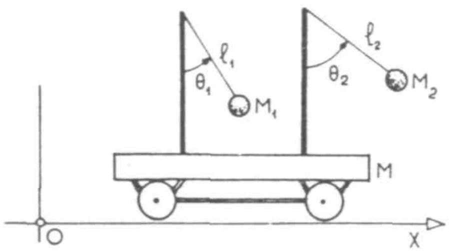
$$[M_1\ell-(M_1+M_2)\ell]\omega^4+[k\ell+g(M_1+M_2)]\omega^2-Kg=0$$

Οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι

$$\omega_\pm^2 = \frac{\ell k+g(M_1+M_2) \pm \sqrt{[\ell K+g(M_1+M_2)]^2-4\ell K M_1 g}}{2M_1\ell}$$

Παράδειγμα I-6 Ὄχημα μέ ἐκκρεμές

Ἕνα ὄχημα μέ μάζα M μπορεῖ νά κινεῖται χωρίς τριβές κατά μῆκος τοῦ ὁριζόντιου ἄξονα x. Πάνω στό ὄχημα (βλέπε σχῆμα) στήνουμε δύο ἐκκρεμῆ μέ μήκη ℓ_1 καί ℓ_2 καί μάζες M_1 καί M_2 ἀντίστοιχα. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ συχνότητες τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης τοῦ συστήματος περί τή θέση ἰσορροπίας του ἄν δίνονται τά μεγέθη M, M_1, M_2, ℓ_1, ℓ_2 καί g. Ὑποθέστε ὅτι τό κέντρο μάζας τοῦ ὅλου συστήματος (=ὄχημα + ἐκκρεμῆ), ἔχει μηδενική ταχύτητα. Ἐπίσης ὑποθέστε ὅτι πρόκειται γιά ταλαντώσεις πολύ μικροῦ πλάτους, δηλαδή οἱ γωνίες ἀποκλίσεως θ_1 καί θ_2 τῶν ἐκκρεμῶν ἀπό τήν κατακόρυφο εἶναι πολύ μικρές: $\sin\theta_1 \simeq \theta_1$ κλπ.



Λύση

Πρόκειται γιά δύο ἐκκρεμῆ πού εἶναι "συζευγμένα" ἐπειδή τό ὄχημα εἶναι ἐλεύθερο νά κινηθεῖ. Ἄν x_c εἶναι ἡ συντεταγμένη τοῦ κέντρου μάζας τοῦ ὀχήματος (χωρίς τά ἐκκρεμῆ) τότε οἱ ταχύτητες τῶν μαζῶν M_1 καί M_2 ὡς πρός τό ἔδαφος (γιά μικρές γωνίες ἀπόκλισης θ_1 καί θ_2) εἶναι $\dot{x}_c+\ell_1\dot{\theta}_1$ καί $\dot{x}_c+\ell_2\dot{\theta}_2$ ἀντιστοίχως. Τό ὅτι τό κέντρο μάζας τοῦ ὅ λ ο υ συστήματος ἔχει μηδενική ταχύτητα ἐκφράζεται μέ τή σχέση

$$M\dot{x}_c+M_1(\dot{x}_c+\ell_1\dot{\theta}_1)+M_2(\dot{x}_c+\ell_2\dot{\theta}_2)=0 \qquad (1)$$

Γράφουμε ἐπίσης τή σχέση "μάζα ἐπί ἐπιτάχυνση ἴσον δύναμη" γιά κάθε ἐκκρεμές:

$$M_1(\ddot{x}_c+\ell_1\ddot{\theta}_1)=-M_1 g\theta_1 \qquad (2)$$

$$M_2(\ddot{x}_c+\ell_2\ddot{\theta}_2)=-M_2 g\theta_2 \qquad (3)$$

Παραγωγίζουμε τήν ἐξ. (1) ὡς πρός τό χρόνο, λύνουμε ὡς πρός $\ddot{x}_c$, ἀντικαθιστοῦμε στίς (2) καί (3) καί βρίσκουμε:

$$\frac{M+M_2}{M+M_1+M_2}\,\ell_1\ddot{\theta}_1-\frac{M_2}{M+M_1+M_2}\,\ell_2\ddot{\theta}_2=-g\theta_1$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{M+M_1 \pm M_1}{M\ell} g$$

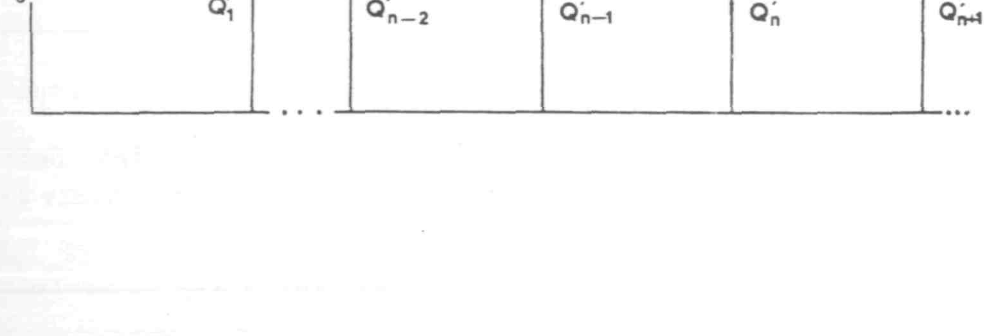
δηλ.
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{M+2M_1}{M} \cdot \frac{g}{\ell}}$$

καί
$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Εἶναι εὔκολο νά περιγράψει κανείς τίς ταλαντώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στίς παραπάνω συχνότητες. Ἡ ω_- ἀντιστοιχεῖ στήν περίπτωση πού τό ὄχημα εἶναι ἀκίνητο καί τά δύο ἐκκρεμῆ ἔχουν ἀντίθετες ἀποκλίσεις $\theta_1=-\theta_2$ γιά ὅλους τούς χρόνους t. Ἡ ω_+ ἀντιστοιχεῖ στήν ταλάντωση κατά τήν ὁποία τά ἐκκρεμῆ εἶναι ἀνά πᾶσα στιγμή παράλληλα δηλ. $\theta_1=\theta_2$ ἐνῶ τό ὄχημα ταλαντώνεται σέ φάση 180^0 ὡς πρός τά ἐκκρεμῆ (ἔτσι ὥστε τό κέντρο μάζας τοῦ ὅλου συστήματος νά εἶναι ἀκίνητο).

Παράδειγμα Ι-7 Ἐκθετική ἀπόσβεση

Ἐπιθυμοῦμε νά κάνουμε ἐπίδειξη τοῦ φαινομένου τῆς ἐκθετικῆς ἀπόσβεσης τοῦ πλάτους τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων σέ συζευγμένα κυκλώματα LC τῆς μορφῆς πού φαίνεται στό σχῆμα, ὅταν αὐτά διεγείρονται μέ τάση $V(t)=V_0\cos\omega t$ καί ἡ συχνότητα ω εἶναι μικρότερη ἀπό τή συχνότητα ω_0 τοῦ χαμηλότερου τρόπου ταλάντωσης. Ποιός εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός τμημάτων πού θά χρειαστοῦμε; Ἐφαρμογή γιά L=1H, $C=C_0=0.01$ μF, $\omega=5000\ s^{-1}$.



Λύση

Στό βρόχο 1 έχουμε

$$\frac{L}{2}\frac{dI_1}{dt}+\frac{Q_1}{C_0}+\frac{L}{2}\frac{dI_1}{dt}-\frac{Q_1'}{C}=V(t)=V_0\cos\omega t$$

Στό βρόχο n έχουμε

$$\frac{L}{2}\frac{dI_n}{dt}+\frac{Q_n}{C_0}+\frac{L}{2}\frac{dI_n}{dt}-\frac{Q_n'}{C}+\frac{Q_{n-1}'}{C}=0$$

ή

$$\frac{dI_n}{dt}+\frac{Q_n}{LC_0}-\frac{1}{LC}(Q_n'-Q_{n-1}')=0$$

Παραγωγίζουμε ώς πρός t καί βρίσκουμε

$$\frac{d^2I_n}{dt^2}+\frac{1}{LC_0}\frac{dQ_n}{dt}-\frac{1}{LC}\frac{d(Q_n'-Q_{n-1}')}{dt}=0$$

άλλά

$$\frac{dQ_n}{dt}=I_n$$

$$\frac{dQ_n'}{dt}=I_{n+1}-I_n$$

καί

$$\frac{dQ_{n-1}'}{dt}=I_n-I_{n-1}$$

Ἀντικαθιστοῦμε καί βρίσκουμε

$$\frac{d^2I_n}{dt^2}+\frac{1}{LC_0}I_n-\frac{1}{LC}[(I_{n+1}-I_n)-(I_n-I_{n-1})]=0$$

Ἄν ὁ ἀριθμός τῶν βρόχων εἶναι μεγάλος καί ἄν ὑποθέσουμε ὅτι θεωροῦμε ἐκεῖνες τίς διεγέρσεις στίς ὁποῖες ἡ διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαδοχικῶν βρόχων εἶναι πολύ μικρή, τότε τό ρεῦμα I_n θά διαφέρει πολύ λίγο ἀπό τά ρεύματα I_{n-1} καί I_{n+1}. Ἄν τή φάση τοῦ κύματος τήν ἐκφράσουμε μέ τό γινόμενο ka, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ὁ κάθε βρόχος ἀπέχει ἀπό τό γειτονικό του ἀπόσταση a καί ὅτι ὁ βρόχος n θά ἀπέχει ἀπό τήν ἀρχή ἀπόσταση z=na, χωρίς αὐτό νά σημαίνει ὅτι οἱ πραγματικές ἀποστάσεις τῶν βρόχων εἶναι a. Ἀφοῦ λοιπόν θεωροῦμε μικρές μεταβολές στή φάση, θεωροῦμε ὅτι τό a εἶναι μικρό καί ἐπομένως μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τή συνεχῆ μεταβλητή z καί νά γράψουμε

$$I_n(z,t)=I(z,t)$$

οπότε

$$I_{n-1}(t)=I(z-a,t)$$

καί

$$I_{n+1}(t)=I(z+a,t)$$

Ἀναπτύσσουμε σέ σειρά Taylor, κρατοῦμε μόνο ὅρους ὡς πρός a^2 καί παίρνουμε

$$I_{n+1}(t)=I(z,t)+a\frac{\partial I}{\partial z}+\frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}+\dots$$

$$I_{n-1}(t)=I(z,t)-a\frac{\partial I}{\partial z}+\frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}+\dots$$

Κάνουμε τίς κατάλληλες ἀντικαταστάσεις καί βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=-\frac{1}{LC_0}I+\frac{a^2}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}$$

Δοκιμάζουμε γιά τό $I(z,t)$ τή μορφή

$$I(z,t)=J(z)\cos\omega t$$

Μετά τίς ἀντικαταστάσεις καταλήγουμε στήν ἐξίσωση

$$\frac{d^2J(z)}{dt^2}=\left(\frac{1}{LC_0}-\omega^2\right)\frac{LC}{a^2}J(z)=-k^2J(z)$$

ὅπου

$$k^2=\left(\omega^2-\frac{1}{LC_0}\right)\frac{LC}{a^2}=(\omega^2-\omega_0^2)\frac{LC}{a^2}$$

Ἄν $\omega^2>\omega_0^2$ ἔχουμε διατηρούμενες ταλαντώσεις στό σύστημα.
Ἄν $\omega^2<\omega_0^2$ τό $k^2<0$ καί τό πλάτος $J(z)$ μειώνεται ἐκθετικά. Στή περίπτωση αὐτή

$$I(z,t)=I_0e^{-\kappa z}\cos\omega t$$

ὅπου

$$\kappa^2=(\omega_0^2-\omega^2)\frac{LC}{a^2}=\left(\frac{1}{LC_0}-\omega^2\right)\frac{LC}{a^2}$$

Γιά νά ἐπιδείξουμε τό φαινόμενο τῆς ἐξασθένησης πρέπει νά ἔχουμε ἀρκετούς βρόχους ὥστε σέ ἀπόσταση $z=na$ ἡ ποσότητα $e^{-\kappa z}=$ $=e^{-\kappa na}\ll 1$. Γιά πρακτικούς λόγους ἡ ποσότητα $1/20$ εἶναι ἀρκετά μικρή καί γι'αὐτό διαλέγουμε τό n ἔτσι, ὥστε

$$e^{-\kappa na}=e^{-\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)LC}\,n}\leqslant\frac{1}{20}=0.05$$

Ἀλλά $\omega_0^2=\frac{1}{LC_0}=10^8$ καί $LC_0=10^{-8}$ ἤ $e^{-0.87n}\leqslant 0.05$ ἤ $n\geqslant 3.46$ ἤ (n=ἀκέραιος) $n\geqslant 4$.

Ὁ ἀριθμός αὐτός τῶν βρόχων εἶναι ἀρκετά μικρός γιατί ἡ διεγείρουσα συχνότητα εἶναι ἀρκετά μικρή ($\omega=\frac{1}{2}\omega_0$). Ἄν εἴχαμε χρησιμοποιήσει $\omega=9000\ s^{-1}$ τότε θά ἔπρεπε νά εἴχαμε $n\geqslant 16$ καί ἄν $\omega=9900\ s^{-1}$ θά ἔπρεπε νά εἴχαμε $n\geqslant 150$ γιά νά παρατηρήσουμε τήν ἴδια ἐξασθένιση.

Παράδειγμα Ι-8 Χορδή μέ ἀρχική συνθήκη ταχύτητας

Εὔκαμπτη χορδή μέ μῆκος L καί γραμμική πυκνότητα μ ἔχει σταθερά ἄκρα καί τείνεται μέ τάση T_0. Διεγείρουμε τή χορδή τή χρονική στιγμή t=0 χτυπώντας την ἔτσι ὥστε ὅλη ἡ χορδή νά ἔχει μηδενική ἀρχική ἀπομάκρυνση καί μηδενική ταχύτητα, ἐκτός ἀπό τό τμῆμα $\left(\frac{L}{2}-\frac{a}{2},\frac{L}{2}+\frac{a}{2}\right)$ πού ἀποκτᾶ ἀμέσως ἀρχική ταχύτητα v_0. Ὑπολογίστε τά πλάτη τῶν ἁρμονικῶν συνιστωσῶν πού συμβάλλουν στή κίνηση τῆς χορδῆς.

Λύση

Ἡ γενική ἀπομάκρυνση τῆς χορδῆς $\psi(z,t)$ εἶναι ἐπαλληλία τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσής της, δηλ.

$$\psi(z,t)=\sum_n \cos(\omega_n t+\varphi_n)\left[A_n \sin k_n z+B_n\cos k_n z\right] \qquad (1)$$

ὅπου ω_n εἶναι οἱ συχνότητες τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης, φ_n εἶναι σταθερές φάσεως, $k_n=nk=\frac{2\pi n}{\lambda}$, $k=k_1$ καί $\lambda=\lambda_1$.

Ἡ (1) ἁπλοποιεῖται ἄν λάβουμε ὑπόψη τίς συνοριακές συνθῆκες ὅτι ἡ χορδή ἔχει σταθερά ἄκρα, δηλ.

$$\psi(0,t)=\psi(L,t)=0 \quad \text{γιά κάθε } t \qquad (2)$$

καί τίς ἀρχικές συνθῆκες ὅτι γιά t=0 ἡ χορδή δέν ἔχει ἀπομακρυνθεῖ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας καί ὅτι μόνο ἕνα τμῆμα της ἔχει ταχύτητα v_0, δηλ.

$$\psi(z,0)=0$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,t)\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0 & \text{ἄν } z\in\left(\frac{L}{2}-\frac{a}{2},\frac{L}{2}+\frac{a}{2}\right) \\ 0 & \text{γιά τά ὑπόλοιπα } z. \end{cases} \qquad (3)$$

Στίς παραπάνω ἐκφράσεις δεχτήκαμε ὅτι τά σταθερά ἄκρα ἔχουν συντεταγμένες z=0 καί z=L. Τό διάστημα $\left(\frac{L}{2}-\frac{a}{2},\frac{L}{2}+\frac{a}{2}\right)$ ὁ-

Ἀλλά $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0} = 10^8$ καί $LC_0 = 10^{-8}$ ἤ $e^{-0.87n} \leqslant 0.05$ ἤ $n \geqslant 3.46$ ἤ (n=ἀκέραιος) $n \geqslant 4$.

Ὁ ἀριθμός αὐτός τῶν βρόχων εἶναι ἀρκετά μικρός γιατί ἡ διεγείρουσα συχνότητα εἶναι ἀρκετά μικρή ($\omega = \frac{1}{2}\omega_0$). Ἄν εἴχαμε χρησιμοποιήσει $\omega = 9000\ s^{-1}$ τότε θά ἔπρεπε νά εἴχαμε $n \geqslant 16$ καί ἄν $\omega = 9900\ s^{-1}$ θά ἔπρεπε νά εἴχαμε $n \geqslant 150$ γιά νά παρατηρήσουμε τήν ἴδια ἐξασθένιση.

Παράδειγμα Ι-8 Χορδή μέ ἀρχική συνθήκη ταχύτητας

Εὔκαμπτη χορδή μέ μῆκος L καί γραμμική πυκνότητα μ ἔχει σταθερά ἄκρα καί τείνεται μέ τάση T_0. Διεγείρουμε τή χορδή τή χρονική στιγμή $t=0$ χτυπώντας την ἔτσι ὥστε ὅλη ἡ χορδή νά ἔχει μηδενική ἀρχική ἀπομάκρυνση καί μηδενική ταχύτητα, ἐκτός ἀπό τό τμῆμα $\left(\frac{L}{2}-\frac{a}{2}, \frac{L}{2}+\frac{a}{2}\right)$ πού ἀποκτᾶ ἀμέσως ἀρχική ταχύτητα v_0. Ὑπολογίστε τά πλάτη τῶν ἁρμονικῶν συνιστωσῶν πού συμβάλλουν στή κίνηση τῆς χορδῆς.

Λύση

Ἡ γενική ἀπομάκρυνση τῆς χορδῆς $\psi(z,t)$ εἶναι ἐπαλληλία τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσής της, δηλ.

$$\psi(z,t) = \sum_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\left[A_n \sin k_n z + B_n \cos k_n z\right] \qquad (1)$$

ὅπου ω_n εἶναι οἱ συχνότητες τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης, φ_n εἶναι σταθερές φάσεως, $k_n = nk = \frac{2\pi n}{\lambda}$, $k=k_1$ καί $\lambda=\lambda_1$.

Ἡ (1) ἁπλοποιεῖται ἄν λάβουμε ὑπόψη τίς συνοριακές συνθῆκες ὅτι ἡ χορδή ἔχει σταθερά ἄκρα, δηλ.

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \quad \text{γιά κάθε } t \qquad (2)$$

καί τίς ἀρχικές συνθῆκες ὅτι γιά $t=0$ ἡ χορδή δέν ἔχει ἀπομακρυνθεῖ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας καί ὅτι μόνο ἕνα τμῆμα της ἔχει ταχύτητα v_0, δηλ.

$$\psi(z,0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,t)\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 & \text{ἄν } z \in \left(\frac{L}{2}-\frac{a}{2}, \frac{L}{2}+\frac{a}{2}\right) \\ 0 & \text{γιά τά ὑπόλοιπα } z. \end{cases} \qquad (3)$$

Στίς παραπάνω ἐκφράσεις δεχτήκαμε ὅτι τά σταθερά ἄκρα ἔχουν συντεταγμένες $z=0$ καί $z=L$. Τό διάστημα $\left(\frac{L}{2}-\frac{a}{2}, \frac{L}{2}+\frac{a}{2}\right)$ ὁνομάζουμε δ.

'Η (1) λόγω τῆς πρώτης ἀπό τίς (2) δίνει

$$\psi(0,t)=\sum_n \cos(\omega_n t+\varphi_n)B_n=0 \quad \text{γιά κάθε } t$$

ὁπότε προκύπτει

$$B_n=0$$

'Η δεύτερη ἀπό τίς (2) δίνει τώρα

$$\psi(L,t)=\sum_n A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)\sin k_n L=0$$

ὁπότε τά δυνατά μήκη κύματος λ_n εἶναι μόνο αὐτά πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$\frac{2\pi}{\lambda_n}L=n\pi, \quad n=1,2,\ldots$$

ἤ

$$\lambda_n=\frac{2L}{n} \tag{4}$$

'Επειδή ἡ ταχύτητα διάδοσης ἐγκαρσίων κυμάτων στήν τελείως ἐλαστική χορδή πού θεωροῦμε εἶναι

$$v=\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

καί ἰσχύει ἡ σχέση διασπορᾶς $\omega=vk$, προκύπτει ὅτι οἱ ἰδιοσυχνότητες τῶν κανονικῶν τρόπων ταλάντωσης τῆς χορδῆς εἶναι

$$\omega_n=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \tag{5}$$

'Η πρώτη ἀπό τίς (3) καθορίζει τίς τιμές τῶν φ_n:

$$\psi(z,0)=\sum_n A_n\cos\varphi_n \sin\frac{2\pi nz}{\lambda}=0$$

ὁπότε

$$\cos\varphi_n=0 \quad \text{ἤ} \quad \varphi_n=\frac{\pi}{2}$$

῎Αρα καταλήγουμε στήν ἀπομάκρυνση

$$\psi(z,t)=\sum_n^{\infty} A_n\cos\left(\omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{2\pi nz}{\lambda} \tag{6}$$

Οἱ συντελεστές A_n ὑπολογίζονται μέ τή βοήθεια τῆς δεύτερης ἀρχικῆς συνθήκης (3) πού μᾶς δίνει γιά τήν (6):

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,t)\Big|_{t=0} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\omega_n \sin\frac{2\pi n z}{\lambda} = \begin{cases} v_0 & \text{ἄν } z\in\delta \\ 0 & \text{ἄν } z\notin\delta \end{cases} \quad (7)$$

Οἱ $-A_n\omega_n$ εἶναι οἱ συντελεστές Fourier τῆς σειρᾶς (7) στήν ὁποία ἀναπτύσσεται ἡ συνάρτηση $F(z)=\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0}$ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας. Ἄρα θά δίνωνται ἀπό τή σχέση

$$C_n \equiv -A_n\omega_n = \frac{2}{\lambda}\int_{z_0}^{z_0+\lambda} F(z)\sin(nkz)dz =$$

$$= \frac{2v_0}{\lambda}\int_{\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{L}{2}+\frac{a}{2}} \sin(nkz)dz \quad (8)$$

Εὔκολα βρίσκουμε ἀπό τήν (8) ὅτι τά ζητούμενα πλάτη A_n τῶν ἁρμονικῶν συνιστωσῶν εἶναι

$$A_n = \frac{2v_0}{n\pi\omega_n}\left\{\cos\left[\frac{n\pi}{\lambda}(L+a)\right]-\cos\left[\frac{n\pi}{\lambda}(L-a)\right]\right\} \quad (9)$$

ἤ

$$A_n = \frac{2v_0 L}{\pi^2 n^2}\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\left(1-\frac{a}{L}\right)-\cos\frac{n\pi}{2}\left(1+\frac{a}{L}\right)\right\}$$

λόγω τῆς (5) καί τοῦ ὅτι $\lambda=2L$, ἐνῶ ἡ γενική ἀπομάκρυνση δίνεται ἀπό τήν (6).

Παράδειγμα I-9

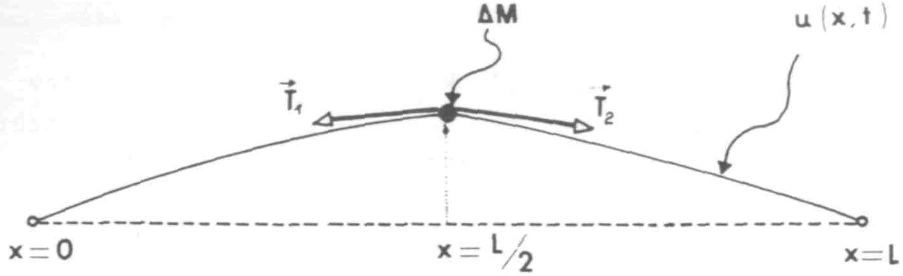
Ὁμογενής χορδή ἔχει μῆκος L καί μάζα ἀνά μονάδα μήκους ρ. Ἡ τάση εἶναι T καί τά ἄκρα της εἶναι σταθερά.

Ἄν κολλήσουμε στό μέσο τῆς χορδῆς ἕνα κομμάτι τσίκλα μάζας ΔΜ, ἡ θεμελιώδης ἰδιοσυχνότητα τῆς χορδῆς μεταβάλλεται κατά Δω.

Ὑπολογίστε τό λόγο Δω/ΔΜ στό ὅριο ΔΜ ⟶ 0 σάν συνάρτηση τῶν T, ρ καί L

Λύση

Ἄς ὑποθέσουμε, ὅτι ἡ θέση ἰσορροπίας τῆς χορδῆς εἶναι κατά μῆκος τοῦ ἄξονα x καί τά ἄκρα της εἶναι στά σημεῖα x=0 καί x=L. Ἔστω u(x,t) ἡ ἐγκάρσια μετατόπιση τῆς χορδῆς σάν συνάρτηση τῆς συντεταγμένης x καί τοῦ χρόνου t. Ὅταν ἡ τσίκλα κολληθεῖ στό μέσο τῆς χορδῆς θά δέχεται μιά δύναμη $\vec{T}_1$ ἀπό τό ἀριστερό τμῆμα τῆς χορδῆς καί μιά δύναμη $\vec{T}_2$ ἀπό τό δεξιό τμῆμα τῆς χορδῆς (βλ. σχῆμα).



Οἱ προβολές τῶν $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ πάνω στήν ἐγκάρσια κατεύθυνση y εἶναι: $T(\partial u/\partial x)_1$ καί $-T(\partial u/\partial x)_2$ ὅπου οἱ δεῖκτες 1 καί 2 ἀναφέρονται στό ἀριστερό καί δεξιό τμῆμα τῆς χορδῆς. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωση κίνησης γιά τήν τσίκλα γράφεται:

$$(\Delta M)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u\left(\frac{L}{2},t\right) = T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2\right]_{x=L/2} \qquad (1)$$

Ἡ παραπάνω σχέση σέ συνδυασμό μέ τή συνθήκη συνέχειας τῆς u στό $x=\frac{L}{2}$ καί μέ τίς ὁριακές συνθῆκες $u(0,t)=u(L,t)=0$ πρέπει νά ἰσχύουν γιά ὅλους τούς χρόνους t. Χ ω ρ ί ς τήν τσίκλα(δηλ. γιά $\Delta M=0$) ἡ παράγωγος $\partial u/\partial x$ εἶναι συνεχής στό $x=L/2$ καί ἡ ταλάντωση τῆς χορδῆς μέ τή θεμελιώδη συχνότητα,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad \left(k_1 = \frac{\pi}{L}\right),$$

ἔχει τή μορφή

$$u(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

Μέ τήν τσίκλα κολλημένη ἡ θεμελιώδης συχνότητα γίνεται $\omega_1 + \Delta\omega$ καί ἡ παράγωγος $\frac{\partial u}{\partial x}$ ἔχει ἀσυνέχεια στό σημεῖο $x=L/2$. Ἡ μορφή τῆς $u(x,t)$ πρέπει νά εἶναι

$$u(x,t) = \begin{cases} B\sin\left[(k_1+\Delta k)x\right]\cos\left[(\omega_1+\Delta\omega)t\right], & 0 < x < L/2 \\ B\sin\left[(k_1+\Delta k)(L-x)\right]\cos\left[(\omega_1+\Delta\omega)t\right], & L/2 < x < L \end{cases}$$

ὥστε νά ἱκανοποιεῖ τίς σχέσεις $u(0,t)=u(L,t)=0$ καί νά εἶναι συνεχής στό $x=L/2$.

Ἀντικαθιστῶντας στήν (1) καί ἀμελώντας διαφορικά ἀνώτερης τάξης ἔχουμε

$$-(\Delta M)\omega_1^2 = TLk_1(\Delta k)$$

Ἀπό τή σχέση $\Delta k=\Delta\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}}$ ἔχουμε τελικά

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta M} = -\pi\ \frac{T^{1/2}\rho^{-3/2}}{L^2}$$

Παράδειγμα I-10 Ἐγκάρσιες ταλαντώσεις μή ἰδανικῆς χορδῆς

Μιά μή ἰδανική χορδή ἔχει μῆκος L=1 m καί τά ἄκρα της εἶναι ἀκλόνητα. Ἡ σχέση διασπορᾶς γιά αὐτή τή χορδή εἶναι $\omega^2=v_0^2k^2+\beta^2k^4$, ὅπου $v_0=400ms^{-1}$ καί $\beta=5\ m^2s^{-1}$. Βρεῖτε τά μήκη κύματος τῶν στάσιμων κυμάτων πού μποροῦν ν' ἀναπτυχθοῦν στή χορδή καί προσδιορίστε τίς ἀντίστοιχες συχνότητες.

Λύση

Τά ἐπιτρεπόμενα μήκη κύματος τῶν στάσιμων κυμάτων προκύπτουν μέ τή βοήθεια τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν, ὅπως ἀκριβῶς στήν περίπτωση ἰδανικῆς χορδῆς, δηλ. ἀρκεῖ ἡ χορδή νά ἔχει ἀκλόνητα ἄκρα γιά νά ὁδηγηθοῦμε στό ἀποτέλεσμα

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Οἱ ἐπιτρεπόμενες συχνότητες δ έ ν ἀποτελοῦν ἁρμονική σειρά, ἀφοῦ γιά αὐτή τή χορδή $v_\phi = \frac{\omega}{k} \neq$σταθ. Θά πρέπει νά βρεθοῦν ἀπό τή γενική σχέση

$$\lambda_n v_n = v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{v_0^2+\beta^2k_n^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{4\pi^2\beta^2}{\lambda_n^2}}\ , \qquad (n=1,2,\ldots)$$

πού συνδέει τά ἐπιτρεπόμενα μήκη κύματος μέ τίς ἀντίστοιχες συχνότητες. Ἔχουμε λοιπόν

$$v_n = \frac{n}{2L}\sqrt{v_0^2 + \frac{n^2\pi^2\beta^2}{L^2}} = 200.15Hz,\ \ 401.23Hz,\ \ 604.15Hz,\ldots$$

Παράδειγμα I-11 Συντονιστής κοιλότητας τοῦ Helmholtz

Ὅταν φυσσοῦμε δυνατά κοντά στό στόμιο ἑνός μπουκαλιοῦ ἀκοῦμε ἦχο χαμηλῆς σχετικά συχνότητας. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ συχνότητα αὐτή γιά ἰδανικό μπουκάλι πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο ὁμόκεντρους κυλίνδρους μέ ὄγκους V_0 καί V_λ μέ τόν κύλινδρο V_λ τοποθετημένο πάνω ἀπό τόν V_0 ὅπως φαίνεται στό σχῆμα.

$$g(x,t)=\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}=-\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Παράδειγμα I-14

Ένα μεγάφωνο διαμέτρου 30 cm δημιουργεῖ στόν ἀέρα μέ συνήθεις συνθή - κες πίεσης καί θερμοκρασίας, ἠχητικό κύμα συχνότητας 1000 Hz καί μέσης ἰσχύ- ος 50W. Ὑπολογίστε τό πλάτος ταλάντωσης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ μεγάφωνου αὐτοῦ, ἄν ὑποτεθεῖ ἐπίπεδη.

Λύση

Ἄν P_g εἶναι ἡ στιγμιαία διαφορική πίεση τοῦ ἠχητικοῦ κύματος στήν ἐπιφάνεια τοῦ μεγάφωνου καί ψ ἡ ἀντίστοιχη στιγμιαία μετατόπιση, ἡ στιγμιαία ἰσχύς I πού παράγει τό μεγάφωνο θά εἶναι

$$I=AP_g\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (1)$$

ὅπου A=ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας τοῦ μεγαφώνου. Γιά κῦμα ὁδεῦον κατά τόν ἄξονα τῶν x μέ κυκλική συχνότητα ω ἔχουμε γενικά

$$\psi=\psi_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{v}x+\varphi\right) \qquad (2)$$

$$P_g=-\gamma P_0\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\omega}{v}\gamma P_0\psi_0\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{v}x+\varphi\right), \qquad (3)$$

ὅπου v ἡ φασική ταχύτητα, P_0 ἡ μέση πίεση καί $\gamma=1,4$ γιά τόν ἀέρα. Ἀντικαθιστῶντας τά ψ καί P_g ἀπό τίς ἐξισώσεις (2) καί (3) στήν (1) καί παίρνοντας τή μέση χρονική τιμή τῆς ἰσχύος ἔχουμε

$$\langle I\rangle=\frac{1}{2}A\frac{\gamma P_0}{v}\omega^2\psi_0^2.$$

Τέλος λύνοντας ὡς πρός ψ_0 βρίσκουμε

$$\psi_0=\left(\frac{2v\langle I\rangle}{\gamma P_0 A\omega^2}\right)^{1/2}=0.29\ \mathrm{mm}$$

Παράδειγμα I-15 Κρουστικό κύμα

Θεωροῦμε μακρύ σωλήνα τοῦ ὁποίου τό ἕνα ἄκρο κλείνουμε μέ ἕνα ἔμβολο. Ὁ ἀέρας στό σωλῆνα ἔχει πίεση P_0, θερμοκρασία T_0 καί πυκνότητα ρ_0. Μέ αὐτές τίς συνθῆκες ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου στόν ἀέρα εἶναι v_0. Κατά τή χρονική στιγμή t=0 τό ἔμβολο ἀποκτάει ξαφνικά ταχύτητα V, ἡ ὁποία κρατιέται σταθερή ἀπό ἐξωτερική δύναμη P_1S, ὅπου P_1 ἡ πίεση τοῦ ἀέρα πού βρίσκεται μεταξύ ἐμβόλου καί μετώπου κρουστικοῦ κύματος καί S ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβόλου.

καί θεωρώντας τό όριο $\Delta z \to 0$ (όπότε ή τεθλασμένη πορεία πού ά-κολουθεῖ ή άκτίνα τοῦ φωτός γίνεται καμπύλη) παίρνουμε

$$\frac{dx}{dz}=\frac{n_1}{n(z)}\theta',$$

όπου

$$n(z)=1+\frac{\beta}{z+10\beta}=\frac{z+11\beta}{z+10\beta},\quad n_1\equiv n(0)=\frac{11}{10}.$$

Ἄρα τελικά βλέπουμε ὅτι ὁ νόμος τοῦ Snell ὁδηγεῖ στή συνθήκη

$$\frac{dx}{dz}=\frac{11}{10}\,\frac{z+10\beta}{z+11\beta}\theta',$$

πού εἶναι μιά άπλή διαφορική έξίσωση πρώτης τάξης καί μπορεῖ νά όλοκληρωθεῖ άμέσως. Τά ὅρια τῆς όλοκλήρωσης μᾶς τά δίνουν οἱ συν-τεταγμένες τῶν σημείων Α καί Π στό σύστημα άναφορᾶς τοῦ σχήμα-τος, ὅπου $A=A(90\beta\tan\theta=90\beta\theta,\ 90\beta)$ καί $\Pi=\Pi(0,0)$. Ἔχουμε λοιπόν

$$\int_0^{90\beta\theta}dx=\frac{11}{10}\theta'\int_0^{90\beta}\frac{z+10\beta}{z+11\beta}dz,$$

ή(*)

$$90\beta\theta=\frac{11}{10}\theta'(90\beta-\beta\ln 101\beta+\beta\ln 11\beta),$$

ή

$$90\theta=\frac{11}{10}\theta'\left(90-\ln\frac{101}{11}\right),$$

ή

$$\theta'=0.932\theta\simeq 1^{0}\ 52'.$$

Παράδειγμα I-17 Ἀνάκλαση καί μετάδοση μηχανικῶν κυμάτων

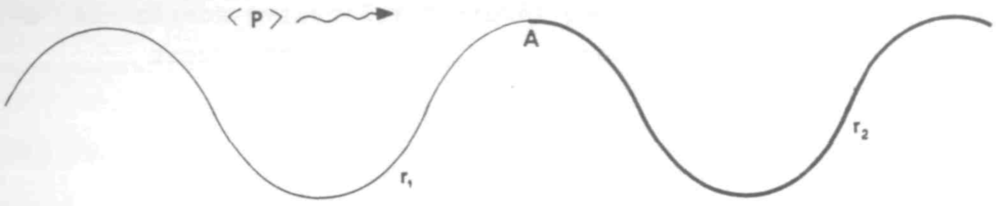
Δυό χορδές (άπό τό ἴδιο ύλικό) ἔχουν κυκλικές διατομές μέ διαμέτρους r_1 καί r_2, εἶναι ένωμένες στό σημεῖο Α καί εἶναι τεντωμένες μέ κοινή τάση Τ. Ἕνα άρμονικό έγκάρσιο (γραμμικά πολωμένο) κύμα, μέ πλάτος ψ_0 καί κυκλική συχνότητα ω, προσπίπτει άπό άριστερά στό σημεῖο Α τῆς άσυνέχειας· ή μέση τιμή τῆς ίσχύος πού μεταφέρει εἶναι $\langle P\rangle$.

α) Ποιά εἶναι τά πλάτη τοῦ μεταδιδόμενου καί τοῦ άνακλώμενου κύματος;

β) Ποιές εἶναι οἱ μέσες τιμές τῶν ίσχύων πού μεταφέρει καθένα άπό αὐτά τά κύματα;

γ) Βρεῖτε τό λόγο τῶν διαμέτρων r_1/r_2, ὥστε τό 25% τῆς προσπίπτουσας ί-σχύος $\langle P\rangle$ νά άνακλᾶται, ένῶ τό 75% νά μεταδίδεται. (βλ. καί πρόβλημα I-18).

(*) $\frac{x+\alpha}{x+\beta}\equiv 1+\frac{\alpha-\beta}{x+\beta}$, ἄρα $\int\frac{x+\alpha}{x+\beta}dx=x+(\alpha-\beta)\ln|x+\beta|$



Λύση

Τό προσπίπτον κύμα ἔχει τή μορφή

$$\psi(z,t)=\psi_0\cos(\omega t-kz),$$

ὁπότε ἡ μέση τιμή <P> τῆς ἰσχύος πού αὐτό μεταφέρει ἐκφράζεται σάν

$$<P>=Z_1\left\langle\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\rangle=\frac{1}{2}Z_1\psi_0^2\omega^2,$$

ὅπου Z_1 ἡ χαρακτηριστική σύνθετη ἀντίσταση τῆς χορδῆς μέ διάμετρο r_1, πάνω στήν ὁποία μεταδίδεται τό προσπίπτον κύμα. Τά πλάτη τοῦ ἀνακλώμενου καί μεταδιδόμενου κύματος εἶναι ἀντίστοιχα

$$R_{12}\psi_0\ ,\quad T_{12}\psi_0=(1+R_{12})\psi_0,$$

ὅπου R_{12} καί T_{12} οἱ συντελεστές ἀνάκλασης καί μετάδοσης ἀντίστοιχα ἀπό τή χορδή 1 στή χορδή 2. Ἄν Z_2 ἡ χαρακτηριστική σύνθετη ἀντίσταση τῆς χορδῆς 2, ἔχουμε

$$R_{12}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}.$$

Ἀνάλογα μέ τό προσπίπτον κύμα, οἱ μέσες τιμές τῶν ἰσχύων πού μεταφέρουν τό ἀνακλώμενο καί τό μεταδιδόμενο κύμα εἶναι ἀντίστοιχα

$$<P_{ref}>=\frac{1}{2}Z_1(R_{12}\psi_0)^2\omega^2,\quad <P_{tr}>=\frac{1}{2}Z_2(T_{12}\psi_0)^2\omega^2.$$

Ἄν θέλουμε νά ἀνακλᾶται τό ἕνα τέταρτο τῆς προσπίπτουσας ἰσχύος, θά πρέπει

$$<P_{ref}>/<P>=R_{12}^2=1/4,$$

δηλ.

$$\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}=\pm\frac{1}{2}\ .$$

Ἄν ρ_1 καί ρ_2 οἱ γραμμικές πυκνότητες τῶν δυό χορδῶν, ἀφοῦ οἱ χορδές τείνονται μέ κοινή τάση T καί εἶναι κατασκευασμένες ἀπό τό ἴδιο ὑλικό μέ πυκνότητα ρ, θά ἔχουμε

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{T\rho_1}{T\rho_2}} = \sqrt{\frac{\pi r_1^2 \rho}{\pi r_2^2 \rho}} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Ἐπομένως,

$$\frac{r_1/r_2-1}{r_1/r_2+1} = \pm\frac{1}{2},$$

πού δίνει $r_1/r_2=1/3$ ἤ 3.

Παράδειγμα Ι-18 Ὁδεύοντα κύματα σέ χορδή μέ ἀσυνέχεια πυκνότητας

Χορδή τεντώνεται κατά μῆκος τοῦ ἄξονα τῶν z μέ τάση T_0 καί ἔχει γραμμική πυκνότητα μ_1 γιά $-\infty<z<0$ καί μ_2 γιά $0<z<\infty$. Τό ἐγκάρσιο κύμα $\psi(z,t)=\psi_0\cos(\omega t-kz)$ κινεῖται στό ἀριστερό τμῆμα τῆς χορδῆς καί προσπίπτει στό σημεῖο $z=0$.

α) Γράψτε τό προκύπτον κύμα στή περιοχή $-\infty<z<0$ σάν ἐπαλληλία δύο στασίμων κυμάτων.

β) Ποιά εἶναι ἡ διαφορά φάσεως προσπίπτοντος-ἀνακλωμένου καί προσπίπτοντος-μεταδιδομένου κύματος;

γ) Δεῖξτε ὅτι ἡ μέση μεταδιδομένη ἰσχύς στή περιοχή $z>0$ ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῆς μέσης ἰσχύος τοῦ προσπίπτοντος κύματος μεῖον τή μέση ἰσχύ τοῦ ἀνακλωμένου (Βλ. καί παράδειγμα Ι-17).

Λύση

α) Στήν περιοχή $-\infty<z<0$ ἔχουμε δύο κύματα, τό προσπίπτον

$$\psi(z,t)=\psi_0\cos(\omega t-kz)$$

καί τό ἀνακλώμενο

$$\psi_{ref}(z,t)=R_{12}\psi_0\cos(\omega t+kz)$$

ὅπου

$$R_{12}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\in[-1,+1]$$

εἶναι ὁ συντελεστής ἀνακλάσεως τοῦ κύματος στό $z=0$ καί $Z_i=\sqrt{T_0\mu_i}$ $i=1,2$, εἶναι ἡ ἐμπέδηση (χαρακτηριστική σύνθετη ἀντίσταση) τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων τῆς χορδῆς.

Τό προκύπτον κύμα $\psi_{o\lambda}(z,t)$ θά εἶναι

$$\psi_{o\lambda}(z,t)=\psi(z,t)+\psi_{ref}(z,t)=$$

$$=\psi_0\cos(\omega t-kz)+R_{12}\psi_0\cos(\omega t+kz)=$$

$$=\psi_0\cos\omega t\cos kz+\psi_0\sin\omega t\sin kz+$$

$$R_{12}\psi_0\cos\omega t\cos kz-R_{12}\psi_0\sin\omega t\sin kz=$$

$$=\psi_0(1+R_{12})\cos kz\cos\omega t+\psi_0(1-R_{12})\sin\omega t\sin kz$$

β) Ἄν $\mu_1>\mu_2$, τότε $Z_1>Z_2$, δηλ. $R_{12}>0$, ὁπότε ἡ διαφορά φάσεως προσπίπτοντος - ἀνακλωμένου θά εἶναι μηδέν. Ἄν $\mu_1<\mu_2$, τότε $R_{12}<0$, ὁπότε ἡ διαφορά φάσεως θά ἰσοῦται μέ π.

Τό μεταδιδόμενο κύμα εἶναι

$$\psi_{tr}(z,t)=T_{12}\psi_0\cos(\omega t-k'z)$$

ὅπου $T_{12}=1+R_{12}\geqslant 0$. Ἄρα ἡ διαφορά φάσεως προσπίπτοντος - μεταδιδομένου εἶναι πάντοτε μηδέν.

γ) Ἡ μέση ἰσχύς ἑνός κύματος πού διαδίδεται σέ ὁμογενή χορδή εἶναι

$$\langle P\rangle=\langle Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\rangle$$

Ἄρα ἡ μέση, ἰσχύς τοῦ προσπίπτοντος, τοῦ ἀνακλωμένου καί τοῦ μεταδιδομένου θά εἶναι ἀντίστοιχα

$$\langle P\rangle=\langle Z_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\rangle=Z_1\omega^2\psi_0^2\langle\cos^2(\omega t-kz)\rangle$$

$$=\frac{1}{2}Z_1\omega^2\psi_0^2$$

$$\langle P_{ref}\rangle=\langle Z_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\rangle=\frac{1}{2}Z_1\omega^2R_{12}^2\psi_0^2$$

$$\langle P_{tr}\rangle=\langle Z_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\rangle=\frac{1}{2}Z_2\omega^2T_{12}^2\psi_0^2$$

Ἔχουμε ὅτι

$$\langle P\rangle-\langle P_{ref}\rangle=\frac{1}{2}Z_1\omega^2(1-R_{12}^2)\psi_0^2$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δειχθεῖ ὅτι

$$Z_2T_{12}^2=Z_1(1-R_{12}^2)$$

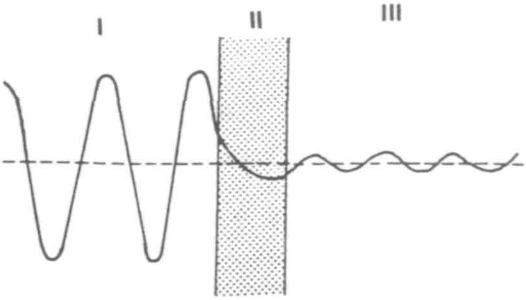
ἤ

$$Z_2(1+R_{12})^2=Z_1(1-R_{12}^2)$$

Ἀντικαθιστώντας τή ἔκφραση γιά τό R_{12} βλέπουμε ὅτι ἡ παραπάνω σχέση ἀληθεύει.

Παράδειγμα I-19 Συχνότητα ἀποκοπῆς

Δεχτῆτε ὅτι τά ἠλεκτρόνια σθένους τῶν μετάλλων συμπεριφέρονται σάν ἐλεύθερα ἠλεκτρόνια. Θεωροῦμε ἕνα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα μέ μῆκος κύματος στήν ὁρατή περιοχή (δηλ. $0.4\mu m \leqslant \lambda \leqslant 0.7\mu m$), πού προσπίπτει ἀπό ἀριστερά (βλ. σχῆμα) πάνω σ'ἕνα λεπτό φύλλο χρυσοῦ.



α) Γράψτε τίς σχέσεις διασπορᾶς τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος μέσα κι ἔξω ἀπό τό μέταλλο.

β) Ἐκτιμῆστε τόν ἀριθμό τῶν ἐλεύθερων ἠλεκτρονίων ἀνά μονάδα ὄγκου στό χρυσό καί ἑπομένως τή συχνότητα ἀποκοπῆς ν_p. Περιμένουμε νά ὑπάρχει ὁδεῦον ἠλεκτρομαγνητικό κύμα μέσα στό φύλλο τοῦ χρυσοῦ;

γ) Τί τάξης μεγέθους θά ἔπρεπε νά ἦταν τό πάχος τοῦ φύλλου ὥστε ἕνα σημαντικό μέρος (π.χ. τό ἕνα δέκατο) τῆς ἔντασης τῆς προσπίπτουσας ἀκτίνας νά διαδίδεται στήν περιοχή III πίσω ἀπό τό φύλλο;

Τό μοριακό βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 197.2 καί ἡ πυκνότητά του $19.3 gr/cm^3$.

Λύση

α) Στίς περιοχές I καί III, ἔξω ἀπό τό μέταλλο, ὁ χῶρος εἶναι κενός καί ἑπομένως ἡ σχέση διασπορᾶς εἶναι ἁπλά $\omega = ck$. Ἀντίθετα, στήν περιοχή II, μέσα στό μέταλλο, ὑπάρχουν ἐλεύθερα ἠλεκτρόνια ἀγωγιμότητας καί ἔχουμε

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_p^2 + c^2k^2 & \text{ἄν} \quad \omega > \omega_p \\ \omega_p^2 - c^2\kappa^2 & \text{ἄν} \quad \omega < \omega_p \end{cases}$$

Ἡ χαρακτηριστική "συχνότητα πλάσματος" ω_p δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

ὅπου N εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ἐλευθέρων ἠλεκτρονίων ἀνά μονάδα ὄγκου τοῦ χρυσοῦ καί m,e ἡ μάζα καί τό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου ἀντίστοιχα.

β) Ἄν M καί ρ εἶναι ἀντίστοιχα τό μοριακό βάρος καί ἡ πυκνότητα τοῦ χρυσοῦ, ὁ ἀριθμός ἀτόμων ἀνά μονάδα ὄγκου τοῦ χρυσοῦ θά εἶναι

$$N = \frac{\rho N_{AV}}{M}.$$

Ἄν δεχτοῦμε ὅτι κάθε ἄτομο συνεισφέρει κατά μέσο ὅρο ἕνα ἐλεύθερο ἠλεκτρόνιο, ἡ παραπάνω ἔκφραση ἐκτιμάει τόν ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων ἀγωγιμότητας ἀνά μονάδα ὄγκου στό χρυσό, δηλ.

$$N \approx 0.589 \times 10^{23} \text{ ἠλεκτρόνια/cm}^3.$$

Ἑπομένως βρίσκουμε

$$\omega_p \approx 1.37 \times 10^{16} \ s^{-1} \quad ἤ \quad \nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 2.18 \times 10^{15} \ s^{-1}.$$

Μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης $\lambda\nu = c$ βρίσκουμε ὅτι ἡ δοσμένη ζώνη μηκῶν κύματος τοῦ ὁρατοῦ φωτός ἀντιστοιχεῖ στή ζώνη συχνοτήτων

$$4.3 \times 10^{14} \ s^{-1} \leqslant \nu \leqslant 7.5 \times 10^{14} \ s^{-1},$$

πού βρίσκεται ὁλόκληρη κ ά τ ω ἀπό τή συχνότητα ἀποκοπῆς ν_p. Ἑπομένως, μέσα στό φύλλο τοῦ χρυσοῦ περιμένουμε ἕνα ἐκθετικό ἠλεκτρομαγνητικό "κύμα".

γ) Τό μῆκος ἐξασθένησης τοῦ ἐκθετικοῦ κύματος μέσα στό φύλλο τοῦ χρυσοῦ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\delta = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}.$$

Γιά τό κέντρο π.χ. τῆς ὁρατῆς περιοχῆς ($\lambda = 0.55$ μm) ἔχουμε

$$\omega = 2\pi c/\lambda = 3.43 \times 10^{15} \ s^{-1},$$

ὁπότε βρίσκουμε

$$\delta \approx 2.26 \times 10^{-8} \ m = 226 \ \text{Å}.$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι τό φύλλο τοῦ χρυσοῦ πρέπει νά ἔχει πάχος πού ἀντιστοιχεῖ σ'ἑκατό ἄτομα περίπου, ὥστε τό πλάτος τοῦ πεδίου στήν περιοχή III νά πέσει μόνο στό 1/e τῆς τιμῆς πού ἔχει στήν περιοχή I. Ἐπειδή ἡ ἔνταση $I(z)$ τῆς ἀκτινοβολίας σέ βάθος z μέσα στό φύλλο τοῦ χρυσοῦ δίνεται ἀπό τόν ἐκθετικό νόμο

$$I(z) = I(0) e^{-2z/\delta},$$

γιά νά πετύχουμε μείωση τῆς τιμῆς της στό 1/10, θά πρέπει τό πάχος τοῦ φύλλου νά εἶναι

$$\frac{\delta}{2} \ln 10 \approx 260 \ \text{Å}.$$

Παράδειγμα Ι-22

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα διηλεκτρικό μέσο χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἑξῆς σχέση διασπορᾶς

$$\omega=\omega_0(1+6a^2k^2-a^4k^4),$$

πού συνδέει τήν κυκλική συχνότητα ω μέ τόν κυματικό ἀριθμό k ἑνός ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος. Τί μέση συχνότητα πρέπει νά ἔχουν οἱ κυματομορφές πού χρησιμοποιοῦνται γιά τήν τηλεπικοινωνία στό μέσο αὐτό, ὥστε τά σήματα νά μεταδίδονται ὅσο τό δυνατό ταχύτερα;

Λύση

Τά σήματα διαδίδονται στό διηλεκτρικό μέσο μέ τήν ταχύτητα ὁμάδας

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\omega_0(12\alpha^2k-4\alpha^4k^3).$$

Τή μέση συχνότητα πρέπει νά τή διαλέξουμε ἔτσι, ὥστε νά μεγιστοποιήσουμε τήν v_g. Ἄρα ὁ ἀντίστοιχος μέσος κυματικός ἀριθμός πρέπει νά ἐπαληθεύει τήν σχέση

$$\frac{d}{dk}(v_g)=\omega_0(12\alpha^2-12\alpha^4k^2)=0.$$

Ἐπομένως βρίσκουμε ὅτι ὁ μέσος κυματικός ἀριθμός εἶναι ἴσος μέ 1/α. Ἀντικαθιστῶντας στή σχέση διασπορᾶς ἔχουμε τήν ἀντίστοιχη μέση συχνότητα

$$\langle\omega\rangle=6\omega_0.$$

Παράδειγμα Ι-23

Ἡ σχέση διασπορᾶς γιά διαμήκη κύματα μέσα σέ μιά χαλύβδινη κατασκευή ἔχει τή μορφή $\omega=\upsilon_0k+ak^2$, ὅπου $\upsilon_0=400\ \mathrm{ms}^{-1}$ καί a κάποια π ο λ ύ μ ι κ ρ ή σταθερά ($ak \ll \upsilon_0$).

Ἄν ἡ ταχύτητα ὁμάδας γίνεται κατά 3% μεγαλύτερη ἀπό τήν ταχύτητα φάσης γιά συχνότητα ν=20000 Hz, προσδιορίστε τή σταθερά a.

Λύση

Ἡ ταχύτητα φάσης δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\upsilon=\omega/k=\upsilon_0+\alpha k, \tag{1}$$

ὁπότε ἡ σχέση πού συνδέει τή συχνότητα μέ τόν κυματικό ἀριθμό γίνεται

$$k=\frac{2\pi\nu}{\upsilon}\approx\frac{2\pi\nu}{\upsilon_0}\left(1-\frac{\alpha}{\upsilon_0}k\right). \tag{2}$$

Γιά νά πάρουμε τή δεύτερη προσεγγιστική ἰσότητα παραλείψαμε ὅρους δεύτερου καί ἀνώτερου βαθμοῦ ὡς πρός τή μικρή σταθερά α. Ἐφαρμόζοντας αὐτή τήν πρακτική ἀκόμα μιά φορά, βρίσκουμε

$$k=\frac{2\pi\nu}{\upsilon_0}\left(1-\frac{2\pi\alpha}{\upsilon_0^2}\nu\right). \qquad (3)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (3) παίρνουμε

$$\upsilon=\upsilon_0+\frac{2\pi\alpha}{\upsilon_0}\nu. \qquad (4)$$

Ὅμοια, γιά τήν ταχύτητα ὁμάδας βρίσκουμε

$$\upsilon_g=\frac{d\omega}{dk}=\upsilon_0+2\alpha k=\upsilon_0+\frac{4\pi\alpha}{\upsilon_0}\nu. \qquad (5)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) ἔχουμε

$$\upsilon_g-\upsilon=\frac{2\pi\alpha}{\upsilon_0}\nu, \qquad (6)$$

ὁπότε

$$0.03=\frac{\upsilon_g-\upsilon}{\upsilon}\approx\frac{2\pi\alpha}{\upsilon_0^2}\nu \qquad (7)$$

καί μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος βρίσκουμε

$$\alpha\approx 0.04\ m^2s^{-1}.$$

Παράδειγμα Ι-24 Σχέση μεταξύ ὁμαδικῆς καί φασικῆς ταχύτητας καί δείκτη διάθλασης

Ἠλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σέ μέσο μέ δείκτη διάθλασης n. Ἔστω ὅτι υ_ϕ καί υ_g εἶναι ἀντίστοιχα ἡ φασική καί ἡ ὁμαδική ταχύτητα τοῦ κύματος.

α) Ἄν ἡ κυκλική συχνότητα ω τοῦ κύματος συνδέεται μέ τόν ἀντίστοιχο κυματαριθμό k μέ τή σχέση

$$\omega^2=a^2+c^2k^2,$$

ὅπου a σταθερά καί c ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός, δεῖξτε ὅτι $\upsilon_\phi>c$, $\upsilon_g<c$ καί $\upsilon_\phi\upsilon_g=c^2$.

β) Ἄν λ εἶναι τό μῆκος κύματος στό κενό, δεῖξτε τή σχέση

$$\frac{1}{\upsilon_g}=\frac{1}{\upsilon_\phi}-\frac{\lambda}{c}\frac{dn}{d\lambda}$$

Λύση

α) Ἡ φασική ταχύτητα υ_ϕ καί ἡ ὁμαδική ταχύτητα υ_g ὁρίζονται πάντοτε ὡς ἑξῆς

$$\upsilon_\phi\equiv\frac{\omega(k)}{k} \quad \text{καί} \quad \upsilon_g\equiv\frac{d\omega}{dk} \qquad (1)$$

Διαφορίζοντας τή σχέση διασποράς πού μᾶς δίνεται ἔχουμε

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} dk = 2c^2 k dk$$

ἤ

$$\frac{\omega}{k} \cdot \frac{d\omega}{dk} = c^2$$

δηλ.

$$\upsilon_\phi \cdot \upsilon_g = c^2 \qquad (2)$$

Λύνοντας ὡς πρός ω τή σχέση διασποράς καί διαιρώντας μέ k

$$\frac{\omega}{k} = \upsilon_\phi = \sqrt{c^2 + \frac{\alpha^2}{k^2}} > c \quad \text{δηλ.} \quad \frac{c}{\upsilon_\phi} > 1 \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) προκύπτει ὅτι

$$\upsilon_g = \frac{c^2}{\upsilon_\phi} = \left(\frac{c}{\upsilon_\phi}\right) c < c$$

β) Ἀπό τήν (1) καί τόν ὁρισμό τοῦ δείκτη διάθλασης

$$n = \frac{c}{\upsilon_\phi} \qquad (4)$$

ἔχουμε

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

ὁπότε

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}$$

ἤ

$$\frac{1}{\upsilon_g} = \frac{1}{\upsilon_\phi} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}$$

Ἀφοῦ ὁ δείκτης διάθλασης n εἶναι συνάρτηση τοῦ μήκους κύματος λ, χρησιμοποιοῦμε τή σχέση $\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\lambda}{\omega}$, πού προκύπτει ἄν διαφορίσουμε τήν $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ καί παίρνουμε

$$\frac{1}{\upsilon_g} = \frac{1}{\upsilon_\phi} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{1}{\upsilon_\phi} - \frac{\omega}{c} \frac{\lambda}{\omega} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{1}{\upsilon_\phi} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda}$$

πού εἶναι ἡ σχέση πού ζητᾶμε.

Παράδειγμα Ι-25 Φασική καί ὁμαδική ταχύτητα παλμοῦ ἀκτίνων Χ

Παλμός ἀκτίνων Χ, πού περιέχει συχνότητες $\nu \geq 4 \times 10^{17}\ s^{-1}$ διαδίδεται σέ ἕνα μέσο ὅπου ὁ δείκτης διαθλάσεως, γιά τήν παραπάνω περιοχή συχνοτήτων, δίνεται ἀπό τή σχέση

$$n^2 = 1 - \nu_0^2/\nu^2, \quad \nu_0 = 10^{17}\ s^{-1},$$

δηλ. τό μέσο προκαλεῖ διασπορά.

α) Βρεῖτε μιά γενική σχέση πού νά συνδέει τήν ὁμαδική ταχύτητα υ_g τοῦ παλμοῦ μέ τόν δείκτη διαθλάσεως τοῦ μέσου μέσα στό ὁποῖο διαδίδεται.

β) Ἐκφράστε τήν ὁμαδική ταχύτητα υ_g καί τή φασική ταχύτητα υ_Φ τοῦ παραπάνω παλμοῦ σάν συνάρτηση τῆς συχνότητας.

γ) Σχεδιάστε χονδρικά, στό ἴδιο διάγραμμα, τίς ταχύτητες $\upsilon_\Phi(\nu)$ καί $\upsilon_g(\nu)$ συναρτήσει τῆς συχνότητας ν. Τί σημαίνει τό γεγονός ὅτι $\upsilon_\Phi > c$; Δεῖξτε ὅτι $\upsilon_g \upsilon_\Phi \simeq c^2$.

Λύση

α) Ἀπό τούς ὁρισμούς τῆς ὁμαδικῆς ταχύτητας $\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk}$ καί τῆς φασικῆς ταχύτητας $\upsilon_\Phi = \frac{\omega}{k} \equiv \upsilon$, παίρνουμε

$$\upsilon_g = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{d\omega}\frac{d\omega}{dk} = \upsilon + k\upsilon_g\frac{d\upsilon}{d\omega}$$

ἤ ἐπειδή $\upsilon = \frac{c}{n}$.

$$\upsilon_g = \frac{c}{n} + kc\upsilon_g\frac{d(1/n)}{d\omega} = \frac{c}{n} - \frac{kc\upsilon_g}{n^2}\frac{dn}{d\omega}$$

ὁπότε

$$\upsilon_g = \frac{c/n}{1+\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n+\omega\frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n+\nu\frac{dn}{d\nu}} \qquad (1)$$

β) Ἡ φασική ταχύτητα τῶν ἀκτίνων Χ στό μέσο θά εἶναι,

$$\upsilon_\Phi = \frac{c}{n} = c\left(1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\right)^{-1/2}$$

Ἐπειδή $\frac{\nu_0^2}{\nu^2} \leqslant \frac{1}{16}$ μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό διωνυμικό ἀνάπτυγμα $(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x$. (Ἡ διόρθωση πού εἰσάγει ὁ τρίτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι τῆς τάξεως $\frac{\nu_0^4}{\nu^4} = \frac{1}{16^2} = \frac{1}{256} = 0.25\%$ καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα). Ἔτσι παίρνουμε

$$\upsilon_\Phi \simeq c\left(1+\frac{\nu_0^2}{2\nu^2}\right) \qquad (2)$$

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τούς δύο πρώτους ὅρους τοῦ διωνυμικοῦ ἀναπτύγματος γιά τόν δείκτη διάθλασης n, βρίσκουμε,

$$n \simeq 1-\frac{\nu_0^2}{2\nu^2} \text{ καί } \frac{dn}{d\nu} \simeq \frac{\nu_0^2}{\nu^3}$$

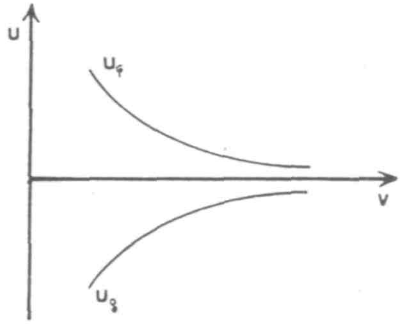
ὁπότε ἀπό τήν παραπάνω ἔκφραση (1) γιά τήν ὁμαδική ταχύτητα βρίσκουμε

$$\upsilon_g \simeq \frac{c}{n+\frac{v_0^2}{v^2}} = c\left(1-\frac{v_0^2}{2v^2}+\frac{v_0^2}{v^2}\right)^{-1}$$

$$\simeq c\left(1+\frac{v_0^2}{2v^2}\right)^{-1} \simeq c\left(1-\frac{v_0^2}{2v^2}\right) \qquad (3)$$

γ) Τό γεγονός ὅτι $\upsilon_\Phi > c$ στή σχέση (2) δέν ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τή θεωρία τῆς σχετικότητας, γιατί οἱ πληροφορίες πού μεταφέρει τό κύμα διαδίδονται μέ τήν ὁμαδική ταχύτητα υ_g. Γιά τήν υ_g ἰσχύει ὅτι

$$\upsilon_g \leqslant c$$



ὅπως φαίνεται ἀπό τήν (3). Τό γινόμενο $\upsilon_\Phi \upsilon_g$ βρίσκεται ἀπό τήν ἀπάντηση (β):

$$\upsilon_\Phi \upsilon_g \simeq c^2\left(1+\frac{v_0^2}{2v^2}\right)\left(1-\frac{v_0^2}{2v^2}\right) \simeq c^2\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{v_0^4}{v^4}\right)\right] \simeq c^2$$

Στό σχῆμα σχεδιάζονται χονδρικά οἱ συναρτήσεις $\upsilon_\Phi(v)$ καί $\upsilon_g(v)$. Παρατηροῦμε ὅτι γιά ψηλές σχετικά συχνότητες καί οἱ δύο ταχύτητες τείνουν πρός τήν c.

Παράδειγμα I-26

Δεῖξτε ὅτι ἄν ἕνας παλμός f(t) περιγράφεται μέ τήν καμπύλη τοῦ Gauss

$$f(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \qquad (1)$$

ὁ συντελεστής Fourier πού ἀντιστοιχεῖ σ'αὐτό τόν παλμό περιγράφεται ἐπίσης ἀπό μιά καμπύλη Gauss πού εἶναι

$$B(\omega) = \frac{\sqrt{2}\,\tau C}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}} \qquad (2)$$

καί ὅτι τό γινόμενο στ ἰσοῦται μέ τή μονάδα.

Λύση

Ἀφοῦ ἡ f(t) εἶναι συμμετρική ὡς πρός t θά ἔχουμε προφανῶς

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt = 0$$

Ὁ ἄλλος συντελεστής Fourier εἶναι

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt=\frac{C}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}\cos\omega t dt$$

Ἄν κάνουμε τήν ἀντικατάσταση

$$t=\sqrt{2}\ \tau x \quad \text{καί} \quad a=\omega\sqrt{2}\ \tau \tag{3}$$

παίρνουμε

$$B(\omega)=\frac{C\sqrt{2}\ \tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax dx \tag{4}$$

Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ὁλοκλήρωμα

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax dx \tag{5}$$

ὑπολογίζουμε τήν παράγωγο τοῦ I ὡς πρός a ὁπότε βρίσκουμε

$$\frac{dI}{da}=-\frac{Ia}{2} \tag{6}$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν (6) βρίσκουμε ὅτι

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}} \tag{7}$$

Ἡ (4) λοιπόν δίνει γιά τό συντελεστή Fourier

$$B(\omega)=\frac{\sqrt{2}\ \tau C}{\sqrt{\pi}}\ I=\frac{\sqrt{2}\ \tau C}{\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{a^2}{4}}$$

Ἀντικαθιστώντας ἀπό τήν (3β) βρίσκουμε

$$B(\omega)=\frac{\sqrt{2}\ \tau C}{\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}\ ,\quad \sigma\equiv\frac{1}{\tau} \tag{8}$$

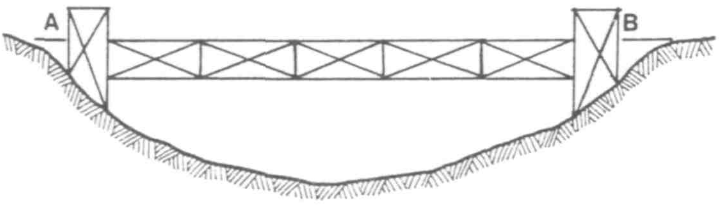
Ἡ (8) εἶναι καμπύλη Gauss μέ τυπική ἀπόκλιση $\sigma\equiv\frac{1}{\tau}$. Ἄρα $\sigma\cdot\tau=1$.

Παράδειγμα I-27

Χαλύβδινη γέφυρα μήκους 1 Km προσομοιάζει μέ μή ίδανική χορδή τῆς ὁποίας ἡ σχέση διασπορᾶς ἔχει τή μορφή

$$\omega = \upsilon_0 k + \frac{\upsilon'}{2\pi} k^2,$$

ὅπου $\upsilon_0 = 400$ m/s.



Ἄν ἡ γέφυρα ἦταν τελείως ἐλαστική, θά εἴχαμε $\upsilon' = 0$. Γενικά, ἡ σταθερά υ' ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατασκευή τῆς γέφυρας.

α) Βρεῖτε (σέ χιλιόμετρα) τά ἐπιτρεπόμενα μήκη κύματος τῶν ἐγκάρσιων στάσιμων κυμάτων πού ἀναπτύσσονται στή γέφυρα. Ἐκφράστε τίς ἐπιτρεπόμενες συχνότητες ἐγκάρσιας ταλάντωσης τῆς γέφυρας σάν συναρτήσεις τῆς σταθερᾶς υ'.

β) Ἡ περιοχή πού θά κατασκευασθεῖ ἡ γέφυρα εἶναι σεισμογενής· παρατηρήσεις ἔδειξαν ὅτι οἱ τοπικοί σεισμοί ἔχουν διάρκεια Δt μεγαλύτερη ἀπό 2.5 sec. Ἐκτιμῆστε κατά προσέγγιση τί διάστημα τιμῶν θά πρέπει νά λαβαίνει ἡ σταθερά υ', ὥστε οἱ τοπικοί σεισμοί βασικά νά μή προκαλοῦν ἐγκάρσιες ταλαντώσεις τῆς γέφυρας.

Λύση

Τό ἐρώτημα (α) ἀντιμετωπίζεται ἀνάλογα μέ τό πρόβλημα Ι-10. Τά ἐπιτρεπόμενα μήκη κύματος εἶναι

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = 2\text{km},\ 1\text{km},\ 0.67\text{km}, \ldots,$$

ὁπότε μέ τή βοήθεια τῆς δοσμένης σχέσης διασπορᾶς οἱ ἐπιτρεπόμενες συχνότητες βρίσκονται νά εἶναι

$$\nu_n = \frac{\upsilon_0}{\lambda_n} + \frac{\upsilon'}{\lambda_n^2} = n\frac{\upsilon_0}{2L} + n^2\frac{\upsilon'}{4L^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

β) Τό εὖρος $\Delta\nu$ τῆς ζώνης συχνοτήτων τῶν ἁρμονικῶν συνιστωσῶν ἑνός σεισμοῦ μέ χρονική διάρκεια μεγαλύτερη ἀπό Δt δίνεται σέ τάξη μεγέθους ἀπό τή σχέση

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t} < \frac{1}{2.5\text{s}} = 0.4\ \text{Hz}.$$

Γιά νά μή προκαλοῦνται ἐγκάρσιες ταλαντώσεις στή γέφυρα ἀπό τό σεισμό, θά πρέπει όλες οἱ ἐπιτρεπόμενες συχνότητες ἐγκάρσιας ταλάντωσης τῆς γέφυρας νά βρίσκονται ἔξω ἀπό τό διάστημα $\Delta\nu$. Ἀφοῦ

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots,$$

ἀρκεῖ

$$\Delta\nu < \nu_1,$$

ἤ

$$\frac{\upsilon_0}{2L} + \frac{\upsilon'}{4L^2} \geq 0.4 \text{ Hz},$$

ἐπομένως

$$\upsilon' \geq 8 \times 10^5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}.$$

Παράδειγμα I-28 Ταχύτητα ὁμάδας θαλάσσιων κυμάτων

Χρησιμοποιώντας τόν ὁρισμό τῆς ταχύτητας ὁμάδας, βρεῖτε μιά σχέση πού νά συνδέει τήν ταχύτητα φάσης μέ τήν ταχύτητα ὁμάδας ἑνός κυματοπακέτου. Στήν περίπτωση μιᾶς ὁμάδας μεγάλων θαλασσίων κυμάτων, πού ταξιδεύουν στήν ἀνοικτή θάλασσα, δεῖξτε πώς ἡ ταχύτητα ὁμάδας εἶναι τό μισό τῆς ταχύτητας φάσης.

Λύση

Μέ βάση τόν ὁρισμό τῆς ταχύτητας ὁμάδας σάν παραγώγου τῆς κυκλικῆς συχνότητας ὡς πρός τόν κυματικό ἀριθμό, δηλ.

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk},$$

καί χρησιμοποιώντας τή σχέση

$$\omega = k\upsilon,$$

ὅπου υ ἡ ταχύτητα φάσης, βρίσκουμε

$$\upsilon_g = \frac{d}{dk}(k\upsilon) = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk}.$$

Στήν περίπτωση μεγάλων θαλασσίων κυμάτων ἀνοικτῆς θάλασσας ἔχουμε

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

ὅπου g ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας. Ἑπομένως

$$\upsilon_g = \upsilon + k\sqrt{g}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k\sqrt{k}} = \upsilon - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\upsilon.$$

Παράδειγμα I-29 Ἐλάχιστη φασική ταχύτητα ἐπιφανειακοῦ κύματος

Γιά ποιό μῆκος κύματος ἡ φασική ταχύτητα ἐπιφανειακοῦ θαλάσσιου κύματος γίνεται ἐλάχιστη ὅταν ἡ θάλασσα εἶναι πολύ βαθειά; (συντελεστής ἐπιφανειακῆς τάσεως νεροῦ = 7.3×10^{-2} Nm^{-1}).

Λύση

Ἡ σχέση διασπορᾶς πού ἰσχύει γενικά γιά ἐπιφανειακά κύματα σέ ὑγρό μέ ἐπιφανειακή τάση T, πυκνότητα ρ καί βάθος h εἶναι

$$\omega^2=\left(gk+\frac{T}{\rho}k^3\right)\tanh(kh) \tag{1}$$

Γιά πολύ βαθειά νερά εἶναι $h>>\lambda$ ἤ $hk>>1$, ὁπότε

$$\tanh(kh)\simeq 1$$

καί ἀπό τή σχέση διασπορᾶς (1) βρίσκουμε γιά τή φασική ταχύτητα υ_Φ

$$\upsilon_\Phi\equiv\frac{\omega}{k}=\left\{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

ἀφοῦ $k=\frac{2\pi}{\lambda}$.

Ἡ ἔκφραση γιά τή υ_Φ γίνεται ἐλάχιστη ὅταν $\frac{\partial\upsilon_\Phi}{\partial\lambda}=0$ δηλ. ὅταν

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{g}{2\pi}-\frac{2\pi T}{\rho\lambda^2}\right\}}{\upsilon_\Phi}=0$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση προκύπτει ὅτι τό μῆκος κύματος γιά τό ὁποῖο ἡ φασική ταχύτητα γίνεται ἐλάχιστη εἶναι

$$\lambda=2\pi\sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

ἤ

$$\lambda=6.28\sqrt{\frac{7.3\times10^{-2}}{10^3\times10}}\,m\simeq 0.017m$$

Παράδειγμα I-30 Ταχύτητα ἑνός τσουνάμι

Γιγαντιαῖο παλιρροϊκό κύμα (τσουνάμι) προκαλεῖται στόν Εἰρηνικό ὠκεανό ἀπό ὑποθαλάσσιο σεισμό. Τό κύμα αὐτό ἔχει μῆκος κύματος πολύ μεγαλύτερο ἀπό τό μέσο βάθος τοῦ ὠκεανοῦ πού εἶναι 5 km. Ὑπολογίστε τήν ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό τσουνάμι. Μέσα σέ πόσο χρόνο θά πρέπει νά ἐκκενωθεῖ παραθαλάσσια πόλη ἄν οἱ ἀρχές τῆς πόλεως πληροφορηθοῦν δύο ὧρες μετά τό σεισμό ὅτι τό ἐπίκεντρο βρισκόταν σέ ἀπόσταση 3200 km ἀπό τήν πόλη;

Λύση

Ἀφοῦ τό τσουνάμι ἔχει μῆκος κύματος λ πολύ μεγαλύτερο ἀπό τό μέσο βάθος τοῦ ὠκεανοῦ h θά ἰσχύει ἡ προσέγγιση

$$\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \simeq \frac{2\pi h}{\lambda} = hk \tag{1}$$

γιά τήν ὑπερβολική ἐφαπτομένη στή σχέση διασπορᾶς

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho}k^3\right)\tanh(kh) \tag{2}$$

πού ἰσχύει γενικά γιά ἐπιφανειακά κύματα σέ ὑγρό μέ πυκνότητα ρ ἐπιφανειακή τάση T καί βάθος h. Ὁ ὅρος πού ὀφείλεται στήν ἐπιφανειακή τάση εἶναι ἐδῶ προφανῶς ἀσήμαντος, ὁπότε ἡ (2)λόγω τῆς (1) γίνεται

$$\omega^2 = ghk^2 \tag{3}$$

Ἀπό τήν (3) προκύπτει ὅτι ἡ φασική (ἤ ὁμαδική) ταχύτητα εἶναι

$$\upsilon = \sqrt{gh}$$

Ἀντικαθιστώντας βρίσκουμε ὅτι τό τσουνάμι κινεῖται μέ ταχύτητα

$$\upsilon = \sqrt{10 \times 5 \times 10^3}\ \frac{m}{s} = 224\ m/s$$

Ὁ χρόνος πού θά χρειαστεῖ γιά νά φθάσει τό κύμα αὐτό σέ ἀπόσταση 3200 km εἶναι

$$t = \frac{3.2 \times 10^6}{2.24 \times 10^2}\ s = 1.43 \times 10^4\ s \simeq 4h$$

Γιά νά διασωθεῖ λοιπόν ὅλος ὁ πληθυσμός τῆς παραθαλάσσιας πόλης θά πρέπει ἡ πόλη νά ἐκκενωθεῖ τό πολύ μέσα σέ δύο ὧρες.

Παράδειγμα I-31 Ταχύτητα κυμάτων στή διαχωριστική ἐπιφάνεια δύο ὑγρῶν.

Στρῶμα λαδιοῦ μέ πυκνότητα ρ_1 ἐπιπλέει πάνω σέ νερό μέ πυκνότητα ρ_2.Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα τῶν εὐθύγραμμων κυμάτων στήν ἐπιφάνεια διαχωρισμοῦ τῶν ὑγρῶν, ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι τό βάθος κάθε ὑγροῦ εἶναι πολύ μεγαλύτερο ἀπό τό μῆκος κύματος. Οἱ διαστάσεις τοῦ δοχείου φαίνονται στό σχῆμα.

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda}}$$

καί φαίνεται καθαρά ὅτι ἡ ἐλάχιστη συχνότητα ἀντιστοιχεῖ στό μέγιστο μῆκος κύματος, δηλ.

$$\nu_{min} = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda_{max}}} \approx 0.88\ s^{-1}.$$

Παράδειγμα I-33

Ἕνας ραδιοφωνικός σταθμός βρίσκεται σέ ἀπόσταση 1km ἀπό τό ραδιόφωνό μας καί ἐκπέμπει ἰσοτροπικά. Κοντά στό ραδιόφωνο τό πλάτος τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τοῦ (ἐπίπεδου) κύματος πού λαμβάνουμε εἶναι $E_0=|\vec{E}_0|=0.1$ V/m.

α) Πόσο εἶναι τό πλάτος B_0 τοῦ ἀντίστοιχου μαγνητικοῦ πεδίου;
β) Πόση εἶναι ἡ μέση ἔνταση τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος;
γ) Ἡ μέση ἐνεργειακή πυκνότητα;
δ) Ἡ ἰσχύς τοῦ σταθμοῦ;
ε) Ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ ἡ ἀκτινοβολία στό σῶμα μας;

Λύση

α) Ἀφοῦ πρόκειται γιά ἐπίπεδα κύματα, ἔχουμε

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0 \approx 3.3 \times 10^{-10} T.$$

β) Τό μέτρο τοῦ διανύσματος Poynting (πού ἐκφράζει τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος), ὅταν πρόκειται γιά ἐπίπεδα ἁρμονικά κύματα γράφεται

$$S = c\varepsilon_0 E^2(\vec{r},t) = c\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t).$$

Ἑπομένως, γιά τή μέση τιμή του βρίσκουμε

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \approx 1.4 \times 10^{-5}\ Wm^{-2}$$

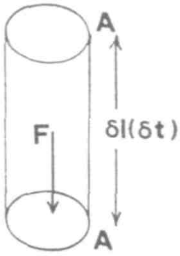
γ) Ἀνάλογα μέ τό ἐρώτημα (β), βρίσκουμε

$$\langle \frac{\partial W}{\partial V} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \approx 4.5 \times 10^{-14}\ Jm^{-3}.$$

δ) Ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι ὁ σταθμός βρίσκεται στό κέντρο μιᾶς σφαίρας μέ ἀκτίνα R=1km (ἄρα μέ ἐπιφάνεια $A=4\pi R^2$) καί ὅτι αὐτός ἐκπέμπει ἰσοτροπικά, τότε τό γινόμενο $\langle S \rangle A \equiv \langle \frac{\partial W}{\partial t} \rangle$ εἶναι σταθερό, ἀφοῦ ἐκφράζει τή μέση ἐνέργεια πού ἀκτινοβολεῖ ὁ σταθμός ἀνά μονάδα χρόνου (δηλ. τήν ἰσχύ τοῦ σταθμοῦ).

'Επομένως, ἔχουμε

$$<\frac{\partial W}{\partial t}>=4\pi R^2<S> \approx 176W.$$



ε) 'Υποθέτοντας ὅτι ἡ ἀκτινοβολία προσπίπτει κάθετα στό σῶμα μας καί ὅτι ἀπορροφᾶται πλήρως, μέ τό συμβολισμό πού φαίνεται στό σχῆμα ἔχουμε

$$P_{rad} = \frac{F}{A} = \frac{\delta p/\delta t}{A} = \frac{\delta p/\delta V}{A\delta t/A\delta l} = \frac{\delta p}{\delta V}\,\frac{\delta l}{\delta t}.$$

'Αφοῦ ὅμως μιλᾶμε γιά ροή φωτονίων, ἡ ταχύτητα $\delta l/\delta t$ εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός. 'Επίσης, ἀφοῦ τά φωτόνια ἔχουν μηδενική μάζα, ἡ πυκνότητα ὁρμῆς, $\delta p/\delta V$, πολλαπλασιασμένη ἐπί τήν ταχύτητα τοῦ φωτός, θά ἰσοῦται μέ τήν πυκνότητα ἐνέργειας. Παίρνοντας μέσες τιμές, ἔχουμε ἀμέσως

$$< P_{rad} > = <\frac{\partial W}{\partial V}> \approx 4.5 \times 10^{-14} Ntm^{-2}.$$

Παράδειγμα I-34 'Ιστιοφόρο διαστημόπλοιο

Γιά τήν πρόωση ἑνός διαστημοπλοίου μέ ὁλική μάζα 2000kg γίνεται ἡ πρόταση νά χρησιμοποιηθεῖ ἡ πίεση τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας πάνω σ'ἕνα ἀπόλυτα ἀνακλαστικό ἱστίο πού στερεώνεται στό διαστημόπλοιο. Τί ἐμβαδόν πρέπει νά ἔχει τό ἱστίο ὥστε νά δώσει ἐπιτάχυνση $1cm/s^2$ στό διαστημόπλοιο ὅταν αὐτό βρίσκεται σέ ἀπόσταση 450 ἑκατομμυρίων χιλιομέτρων ἀπό τόν ἥλιο;
['Αμελῆστε τίς δυνάμεις βαρύτητας.
'Απόσταση ἥλιου-γῆς: $1,5 \times 10^8$ km
'Ηλιακή σταθερά: $8J/cm^2.min$]

Λύση

'Η δύναμη πρόωσης πρέπει νά εἶναι ἴση μέ

$$F=2000\ kg.10^{-2} m/s^2=20\ N$$

'Αφοῦ ἡ ἀπόσταση τοῦ διαστημόπλοιου ἀπό τόν ἥλιο εἶναι 3πλάσια ἀπό τήν ἀπόσταση γῆς-ἥλιου, ἡ ροή ἐνέργειας θά εἶναι τό 1/9 τῆς ἡλιακῆς σταθερᾶς

$$u=\frac{1}{9}8J/cm^2.min=148\ N/m.s$$

καί ἡ πίεση τῆς ἀκτινοβολίας γιά ἀπόλυτα ἀνακλαστικό πανί θά εἶναι

$$p=\frac{2n}{c}=9.88\cdot10^{-7}\,N/m^2$$

'Επομένως τό ἐμβαδόν τοῦ πανιοῦ πού χρειάζεται εἶναι

$$\frac{F}{p}=2\cdot10^7 m^2$$

Ἄρα ἡ πρόταση δέν εἶναι ρεαλιστική.

Παράδειγμα I-35 'Ακτινοβολία ἠλεκτρικοῦ διπόλου

Φορτίο q ἐκτελεῖ ἁρμονική ταλάντωση μέ πλάτος z_0 καί κυκλική συχνότητα ω, πάνω στή σταθερή διεύθυνση Oz. Ἕνας ἀνιχνευτής A βρίσκεται σέ ἀπόσταση r ἀπό τό παλλόμενο φορτίο (πολύ μεγαλύτερη, ἀπό τή z_0), καί κατεύθυνση τέτοια, πού σχηματίζει γωνία θ μέ τήν Oz. Δῶστε τήν ἐξάρτηση τῆς ἔντασης I τῆς ἐκπεμπόμενης ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας

α) ἀπό τήν κυκλική συχνότητα ω,

β) ἀπό τήν ἀπόσταση r καί

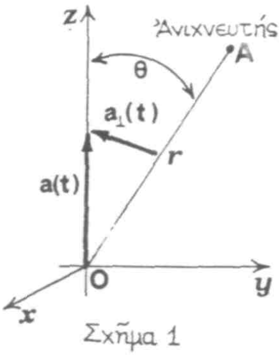
γ) ἀπό τήν γωνία θ.

Δεῖξτε αὐτές τίς τρεῖς ἐξαρτήσεις μέ τρία (χονδρικά) διαγράμματα τῆς ἔντασης I σάν συνάρτησης τῶν ω,r,θ. Σχολιάστε μέ δυό λόγια αὐτά τά διαγράμματα.

Λύση

α) 'Εξάρτηση ἀπό τήν κυκλική συχνότητα

'Η ἔνταση τῆς ἀκτινοβολίας πού ἐκπέμπεται πρός τήν κατεύθυνση OA (βλ. Σχῆμα 1) εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ἐγκάρσιας (ὡς πρός τήν OA) προβολῆς $a_\perp(t)$ τῆς ἐπιτάχυνσης τοῦ φορτίου. 'Αφοῦ τό φορτίο ἐκτελεῖ ἁρμονική κίνηση τῆς μορφῆς $z(t)=z_0\cos(\omega t+\varphi)$ θά ἔχουμε $a(t)=\ddot{z}(t)=-\omega^2 z_0\cos(\omega t+\varphi)$. Εἶναι λοιπόν φανερό πώς ἡ ἔνταση τῆς ἐκπεμπόμενης ἀκτινοβολίας εἶναι ἀνάλογη τῆς τέταρτης δύναμης τῆς συχνότητας, δηλ. αὐξάνει πάρα πολύ γρήγορα ὅταν αὐξάνει ἡ συχνότητα (Σχῆμα 2).



Σχῆμα 1

β) 'Εξάρτηση ἀπό τή γωνία θ

Ὅπως ἀναφέρθηκε παραπάνω, ἡ ἔνταση I εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ἐγκάρσιας προβολῆς $a_\perp(t)$ τῆς ἐπιτάχυνσης. 'Αλλά $a_\perp(t)=a(t)\sin\theta$, ὁπότε ἡ ἔνταση τῆς ἐκπεμπόμενης ἀκτινοβολίας εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας θ (σχῆμα 3). 'Επομένως, ἡ ἐκπεμπόμενη ἀκτινοβολία μηδενίζεται πάνω στή διεύλικές γωνίες, ἀφοῦ $r>>z_0$, δεχτήκαμε $\theta_1\approx\theta_2\approx\theta$· ὅμοια ἔχουμε $r_1\approx r_2\approx r$, ἀλλά (ἀπό τό σχῆμα) $r_2-r_1=2z_0\cos\theta$. Ἐπομένως, βρίσκουμε $(k=\omega/c)$

$$E_1=+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z_0\omega^2}{rc^2}\sin\theta\cos(\omega t-kr_1),$$

$$E_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z_0\omega^2}{rc^2}\sin\theta\cos(\omega t-kr_2).$$

Παραλείψαμε τό διανυσματικό συμβολισμό, ἀφοῦ τά ἠλεκτρικά πεδία E_1,E_2 θά βρίσκονται στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος καί θά εἶναι κάθετα στήν OP. Εἶναι φανερό ἀπό τίς παραπάνω ἐκφράσεις ὅτι στίς διευθύνσεις $\theta=0$ καί π καθένα πεδίο E_1,E_2 μηδενίζεται (ἀφοῦ μηδενίζεται ἡ ἀντίστοιχη ἐγκάρσια προβολή τῆς καθυστερημένης ἐπιτάχυνσης).

β) Ἡ ἐπαλληλία τῶν δυό παραπάνω πεδίων εἶναι

$$E_1+E_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z_0\omega^2}{rc^2}\sin\theta\left[\cos(\omega t-kr_2)-\cos(\omega t-kr_1)\right]$$

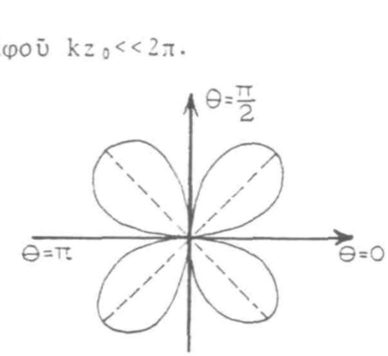
$$=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z_0\omega^2}{rc^2}\sin\theta\ \sin(kz_0\cos\theta)\sin(\omega t-kr)$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z_0^2}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\sin2\theta\ \sin(\omega t-kr),$$

ὅπου θέσαμε $\sin(kz_0\cos\theta)\approx kz_0\cos\theta$, ἀφοῦ $kz_0<<2\pi$.

Εἶναι φανερό, ὅτι τό συνολικό πεδίο E_1+E_2 μηδενίζεται στίς διευθύνσεις $\theta=0$, $\frac{\pi}{2}$ καί π.

γ) Τό διπλανό πολικό διάγραμμα προκύπτει ἀμέσως σάν ἀποτέλεσμα τῆς παρουσίας τοῦ παράγοντα $\sin2\theta$.



Παράδειγμα I-41 Στάσιμο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα

Τό ἠλεκτρικό πεδίο ἑνός στάσιμου ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος ἔχει συνιστῶσες

$$E_x(z,t)=A\cos\omega t\cdot\cos kz,\quad E_y(z,t)=E_z(z,t)=0.$$

α) Βρεῖτε τό χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο μέ μέση χρονική τιμή μηδέν πού ἀντιστοιχεῖ στό παραπάνω ἠλεκτρικό πεδίο καί σχεδιάστε τά δυό πεδία συναρτήσει τοῦ z.

β) Δεῖξτε ὅτι γιά τό στάσιμο αὐτό κύμα ἡ ὁλική ἐνέργεια παραμένει σταθερή μέσα σέ ὁποιοδήποτε διάστημα μήκους λ/4, ὅπου $\lambda=2\pi/k$ (ἀνάμεσα σ'ἕνα δεσμό καί μιά κοιλία τοῦ E_x).

Λύση

α) Τό ζητούμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ θά τό βροῦμε ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

πού γιά τό παραπάνω ἠλεκτρικό πεδίο γράφεται

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

'Από αὐτήν προκύπτει

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=Ak\cos\omega t\cdot\sin kz$$

ἀφοῦ σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) μόνο ἡ συνιστώσα y τοῦ $\vec{B}$ εἶναι μή μηδενική.

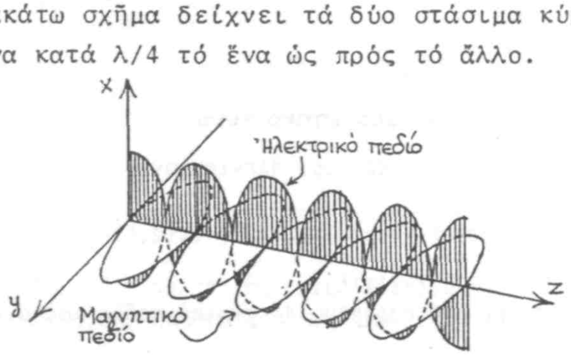
Ἄν ὁλοκληρώσουμε τήν τελευταία σχέση ὡς πρός τό χρόνο, βρίσκουμε,

$$B_y(z,t)=A\frac{k}{\omega}\sin\omega t\cdot\sin kz+f(z)$$

ὅπου τή χρονικά ἀνεξάρτητη συνάρτηση f(z) πού προέρχεται ἀπό τή σταθερά ὁλοκλήρωσης μποροῦμε νά παραλείψουμε ἀφοῦ ἐνδιαφερόμαστε γιά τό χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος τοῦ $\vec{B}$ πού ἔχει μέση χρονική τιμή μηδέν. Ἔτσι, ἐπειδή $\omega=ck$, βρίσκουμε,

$$B_y(z,t)=\frac{A}{c}\sin\omega t\cdot\sin kz \tag{3}$$

Τό παρακάτω σχῆμα δείχνει τά δύο στάσιμα κύματα E_x καί B_y μετατοπισμένα κατά λ/4 τό ἕνα ὡς πρός τό ἄλλο.



β) Ἡ στιγμιαία ἐνέργεια μέσα σέ διάστημα τοῦ z ἀνάμεσα σ' ἕνα δεσμό καί μιά κοιλία τοῦ E_x εἶναι ἀνάλογη πρός

$$W(t)=\int_0^{\lambda/4}\left[u_E(z,t)+u_B(z,t)\right]dz \tag{4}$$

ὅπου u_E καί u_B εἶναι οἱ στιγμιαῖες πυκνότητες τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στή θέση z. Χρησιμοποιώντας τή σχέση

καί ὅτι

$$u_E+u_B=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu}$$

παίρνουμε ἀπό τήν (4)

$$W(t)=\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{2\mu_0}\right]dz=$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 A^2\cos^2\omega t\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\cos^2 kz\,dz+\frac{A^2}{2\mu_0 c^2}\sin^2\omega t\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\sin^2 kz\,dz=$$

$$=\frac{\varepsilon_0 A^2}{2}\,\frac{\lambda}{8}\left[\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right]=\frac{\varepsilon_0\lambda A^2}{16}=\frac{\pi\varepsilon_0 cA^2}{8\omega}$$

πού εἶναι σταθερή ποσότητα καί ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό πλάτος A καί τήν κυκλική συχνότητα ω τοῦ στάσιμου κύματος.

Παράδειγμα Ι-42

Ἀκτίνα φυσικοῦ φωτός προσπίπτει ὑπό γωνία Brewster (γωνία ὁλικῆς πόλωσης) πάνω σέ μιά σειρά ἀπό παράλληλα πλακίδια ἀπό στεφανύαλο (n=1.52). Βρεῖτε γιά πόσα πλακίδια ὁ συντελεστής μετάδοσης γιά τή συνιστώσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο πρόσπτωσης, γίνεται μικρότερος ἀπό 0.1.

Λύση

Ὁ συντελεστής μετάδοσης γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο ὁρίζεται σάν polaroid νά εἶναι προσανατολισμένα μέ τούς ἄξονές τους παράλληλους πρός τή διεύθυνση πόλωσης τοῦ προσπίπτοντος φωτός.

α) Τό φῶς περνάει ἀπό τό πρῶτο φύλλο μέ ἀμείωτη ἔνταση I_0. Ἀπό τό δεύτερο φύλλο περνάει ἔνταση $I_0\cos^2(30^0)$ κατά τό νόμο τοῦ Malus. Τό φῶς μετά τό δεύτερο φύλλο εἶναι πολωμένο σέ διεύθυνση πού σχηματίζει γωνία 30^0 ὡς πρός τόν ἄξονα τοῦ 3ου φύλλου Ἄρα ἡ τελικά διερχομένη ἔνταση εἶναι

$$I_0\cos^2(30^0)\cos^2(30^0)=\frac{9}{16}I_0.$$

β) Ἀφοῦ ὁ ἄξονας τοῦ πρώτου φύλλου εἶναι κατά 60^0 στραμμένος ὡς πρός τήν διεύθυνση πόλωσης τοῦ προσπίπτοντος φωτός, μετά τό πρῶτο φύλλο ἡ ἔνταση εἶναι $I_0\cos^2(60^0)$, καί ἡ πόλωση σχηματίζει 60^0 μέ τόν ἄξονα τοῦ δεύτερου φύλλου. Ἑπομένως, μετά τό 2ό φύλλο ἡ ἔνταση θά εἶναι $I_0\cos^2(60^0)\cos^2(60^0)$ καί ἡ πόλωση, ἡ ἴδια μέ τήν ἀρχική (ἀφοῦ τό 2ο φύλλο ἔμεινε στήν ἀρχική θέση) Ἄρα ἡ τελική ἔνταση εἶναι

$$I_0\cos^2(60^0)\cos^2(60^0)\cos^2(30^0)=\frac{3}{64}I_0.$$

Παράδειγμα Ι-44

Δύο γραμμικά πολωμένα, ἐπίπεδα ἁρμονικά ἠλεκτρομαγνητικά κύματα, διαδίδονται κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα z, ἔχουν τήν ἴδια συχνότητα ω, διαφορά φάσεως δ καί τά ἐπίπεδα πολώσεως σχηματίζουν γωνία α. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία α ὥστε, γιά ὁποιαδήποτε τιμή τῆς διαφορᾶς φάσεως δ, ἡ μέση ἔνταση τοῦ προκύπτοντος κύματος νά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μέσων ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν;

Λύση

Ἔστω ὅτι τά ἠλεκτρικά πεδία $\vec{E}_1$ καί $\vec{E}_2$ δίδονται ἀπό τίς ἐκφράσεις

$$\vec{E}_1=\vec{A}_1\cos(\omega t-kz),\quad \vec{E}_2=\vec{A}_2\cos(\omega t-kz+\delta)$$

Τά $\vec{E}_1$ καί $\vec{E}_2$ σχηματίζουν γωνία α. Τό συνιστάμενο ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στή θέση z καί τή χρονική στιγμή t θά εἶναι

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\vec{A}_1\cos(\omega t-kz)+\vec{A}_2\cos(\omega t-kz+\delta)$$

Ἡ μέση τιμή $\bar{I}$ τῆς ἐντάσεως τοῦ προκύπτοντος κύματος θά εἶναι

$$\bar{I}=\langle I\rangle=\langle\text{ταχύτητα}\cdot\text{πυκνότητα ἐνεργείας}\rangle$$

$$=<c\cdot\varepsilon_0 E^2>=c\varepsilon_0<E^2>$$

ὅπου τό σύμβολο < > σημαίνει μέση τιμή ὡς πρός τό χρόνο. Γιά τή μέση τιμή τοῦ E^2 ἔχουμε ὅτι

$$<\vec{E}^2>=<\{\vec{A}_1\cos(\omega t-kz)+\vec{A}_2\cos(\omega t-kz+\delta)\}^2>$$

$$=A_1^2<\cos^2(\omega t-kz)>+A_2^2<\cos^2(\omega t-kz+\delta)>$$

$$+2\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2<\cos(\omega t-kz)\cdot\cos(\omega t-kz+\delta)>$$

Ἀλλά $<\cos^2(\omega t-kz)> =\frac{1}{2}$ καί $<\cos^2(\omega t-kz+\delta)>=\frac{1}{2}$. Ἄρα

$$\bar{I}=c\varepsilon_0\frac{A_1^2}{2}+c\varepsilon_0\frac{A_2^2}{2}+2c\varepsilon_0\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2<\cos(\omega t-kz)\cos(\omega t-kz+\delta)>$$

$$=\bar{I}_1+\bar{I}_2+2c\varepsilon_0\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2<\cos(\omega t-kz)\cos(\omega t-kz+\delta)>$$

ὅπου $\bar{I}_1$ καί $\bar{I}_2$ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ μέσες ἐντάσεις τῶν κυμάτων $\vec{E}_1(z,t)$ καί $\vec{E}_2(z,t)$. Ἀπό τήν τελευταία ἔκφραση βλέπουμε ὅτι ἄν $\alpha=90^0$ τότε οἱ διευθύνσεις τῶν πεδίων $\vec{E}_1$ καί $\vec{E}_2$ θά εἶναι κάθετες μεταξύ τους ὁπότε

$$\bar{I}=\bar{I}_1+\bar{I}_2$$

γιά ὁποιαδήποτε τιμή τῆς διαφορᾶς φάσεως δ.

Παράδειγμα I-45 Ἐλλειπτικά πολωμένο κύμα

Δύο γραμμικά πολωμένα, ἐπίπεδα ἁρμονικά κύματα, πού ἔχουν τήν ἴδια συχνότητα ω, διαδίδονται κατά τή κατεύθυνση z μέ τά ἐπίπεδα πολώσεως κάθετα μεταξύ τους, δηλ. ἔχουν τή γενική μορφή

$$\vec{A}_1=A_x\cos(\omega t-kz+\varphi_1)\hat{x}\equiv A_1\hat{x}$$

$$\vec{A}_2=A_y\cos(\omega t-kz+\varphi_2)\hat{y}\equiv A_2\hat{y}$$

ὅπου $\hat{x}$ καί $\hat{y}$ εἶναι ἀντίστοιχα τά μοναδιαῖα διανύσματα κατά τούς ἄξονες x καί y.

α) Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση πού ἱκανοποιοῦν οἱ συνιστῶσες A_1 καί A_2 τοῦ συνισταμένου πεδίου $\vec{A}$ σέ ὁποιαδήποτε θέση z.

β) Πότε τό συνιστάμενο κύμα εἶναι γραμμικά πολωμένο, πότε κυκλικά καί πότε ἐλλειπτικά;

Λύση

α) Τό συνιστάμενο πεδίο $\vec{A}(z,t)$ εἶναι

$$\vec{A}(z,t)=\vec{A}_1(z,t)+\vec{A}_2(z,t) \qquad (1)$$

καί σχηματίζει γωνία θ μέ τόν ἄξονα τῶν x τέτοια, ὥστε

$$\tan\theta=\frac{A_2}{A_1}=\frac{A_y}{A_x}\frac{\cos(\omega t-kz+\varphi_1)}{\cos(\omega t-kz+\varphi_2)}$$

ἤ ἀναπτύσσοντας

$$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}\frac{\cos(\omega t-kz)\cos\varphi_1-\sin(\omega t-kz)\sin\varphi_1}{\cos(\omega t-kz)\cos\varphi_2-\sin(\omega t-kz)\sin\varphi_2}$$

ἤ

$$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}\frac{\cos\varphi_1-\tan(\omega t-kz)\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2-\tan(\omega t-kz)\sin\varphi_2} \qquad (2)$$

Ἀπό τή (2) φαίνεται ὅτι ἄν $\varphi_1\neq\varphi_2$ ἡ $\tan\theta$ ἐξαρτᾶται γενικά ἀπό τό χρόνο σέ δοσμένη θέση δηλ. τό $A(z,t)$ δέν ἔχει σταθερή διεύθυνση γιά δοσμένο z ἤ δοσμένο t.

Γιά νά βροῦμε τήν καμπύλη πού διαγράφει τό $A(z,t)$ σέ τυχούσα θέση z, ἀρκεῖ νά βροῦμε τήν ἐξίσωση πού ἱκανοποιοῦν οἱ προβολές του A_1 καί A_2. Οἱ τελευταῖες μποροῦν νά γραφοῦν

$$A_1=A_x\cos(\omega t-kz)\cos\varphi_1-A_x\sin(\omega t-kz)\sin\varphi_1 \qquad (3)$$

$$A_2=A_y\cos(\omega t-kz)\cos\varphi_2-A_y\sin(\omega t-kz)\sin\varphi_2 \qquad (4)$$

Ἄν λύσουμε τό γραμμικό σύστημα τῶν (3) καί (4) ὡς πρός $\cos(\omega t-kz)$ καί $\sin(\omega t-kz)$ βρίσκουμε εὔκολα

$$\cos(\omega t-kz)=\frac{A_xA_2\sin\varphi_1-A_1A_y\sin\varphi_2}{A_xA_y(\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_2)} \qquad (5)$$

$$\sin(\omega t-kz)=\frac{A_xA_2\cos\varphi_1-A_yA_1\sin\varphi_2}{A_xA_y(\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_2)} \qquad (6)$$

Ἄν προσθέσουμε τά τετράγωνα τῶν σχέσεων (5) καί (6) βρίσκουμε,

$$A_y^2A_1^2+A_x^2A_2^2-2A_xA_y\cos(\varphi_1-\varphi_2)A_1A_2=A_x^2A_y^2\sin^2(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (7)$$

πού εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωση πού ἱκανοποιοῦν οἱ συνιστῶσες A_1 καί A_2.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή περιγράφει κωνική τομή πού εἶναι στήν περίπτωση μας ἔλλειψη, ἀφοῦ τά A_1 καί A_2 ἔχουν φραγμένες τιμές. Ἔτσι τό συνιστάμενο κύμα θά εἶναι γενικά ἐλλειπτικά πολωμένο.

β) Ἄν $\varphi_1=\varphi_2$, ἡ (2) δίνει $\tan\theta=\frac{A_2}{A_1}=$σταθ., δηλ. διεύθυνση άνεξάρτητη καί τοῦ t καί τοῦ z ὁπότε τό προκύπτον κῦμα $\vec{A}(z,t)$θά εἶναι γραμμικά πολωμένο. Ἡ στιγμιαία τιμή τοῦ συνιστάμενου πεδίου θά εἶναι

$$A(z,t)=\sqrt{A_1^2+A_2^2} = \sqrt{A_x^2+A_y^2}\cos(\omega t-kz+\varphi_1)$$

Ἄν $|\varphi_1-\varphi_2|=\frac{\pi}{2}$ τότε ἡ (7) γίνεται

$$A_y^2A_1^2+A_x^2A_2^2=A_x^2A_y^2$$

πού εἶναι ἐξίσωση ἔλλειψης μέ ἡμιάξονες A_x καί A_y παράλληλους ἀντίστοιχα πρός τούς ἄξονες x καί y. Ἄν ἐπιπλέον $A_x=A_y$ τότε προκύπτει κυκλικά πολωμένο κῦμα.

Παράδειγμα Ι-46

Τό χειμώνα στό τζάμι ἑνός παραθύρου σχηματίζεται ἕνα λεπτόστρωμα πάγου καί δίνει μιά πρασινωπή χροιά στά ἀντικείμενα πού φαίνονται μέσα ἀπό αὐτό. Ποιό περίπου εἶναι τό ἐ λ ά χ ι σ τ ο πάχος πού μπορεῖ νά ἔχει ἕνα τέτοιο στρῶμα πάγου;

Ὑποθέστε κάθετη πρόσπτωση τοῦ φωτός. Ὁ δείκτης διάθλασης τοῦ πάγου εἶναι 1,33 καί τοῦ τζαμιοῦ 1,50.

Ὑπόδειξη. Γιά νά ἔχουμε πρασινωπή χροιά πρέπει τό μπλέ (μῆκος κύματος 4000 Å) καί τό κόκκινο (μῆκος κύματος 6000 Å) φῶς νά ἀποσβεστοῦν.

Λύση

Τό φαινόμενο ὀφείλεται σέ συμβολή τοῦ φωτός πού περνάει τό στρῶμα πάγου χωρίς ἀνάκλαση (AB στό σχῆμα) καί ἐκείνου πού ὑφίσταται ἀνακλάσεις (ABCD στό σχῆμα). Ἄν ὑποτεθεῖ κάθετη πρόσπτωση ἡ διαφορά δρόμου ἐκφρασμένη σέ ἀριθμό ἰσοδυνάμων μηκῶν κύματος λ στόν ἀέρα εἶναι

$$\frac{2dn\pm\lambda/2}{\lambda}=2\frac{dn}{\lambda}\pm\frac{1}{2}$$

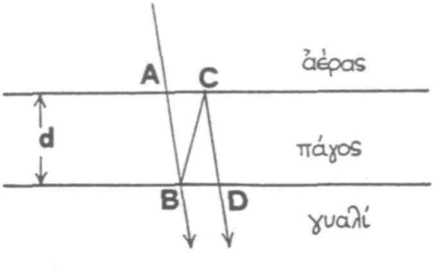
Τό πρόσθετο μισό μῆκος κύματος ἀντιστοιχεῖ στό πήδημα τῶν 180^0 πού ὑφίσταται ἡ φάση κατά τήν ἀνάκλαση πάνω σέ διαχωριστική ἐπιφάνεια πρός μέσο μεγαλύτερου δείκτη διάθλασης (δηλ.στό σημεῖο B). Ἄρα γιά τήν ἀπόσβεση φωτός μήκους κύματος λ πρέπει νά ἰσχύει ἡ σχέση

$$2dn=N\lambda \quad \text{ὅπου} \quad N = \text{ἀκέραιος}.$$

Ἄν λ_1 καί λ_2 εἶναι τά μήκη κύματος τοῦ μπλέ καί τοῦ κόκκινου πρέπει νά ὑπάρχουν ἀκέραιοι N_1 N_2 ὥστε

$$2nd = N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2$$

ἤ $$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{6000}{4000}$$



Οἱ μικρότεροι ἀκέραιοι πού ἱκανοποιοῦν τήν παραπάνω σχέση εἶναι $N_1=3$, $N_2=2$. Ἄρα τό ἐλάχιστο πάχος τοῦ πάγου εἶναι

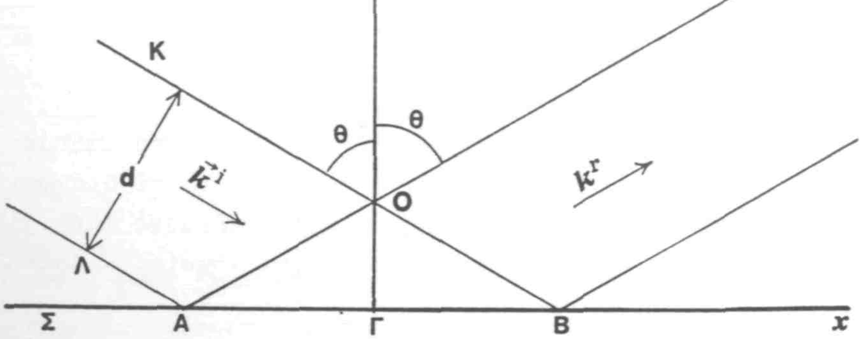
$$d = \frac{N_1\lambda_1}{2n} = \frac{3\cdot 4000\ \mathring{A}}{2\cdot 1{,}33} = 4500\ \mathring{A}$$

Παράδειγμα Ι-47 Συμβολή κατά τήν ἀνάκλαση

Ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα στό κενό, πέφτει ὑπό γωνία σέ ἐπίπεδη τελείως ἀνακλαστική ἐπιφάνεια Σ. Τό κύμα εἶναι πολωμένο ἔτσι, ὥστε τό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ νά εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο πρόσπτωσης xy καί ἡ γωνία πού σχηματίζει τό κυματικό διάνυσμα πρόσπτωσης $\vec{k}^{(i)}$ μέ τόν ἄξονα y, πού εἶναι κάθετος στήν ἐπιφάνεια Σ, εἶναι θ. Ἄν τό κύμα περιορίζεται μεταξύ δύο ἐπιπέδων πού εἶναι παράλληλα πρός τό $\vec{k}^{(i)}$, εἶναι κάθετα στό ἐπίπεδο xy καί ἀπέχουν ἀπόσταση d, νά βρεθοῦν οἱ ἐπιφάνειες μηδενικῆς ἔντασης πού προκαλοῦνται ἀπό τή συμβολή τοῦ προσπίπτοντος καί τοῦ ἀνακλώμενου κύματος.

Λύση

Διαλέγοντας τούς ἄξονες x καί y ὅπως στό σχῆμα βρίσκουμε γιά τίς συνιστῶσες τῶν $\vec{k}^{(i)}$ καί $\vec{k}^{(r)}$, ὅπου $\vec{k}^{(r)}$ τό κυματικό διάνυσμα τοῦ ἀνακλώμενου κύματος, τίς τιμές



$$k_x^{(i)}=k_x,\quad k_y^{(i)}=-k_y,\quad k_z^{(i)}=0$$

$$k_x^{(r)}=k_x,\quad k_y^{(r)}=k_y,\quad k_z^{(r)}=0$$

Τά ἠλεκτρικά πεδία τοῦ προσπίπτοντος καί τοῦ ἀνακλωμένου κύματος ἔχουν τή μορφή

$$\vec{E_i}=\vec{E_0}\cos(\vec{k}^{(i)}\cdot\vec{r}-\omega t)=\vec{E_0}\cos(k_x x-k_y y-\omega t)$$

καί

$$\vec{E_r}=R\vec{E_0}\cos(\vec{k}^{(r)}\cdot\vec{r}-\omega t)=R\vec{E_0}\cos(k_x x+k_y y-\omega t)$$

ὅπου R ὁ συντελεστής ἀνάκλασης πλάτους.

Τό συνιστάμενο πεδίο $\vec{E_z}$ εἶναι ἡ ἐπαλληλία τῶν $\vec{E_i}$ καί $\vec{E_r}$, δηλαδή

$$\vec{E_z}=\vec{E_0}\,[\cos(k_x x-k_y y-\omega t)+R\cos(k_x x+k_y y-\omega t)]$$

Ἀφοῦ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τελείως ἀνακλαστική, θά εἶναι R=-1. Συνεπῶς

$$\vec{E_z}=-2\vec{E_0}\sin k_y y\,\sin(k_x x-\omega t)$$

Τό $\vec{E_z}$ εἶναι τό ἠλεκτρικό πεδίο ἑνός κύματος πού ὁδεύει κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x καί ἔχει διαμορφωμένο πλάτος. Τό $\vec{E_z}$, καί ἄρα καί ἡ ἔνταση τοῦ κύματος, μηδενίζεται ὅταν

$$k_y y=n\pi \qquad n=0,1,2,\ldots$$

ἤ

$$y=n\pi/k_y$$

Οἱ δεσμικές ἐπιφάνειες εἶναι ἐπίπεδα παράλληλα πρός τό Σ, πού εἶναι κι αὐτό δεσμική ἐπιφάνεια, σέ ἴσες ἀποστάσεις π/k_y.

Ἡ περιοχή στήν ὁποία ἐπικαλύπτονται τό προσπίπτον καί τό ἀνακλώμενο κύμα περιορίζεται ἀπό τά ἐπίπεδα ΟΑ καί ΟΒ. Τά δεσμικά ἐπίπεδα θά ἐκτείνονται ὥς μιά ἀπόσταση τέτοια, ὥστε

$$y=\frac{n\pi}{k_y}\leqslant \text{ΟΓ}$$

ἀλλά

$$(\text{ΟΓ})=(\text{ΟΑ})\cos\theta=\frac{d\cos\theta}{\sin 2\theta}=\frac{d}{2\sin\theta}$$

ὁπότε

$$\frac{n\pi}{k_y}\leqslant\frac{d}{2\sin\theta}$$

ἤ

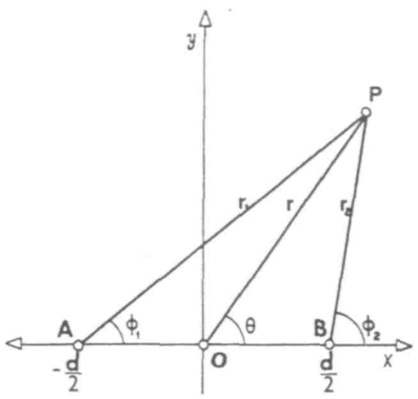
$$n\leqslant\frac{dk_y}{2\pi\sin\theta}$$

ἢ ἐπειδή $k_y = k^{(i)}\cos\theta$ καί $k^{(i)} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$n \leqslant \frac{d}{\lambda}\cot\theta$$

Παράδειγμα Ι-48 Συμβολή ὑδάτινων κυμάτων

Δύο σύμφωνες σημειακές πηγές ὑδάτινων κυμάτων Α καί Β βρίσκονται σέ ἀπόσταση d καί διεγείρονται ἀπό κοινή πηγή. Τά κύματα πού παράγονται ἔχουν μῆκος κύματος λ καί συμβάλλουν. Ἔστω Ο τό μέσο τῆς ΑΒ. Θεωρῆστε τή διεύθυνση OQ πού σχηματίζει γωνία θ=45° μέ τήν ΑΒ. Ἔστω r ἡ ἀπόσταση OP τυχόντος σημείου P τῆς OQ ἀπό τό Ο καί d ἡ ἀπόσταση τῶν δύο πηγῶν. Γιά ποιές τιμές τοῦ d τά σημεῖα τῆς OP μέ r >> d ἔχουν ἐλάχιστη ἀπομάκρυνση;



Λύση

Γιά νά ὑπάρχει ἐλάχιστο τοῦ πλάτους τοῦ συνισταμένου κύματος στό σημεῖο P ὅπου r>>d, θά πρέπει ἡ διαφορά δρόμου $r_1 - r_2$ νά εἶναι περιττό πολλαπλάσιο τοῦ λ/2, δηλ.

$$r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n=1,2,\ldots \quad (1)$$

ὅπου r_1 καί r_2 εἶναι ἀντίστοιχα ἡ ἀπόσταση τοῦ P ἀπό τίς πηγές Α καί Β.

Ἀπό τά τρίγωνα ΑΟΡ καί ΒΟΡ ἔχουμε ἀντίστοιχα

$$r^2 = r_1^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r_1\left(\frac{d}{2}\right)\cos\varphi_1 \qquad (2)$$

$$r^2 = r_2^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2r_2\left(\frac{d}{2}\right)\cos\varphi_2 \qquad (3)$$

Ὅταν r>>d μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι

$$\varphi_2 \simeq \varphi_1 \simeq \theta \quad \text{δηλ.} \quad \cos\varphi_1 \simeq \cos\varphi_2 \simeq \cos\theta$$

Ἔτσι ἄν ἀφαιρέσουμε τίς (2) καί (3) κατά μέλη, βρίσκουμε

$$r_1^2 - r_2^2 \simeq 2(r_1 + r_2)\frac{d}{2}\cos\theta$$

ἤ

$$r_1 - r_2 \simeq d\cos\theta \qquad (4)$$

Ἀπό τίς (1) καί (4) βλέπουμε ὅτι γιά νά ἔχουμε ἐλάχιστο κατά τή διεύθυνση OP θά πρέπει

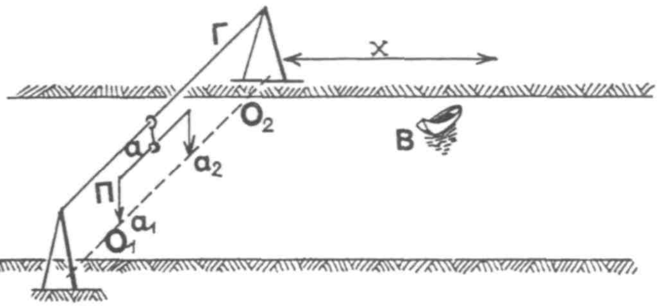
$$(2n+1)\frac{\lambda}{2}\simeq d\cos\theta,\ n=1,2,...$$

δηλαδή ἡ ἀπόσταση d τῶν πηγῶν θά πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$d\simeq(2n+1)\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\qquad n=1,2,3...$$

Παράδειγμα I-49 Συμβολή ὑδάτινων κυμάτων

Ἕνα σύστημα μέ σχῆμα "Π" κρέμεται ἀπό μιά γέφυρα Γ πάνω ἀπό ἕνα ἀρχικά ἤρεμο ποτάμι μέ πλάτος 12m καί μέσο βάθος 5m. Τό "Π" ἀρχίζει νά ταλαντώνεται μέ σταθερή συχνότητα, $v=1s^{-1}$ καί τό μέσο του α, ἀπό τό ὁποῖο κρέμεται ἀπό τή γέφυρα, παραμένει σταθερό. Θεωρῆστε (γιά εὐκολία) ὅτι γιά μικρές τα-



λαντώσεις τά σημεῖα $α_1$ καί $α_2$, ὅπου τό "Π" βυθίζεται στό ποτάμι, παραμένουν συνεχῶς σταθερά καί ὅτι ἡ εὐθεῖα $α_1α_2$ παραμένει συνεχῶς κάθετη στή διεύθυνση τοῦ ποταμιοῦ. Δίνεται ὅτι

$$o_1α_1=o_2α_2=3m,\quad α_1α_2=6m.$$

Μᾶς ἐνδιαφέρουν τά ἁρμονικά, μονοχρωματικά κύματα πού προκαλοῦν οἱ δυό "πηγές" $α_1$ καί $α_2$ στήν ἐπιφάνεια τοῦ ποταμιοῦ. Ἀγνοοῦμε τήν ἐξασθένηση αὐτῶν τῶν κυμάτων καθώς ἀπομακρύνονται ἀπό τό "Π".

α) Δεῖξτε καθαρά ὅτι τό μῆκος κύματος τῶν σχηματιζόμενων κυμάτων θά εἶναι ἀρκετά μικρότερο ἀπό τό βάθος τοῦ ποταμιοῦ καί ἑπομένως ὅτι θά μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ἁπλή σχέση διασπορᾶς $\omega^2=gk$. Ἑπομένως, βρεῖτε τό μῆκος κύματος τῶν κυμάτων πού προκαλοῦν οἱ ταλαντώσεις τοῦ "Π" στό ποτάμι.

β) Ἐκτιμῆστε κατά προσέγγιση τή μεγαλύτερη ἀπόσταση x ἀπό τή γέφυρα ὅπου θά πρέπει νά εἶναι ἀραγμένη μιά βάρκα B, ὥστε αὐτή νά ἐπηρεάζεται ἐλάχιστα ἀπό τά κύματα πού προκαλεῖ τό "Π" στό ποτάμι.

Λύση

α) Ἄν ἀμελήσουμε τήν ἐπιφανειακή τάση τοῦ νεροῦ, ἡ σχέση διασπορᾶς γιά ὑδάτινα κύματα ἔχει τή μορφή

$$\omega^2 = gk\,\frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}},$$

ὅπου h=5m εἶναι τό βάθος τοῦ ποταμοῦ. Μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουμε

$$kh\,\frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}} = \frac{(2\pi\nu)^2 h}{g} \approx 20>>1.$$

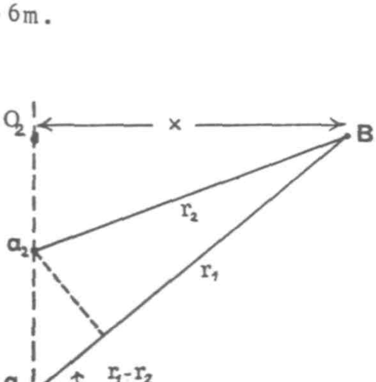
Ἀφοῦ ὁ παράγοντας $(1-e^{-2kh})/(1+e^{-2kh})$ εἶναι προφανῶς μικρότερος ἀπό τή μονάδα γιά κάθε τιμή τοῦ γινομένου kh, ὁ μόνος τρόπος γιά νά γίνει τό ἀριστερό μέλος τῆς παραπάνω σχέσης πολύ μεγαλύτερο ἀπό τή μονάδα εἶναι νά γίνει τό ἴδιο τό kh πολύ μεγαλύτερο ἀπό τή μονάδα. Ἀλλά τότε τό ἐκθετικό e^{-2kh} μηδενίζεται καί ἡ γενική σχέση διασπορᾶς γίνεται $\omega^2=gk$. Ἰσοδύναμα, ἡ παραπάνω σχέση γίνεται

$$kh \approx 20,$$

ἤ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx 1\cdot 6\text{m}.$$

β) Παρατηροῦμε ὅτι καθώς τό "Π" ταλαντώνεται οἱ δυό πηγές α_1 καί α_2 παράγουν ὑδάτινα κύματα μέ διαφορά φάσης 180^0. Περιμένουμε λοιπόν ἀναιρετική συμβολή σ'ἐκεῖνα τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ποταμοῦ τῶν ὁποίων οἱ ἀποστάσεις r_1 καί r_2 ἀπό τίς πηγές α_1 καί α_2 ἀντίστοιχα ἱκανοποιοῦν τή σχέση:



$$\pi + k(r_1-r_2) = (2n+1)\pi, \quad n=0,\pm 1,\ldots$$

Μέ τή βοήθεια τοῦ παραπάνω σχήματος, ἄν κάνουμε (γι'ἀπλότητα) προσεγγίσεις μικρῶν γωνιῶν, βρίσκουμε

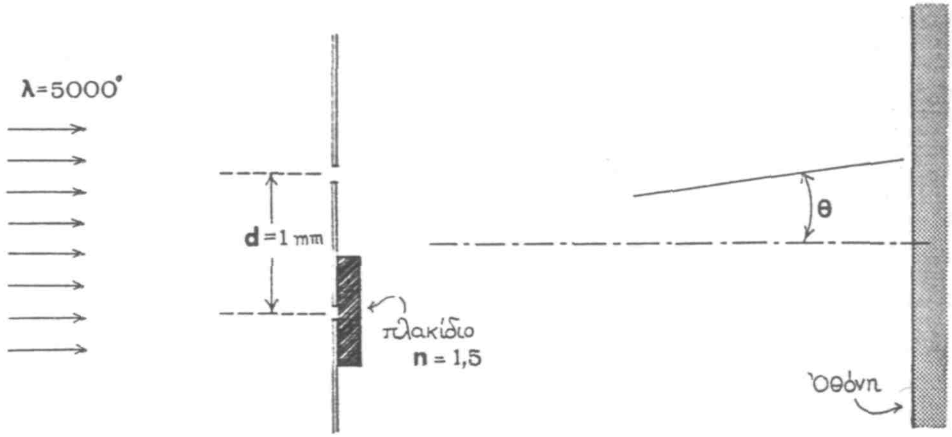
$$x = (\alpha_1\alpha_2)(O_2\alpha_2)/n\lambda,$$

ἐπομένως

$$x_{max} \approx 11\text{m}.$$

Παράδειγμα I-50

Στό πείραμα δύο σχισμῶν πού δείχνει τό παρακάτω σχῆμα καλύπτουμε τή μιά σχισμή μέ ἕνα πλακίδιο πάχους δ καί δείκτη διάθλασης n=1,5. Αὐτό προκαλεῖ, μετατόπιση τῶν μεγίστων φωτεινότητας πάνω στήν ὀθόνη. Ὑπολογίστε τό πάχος δ ὥστε τό κεντρικό μέγιστο νά μετατοπιστεῖ στό σημεῖο πού ἦταν τό ἑπόμενον μέγιστο πρίν καλύψουμε τή σχισμή.



Λύση

Πρίν καλύψουμε τή σχισμή τό πρῶτο μέγιστο ἐμφανιζόταν ὑπό γωνία θ τέτοια ὥστε

$$d\sin\theta=\lambda$$

Τό πλακίδιο προκαλεῖ μιά πρόσθετη διαφορά φάσης ἴση μέ $2\pi(n-1)\delta/\lambda$ (σέ ἀκτίνια). Γιά νά ἔχουμε γιά γωνία θ διαφορά φάσης μηδέν πρέπει νά ἰσχύει ἡ σχέση

$$d\sin\theta-(n-1)\delta=0$$

Συνδυάζοντας τίς παραπάνω δύο σχέσεις ἔχουμε

$$\delta=\frac{\lambda}{n-1}=10^4\,\text{Å}$$

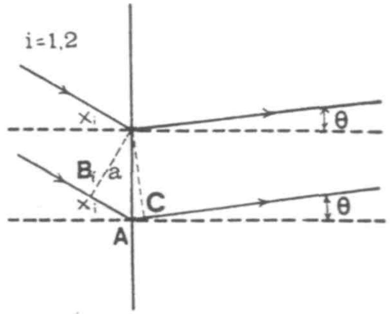
Παράδειγμα I-51

Δύο δέσμες μονοχρωματικοῦ φωτός πού ἔχουν τό ἴδιο μῆκος κύματος καί σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία x, προσπίπτουν σέ δύο σχισμές πού ἀπέχουν ἀπόσταση a. Οἱ δέσμες βρίσκονται σ'ἕνα ἐπίπεδο πού εἶναι κάθετο στίς δύο σχισμές. Παρατηροῦμε τήν εἰκόνα συμβολῆς πάνω σ'ἕνα πέτασμα πού βρίσκεται σέ μεγάλη ἀπόσταση ἀπό τίς σχισμές. Ἄν x≠0, τά δύο σύνολα τῶν κροσσῶν πού παρατηροῦνται στό πέτασμα δέν συμπίπτουν. Δεῖξτε ὅτι ἄν x=λ/2a οἱ φωτεινοί κροσσοί τῆς μιᾶς δέσμης πέφτουν πάνω στούς σκοτεινούς κροσσούς τῆς ἄλλης καί ἡ εἰκόνα συμβολῆς ἐξαφανίζεται.

Λύση

Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ δύο δέσμες προσπίπτουν σχηματίζοντας γωνίες x_1 καί x_2 μέ τήν κάθετο πάνω στό πέτασμα πού φέρει τίς σχισμές. Παρατηροῦμε τήν εἰκόνα συμβολῆς κατά τή διεύθυνση θ. Γιά καθεμιά δέσμη, ἡ εἰκόνα τῆς ἔντασης τῆς ἀκτινοβολίας δίνεται ἀπό τή σχέση

$$I_i = I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)$$



ὅπου $\Delta\varphi_i$ εἶναι ἡ διαφορά φάσης τῶν ἀκτίνων πού περνᾶνε ἀπό τίς δύο σχισμές, ἡ ὁποία ὀφείλεται σέ διαφορά δρόμου, δηλ.

$$\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda}(B_i A + AC) = \frac{2\pi}{\lambda}(a\sin x_i + a\sin\theta).$$

Ἔστω ὅτι ἡ εἰκόνα συμβολῆς τῆς πρώτης δέσμης ($i=1$) παρουσιάζει μέγιστο γιά κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση θ. Θά ἔχουμε τότε

$$\frac{2\pi}{\lambda}(a\sin x_1 + a\sin\theta) = 2\pi n \quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

Γιά νά πετύχουμε ἀλληλοαναίρεση, στήν ἴδια διεύθυνση θ ἡ εἰκόνα συμβολῆς τῆς δεύτερης δέσμης ($i=2$) θά πρέπει νά παρουσιάζει ἐλάχιστο, δηλ.

$$\frac{2\pi}{\lambda}(a\sin x_2 + a\sin\theta) = (2m+1)\pi \quad (m=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

Ἀφαιρώντας τίς δύο τελευταῖες σχέσεις καί ὑποθέτοντας πώς οἱ γωνίες x_1 καί x_2 εἶναι ἀρκετά μικρές ὥστε $\sin x_2 - \sin x_1 \approx x_2 - x_1 = x$, παίρνουμε

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{2a}, \text{ ὅπου } k = m-n = 0,\pm1,\pm2,\dots)$$

Ἄν $k=0$ ($m=n$), ὁ πιό φωτεινός κροσσός τῆς πρώτης δέσμης καλύπτεται ἀπό τόν πιό σκοτεινό τῆς δεύτερης, ὁ ἀμέσως λιγότερο φωτεινός τῆς πρώτης ἀπό τόν ἀμέσως λιγότερο σκοτεινό τῆς δεύτερης κτλ. Ἑπομένως ἡ ἀλληλοαναίρεση εἶναι τέλεια.

Παράδειγμα Ι-52

Πέντε εὐθύγραμμες κατακόρυφες ραδιοφωνικές κεραῖες πού ἔχουν κοινή γραμμή βάσης, διεγείρονται ἀπό τόν ἴδιο πομπό καί ἐκπέμπουν ραδιοφωνικά κύματα μήκους κύματος λ. Οἱ διαδοχικές ἀποστάσεις τῶν κεραιῶν εἶναι ἐπίσης ἴσες μέ λ.

α) Ποιές εἶναι οἱ διευθύνσεις μέγιστης καί ἐλάχιστης ἐκπομπῆς;

β) Ἄν I_0 εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ κύματος πού ἐκπέμπει κάθε κεραία, πόση εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ συνισταμένου κύματος κατά τίς διευθύνσεις τῶν μεγίστων;

γ) Σχεδιάστε χοντρικά τή γωνιακή κατανομή τῆς ἔντασης.

Λύση

Μέγιστη ἐκπομπή, δηλ. μέγιστη ἐνισχυτική συμβολή θά ἔχουμε πρός ἐκεῖνες τίς διευθύνσεις θ ὅπου ἡ διαφορά φάσεως

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

τῶν κυμάτων πού ἐκπέμπουν δύο διαδοχικές κεραῖες εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π, δηλ.

$$\frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} = 2\pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (1)$$

ἤ, ἐπειδή, $d=\lambda$,

$$\sin\theta = n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (2)$$

Ἑπομένως οἱ διευθύνσεις μέγιστης ἐκπομπῆς θά εἶναι

$$\theta = 0^\circ, \ \pm90^\circ, \ 180^\circ$$

Ἐλάχιστη ἐκπομπή ἔχουμε προφανῶς γιά ἐκεῖνες τίς διευθύνσεις ὅπου μηδενίζεται ὁ ἀριθμητής τῆς ἐκφράσεως πού δίνει τή μέση ἔνταση τοῦ συνισταμένου κύματος

$$\bar{I}(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\frac{1}{2}N\Delta\varphi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi} \right]^2 \qquad (3)$$

γιά τίς ὁποῖες ὁ παρονομαστής δ έ ν εἶναι μηδέν. (Οἱ διευθύνσεις πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή δίνονται προφανῶς ἀπό τή συνθήκη (2) γιά τά μέγιστα). Οἱ διευθύνσεις πρός τίς ὁποῖες ἔχουμε ἐλάχιστα ἐκπομπῆς ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$\frac{1}{2}N\Delta\varphi = n'\pi \qquad n'=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\ldots$$

ἤ

$$\sin\theta = \frac{n'}{N}, \quad n'=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4 \qquad (4)$$

Οἱ τιμές τοῦ $n'=0$, ±5 ἀποκλείονται γιατί γι'αὐτές μηδενίζεται καί ὁ παρονομαστής τῆς (3). Γι'αὐτές τίς τιμές τοῦ n' ἡ συνθήκη (4) γιά ἐλάχιστα μετατρέπεται στή συνθήκη (2) γιά μέγιστα.

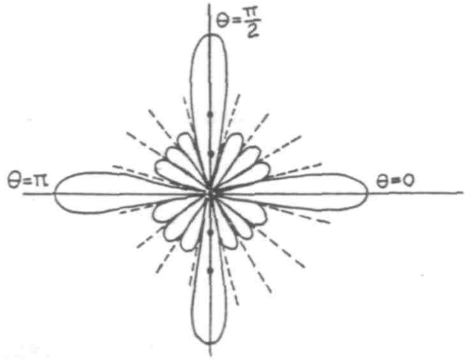
β) Ἄν $x \equiv \frac{1}{2}\Delta\varphi$ τότε, ὅπως βρήκαμε στήν ἐρώτηση (α), παίρνουμε μέγιστα ὅταν $x=n\pi$. Χρησιμοποιώντας τό γεγονός ὅτι

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} \longrightarrow \pm N \quad \text{ἄν} \quad x \longrightarrow n\pi, \; n \text{ ἀκέραιος},$$

βρίσκουμε ἀπό τήν (3) ὅτι ἡ ἔνταση τοῦ συνισταμένου κύματος κατά τίς διευθύνσεις τῶν μεγίστων εἶναι

$$I=25I_0.$$

γ) Τά ἀνωτέρω συμπεράσματα ἀποδίδει χονδρικά τό διπλανό σχῆμα στό ὁποῖο φαίνονται τά κύρια καί δευτερεύοντα μέγιστα τῆς ἐκπεμπομένης ἐντάσεως συναρτήσει τῆς γωνίας θ.



Παράδειγμα Ι-53 Ἐπίπεδα κύματα σέ μεμβράνη

Τήν ἐπιφάνεια μιᾶς μεμβράνης ἀπείρων διαστάσεων διατρέχουν δύο ἐγκάρσια ἁρμονικά κύματα τῶν ὁποίων οἱ διευθύνσεις τῶν κυματικῶν διανυσμάτων $\vec{k}_1$ καί $\vec{k}_2$ σχηματίζουν γωνία α. Ἄν ὁ ἄξονας τῶν x συμπίπτει μέ τή διχοτόμο τῆς γωνίας α νά βρεθεῖ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων στά ὁποῖα σχηματίζεται δεσμός κατά τή συμβολή τῶν δύο κυμάτων. Δίνεται ἀκόμα ὅτι

$$|\vec{k}_1|=|\vec{k}_2|=k=\omega/u$$

ὅπου ω ἡ κυκλική συχνότητα καί u ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος στή μεμβράνη καί ὅτι τά πλάτη τῶν δύο κυμάτων εἶναι ἴσα.

Λύση

Ἡ μορφή τῶν κυμάτων δίνεται ἀπό τίς σχέσεις

$$\psi_1=A\cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\psi_2=A\cos(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t)$$

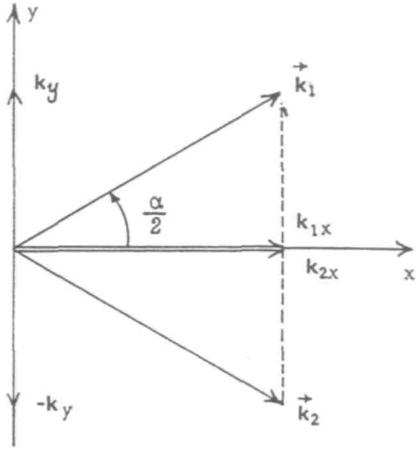
ὅπου $r^2=x^2+y^2$.

Τά δύο αὐτά κύματα μποροῦμε νά τά γράψουμε καί μέ τή μορφή

$\psi_1 = A\cos(k_x x + k_y y - \omega t)$

$\psi_2 = A\cos(k_x x - k_y y - \omega t)$

Τό συνιστάμενο κύμα ψ θά δίνεται από τή σχέση

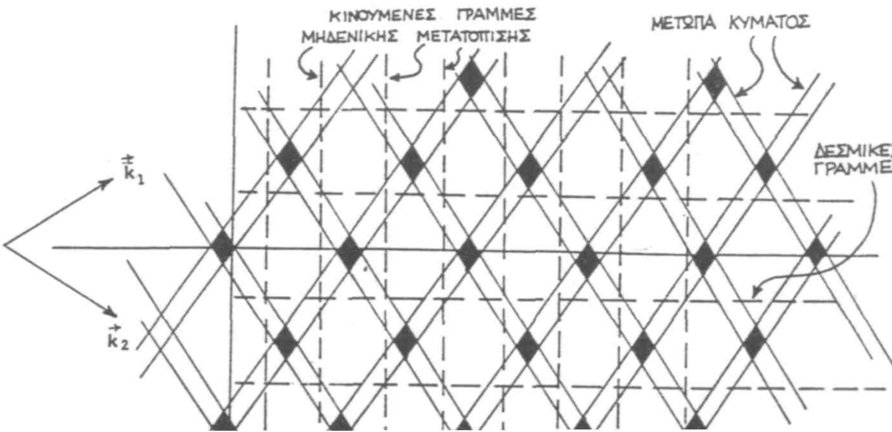


$$\psi = A[\cos(k_x x + k_y y - \omega t) + \cos(k_x x - k_y y - \omega t)] = 2A\cos(k_y y)\cos(k_x x - \omega t)$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό συνιστάμενο κύμα ὁδεύει κατά τή διεύθυνση x, διχοτόμο τῆς γωνίας πού σχηματίζουν οἱ διευθύνσεις διάδοσης τῶν δύο ἀρχικῶν κυμάτων, ἔχει πλάτος διαμορφωμένο κατά τή διεύθυνση y (εἶναι δηλαδή στάσιμο κύμα κατά τή διεύθυνση αὐτή) καί ἡ ταχύτητα φάσης ἰσοῦται μέ

$$\upsilon_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{k\upsilon}{k_x} = \frac{\upsilon}{\cos\frac{\alpha}{2}} > \upsilon$$

Γιά τίς τιμές τοῦ y τέτοιες, ὥστε $k_y y = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ τό πλάτος $2A\cos k_y y$ μηδενίζεται. Ἐπομένως ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων στά ὁποῖα σχηματίζεται δεσμός εἶναι εὐθεῖες παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν x. Διαγραμματικά, ἡ εἰκόνα τῆς συμβολῆς φαίνεται στό παρακάτω σχῆμα.



Παράδειγμα Ι-54

(βλέπε προηγούμενο παράδειγμα Ι-53). Στίς θέσεις $y_0=\pi/2k_y$ καί $y_5=11\pi/2k_y$ τοποθετοῦμε δύο στερεές ράβδους καί ἀμελοῦμε τά τμήματα τῆς μεμβράνης πού δέν περιέχονται στό χῶρο μεταξύ τῶν δύο ράβδων. Τί περιορισμός μπαίνει στή διάδοση τῶν κυμάτων κατά τή διεύθυνση x;

Λύση

Ἡ ἀπόσταση b τῶν δύο ράβδων εἶναι ἴση μέ

$$b=y_5-y_0=\frac{5\pi}{k_y}$$

καί ἑπομένως

$$k_y=\frac{5\pi}{b}$$

Ἔχουμε ὅμως ὅτι

$$k^2=k_x^2+k_y^2=\frac{\omega^2}{\upsilon^2}$$

ὁπότε

$$k_x^2=k^2-k_y^2=\frac{\omega^2}{\upsilon^2}-\frac{25\pi^2}{b^2}$$

Γιά νά ἔχουμε διάδοση κύματος κατά τόν ἄξονα τῶν x πρέπει νά ἰσχύει ἡ σχέση $k_x^2>0$

ἤ ἡ

$$\frac{\omega^2}{\upsilon^2}>\frac{25\pi^2}{b^2}$$

ἤ

$$\omega>\frac{5\pi\upsilon}{b}$$

Συνεπῶς συμπεραίνουμε ὅτι κατά τή διεύθυνση x δέν μποροῦν νά διαδοθοῦν κύματα μέ συχνότητα μικρότερη ἀπό $\omega_c=5\pi\upsilon/b$.

Παράδειγμα Ι-55 Συμβολόμετρο Michelson

Στενή δέσμη μονοχρωματικοῦ φωτός, πού ἔχει ἔνταση Ι καί μῆκος κύματος λ προέρχεται ἀπό τήν πηγή Φ καί προσπίπτει στό ἡμιπερατό κάτοπτρο Κ ὅπου χωρίζεται σέ δυό μέρη μέ τήν ἴδια ἔνταση. Τό ἕνα μέρος, ΟΑ, προχωράει, ἀνακλᾶται στό κάτοπτρο M_1 χωρίζεται πάλι στό Κ καί ἕνα μέρος του προχωράει τελικά πρός τό πέτασμα Φ'. Τό δεύτερο μέρος, ΟΒ, ἀνακλᾶται στό κάτοπτρο M_2, χωρίζεται πάλι στό Κ καί ἕνα μέρος του προχωράει πρός τό Φ'. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἔνταση τῆς ἀκτινοβολίας, Ι', στό πέτασμα Φ' συναρτήσει τῆς ἀρχικῆς ἔντασης τῆς δέσμης, Ι, καί τοῦ μήκους κύματος λ.

Παράδειγμα Ι-60 Επίδειξη φαινομένου συμβολῆς

Σέ μιά μεγάλη τάξη σπουδαστῶν γίνεται ἐπίδειξη τοῦ φαινομένου συμβολῆς ἀπό διάφραγμα μέ δύο στενές σχισμές. Νά δειχθεῖ ὅτι πολλοί σπουδαστές δέν θά μποροῦν νά διακρίνουν τούς κροσσούς συμβολῆς ἄν ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο σχισμῶν εἶναι πολύ μεγαλύτερη ἀπό τή διάμετρο τῆς κόρης τῶν ματιῶν. Τό συμπέρασμα αὐτό εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ μήκους κύματος πού θά χρησιμοποιηθεῖ.

Λύση

Ἔστω λ τό μῆκος κύματος πού θά χρησιμοποιηθεῖ,

d ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο σχισμῶν

L ἡ ἀπόσταση ἀπό τό διάφραγμα στήν ὀθόνη ὅπου ἐμφανίζονται οἱ κροσσοί.

D ἡ διάμετρος τῆς κόρης τοῦ ματιοῦ τῶν σπουδαστῶν.

Ἡ συνθήκη γιά τήν γωνία ἀποκλίσεως θ ὅπου ἐμφανίζονται τά μέγιστα έντασης πάνω στήν ὀθόνη εἶναι $d\sin\theta=N\lambda$ ὅπου $N=1,2,\ldots$ Ὑποθέτουμε μικρές γωνίες θ ὅποτε ἡ ἀπόσταση μεταξύ δύο διαδοχικῶν μεγίστων ἐπάνω στήν ὀθόνη εἶναι

$$\Delta x=\frac{\lambda}{d}L$$

Ἀφοῦ πρόκειται γιά μεγάλη τάξη ἡ μέση ἀπόσταση L' ἑνός σπουδαστή ἀπό τήν ὀθόνη δέν μπορεῖ νά εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τό L καί ἐπομένως ἀπό τό μάτι τοῦ σπουδαστή ἡ γωνιακή ἀπόσταση τῶν διαδοχικῶν μεγίστων εἶναι

$$\frac{\lambda}{d}L/L'\approx\frac{\lambda}{d}$$

Γιά νά διακρίνει ὁ σπουδαστής τά μέγιστα έντασης πρέπει ἡ γωνία $\frac{\lambda}{d}$, νά μήν εἶναι μικρότερη ἀπό τό ὅριο διακριτικότητας τοῦ ματιοῦ του ἐξαιτίας τῆς περίθλασης, δηλ. ἀπό λ/D. Ἄρα πρέπει $D>d$, ἀνεξάρτητα ἀπό τό μῆκος κύματος λ, πού χρησιμοποιεῖται.

Παράδειγμα Ι-61

Πάνω σέ μιά ὀθόνη παρατηροῦμε τή συνδυασμένη εἰκόνα συμβολῆς καί περίθλασης ἀπό δύο ὅμοιες ὀρθογώνιες παράλληλες σχισμές, μέ εὗρος b, πού τά μέσα τους βρίσκονται σέ ἀπόσταση $a=100\lambda>b$, ὅπου λ εἶναι τό μῆκος κύματος τοῦ φωτός μέ τό ὁποῖο φωτίζουμε τίς σχισμές.

α) Βρεῖτε τήν ἀπόσταση, πάνω στήν ὀθόνη, τοῦ κεντρικοῦ μέγιστου ἀπό τόν πρῶτο μηδενισμό τῆς έντασης, λόγω συμβολῆς.

β) Ἄν $b=a/5$, πόσα μέγιστα φωτισμοῦ λόγω συμβολῆς ὑπάρχουν μέσα στό κύριο μέγιστο περίθλασης;

γ) Ἐκτιμῆστε πόσο στενές πρέπει νά εἶναι οἱ σχισμές, ὥστε τό φαινόμενο τῆς περίθλασης νά μήν ἐκδηλώνεται.

Λύση

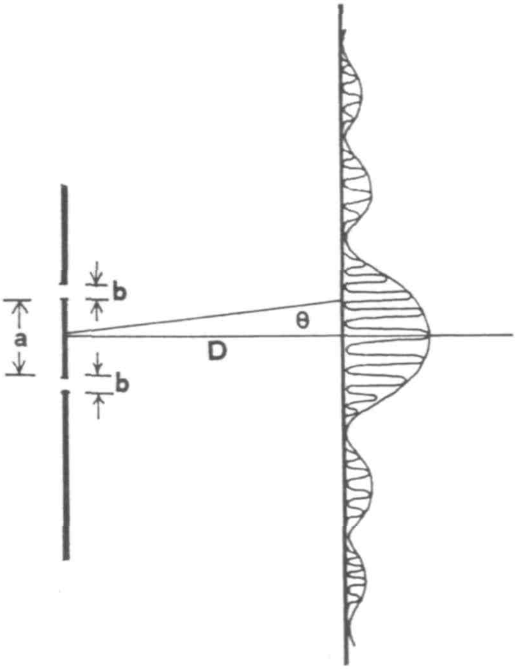
Ἡ εἰκόνα τῆς ἔντασης τοῦ φωτός, σάν συνάρτησης τῆς γωνίας θ (βλ. τό Σχῆμα), περιγράφεται ἀπό τή σχέση

$$I(\theta)=I(0)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\Phi}{\frac{1}{2}\Phi}\right]^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right), \qquad (1)$$

ὅπου

$$\Phi=2\pi\frac{b}{\lambda}\sin\theta, \qquad \Delta\varphi=2\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta.$$

Ὁ δεύτερος παράγοντας, δίνει ἁπλῶς τήν εἰκόνα συμβολῆς ἀπό δύο σχισμές σ'ἀπόσταση a, ὅταν τό εὖρος τους εἶναι ἀμελητέο. Ὁ πρῶτος παράγοντας διαμορφώνει αὐτή τήν εἰκόνα σύμφωνα μέ τήν εἰκόνα περίθλασης ἀπό μιά σχισμή μέ εὖρος b.



α) Τό κεντρικό μέγιστο παρατηρεῖται στή διεύθυνση θ=0. Ὁ πρῶτος μηδενισμός τῆς ἔντασης λόγω συμβολῆς σημειώνεται ὅταν

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2} \quad \text{ἤ} \quad \sin\theta=\pm\frac{1}{2a/\lambda}=$$

$$=\pm\frac{1}{200}.$$

Ἐπομένως ἡ γωνιακή ἀπόσταση τοῦ πρώτου μηδενισμοῦ λόγω συμβολῆς ἀπό τό κεντρικό μέγιστο θά εἶναι $\Delta\theta\approx 1/200$. Ἄν ἡ ὀθόνη βρίσκεται σ'ἀπόσταση D ἀπό τίς σχισμές, ἡ ἀντίστοιχη γραμμική ἀπόσταση, θά εἶναι $x\approx D/200$.

β) Τό κύριο μέγιστο τῆς περίθλασης, ὁρίζεται ἀπό τίς διευθύνσεις ὅπου $\frac{1}{2}\Phi=\pm\pi$, δηλ.

$$\frac{1}{2}\Phi=\pm\pi \quad \text{ἤ} \quad \sin\theta=\pm\frac{1}{b/\lambda}=\pm\frac{1}{20} \qquad (2)$$

Τά μέγιστα λόγω συμβολῆς σημειώνονται ὅταν

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \quad \text{ἤ} \quad \sin\theta = \frac{n}{a/\lambda} = \frac{n}{100}. \qquad (3)$$

Μέσα στό κύριο μέγιστο περίθλασης, θά βρίσκονται ἐκεῖνα τά μέγιστα συμβολῆς γιά τά ὁποῖα

$$\left|\frac{n}{100}\right| < \frac{1}{20} \quad \text{ἤ} \quad |n| < 5,$$

δηλ. συνολικά ἐ ν ν έ α μέγιστα ($n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$). Τά μέγιστα συμβολῆς γιά $n=\pm5$ συμπίπτουν μέ τούς πρώτους μηδενισμούς περίθλασης καί ἐξαφανίζονται.

γ) Γιά νά μποροῦμε νά ἀμελήσουμε τό φαινόμενο τῆς περίθλασης θά πρέπει νά μποροῦμε νά ἀμελήσουμε τόν παράγοντα

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Phi}{\frac{1}{2}\Phi}$$

στή σχέση (1), δηλ. θά πρέπει

$$\sin\frac{1}{2}\Phi \approx \frac{1}{2}\Phi.$$

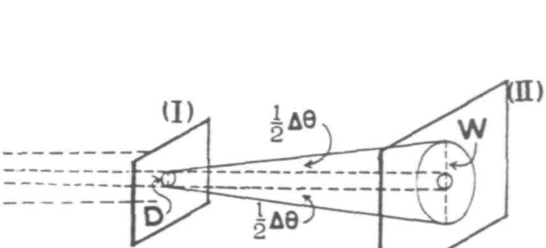
Αὐτή ἡ προσέγγιση εἶναι ἱκανοποιητική γιά γωνίες π.χ. ὡς 30°, ὁπότε θά πρέπει

$$\pi\frac{b}{\lambda}\sin\theta \leqslant 30^\circ \hat{=} \frac{\pi}{6}.$$

Ἀφοῦ $|\sin\theta| \leqslant 1$, βλέπουμε ὅτι ἄν $b \leqslant \lambda/6$, τό φαινόμενο τῆς περίθλασης οὐσιαστικά ἐξαφανίζεται.

Παράδειγμα Ι-62 Δέσμη μέ ἐλάχιστη διασπορά

Ἐπιθυμοῦμε νά πάρουμε μιά ὅσο τό δυνατό πιό λεπτή δέσμη ἀπό κίτρινο φῶς, ἡ ὁποία πρόκειται νά διανύσει μιά ἀπόσταση L=2 m. Γιά τό σκοπό αὐτό κατευθύνουμε ἕνα ἐπίπεδο κύμα, μέ μῆκος κύματος $\lambda=0.5$ μm, πάνω σέ μιά ὀθόνη (I), πού φέρει μιά κυκλική ὀπή μέ διάμετρο D. Πόση πρέπει νά εἶναι κατά προσέγγιση ἡ διάμετρος D, ὥστε ἡ τελική διάμετρος W τῆς δέσμης, ἀφοῦ αὐτή διανύσει τήν ἀπό-



σταση τῶν 2m, νά γίνει ἐλάχιστη; Ποιά εἶναι, κατά προσέγγιση, ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς διαμέτρου W πού μποροῦμε νά πετύχουμε;

Λύση

Ἐξαιτίας τοῦ φαινομένου τῆς περίθλασης στήν κυκλική ὀπή μέ διάμετρο D, τό γωνιακό εὖρος τῆς δέσμης πού σχηματίζεται ἀνάμεσα στίς ὀθόνες (I) καί (II) θά εἶναι τῆς τάξης μεγέθους τοῦ $\Delta\theta \approx \lambda/D \neq 0$. Ἐπομένως, ἡ συνολική διάμετρος W τῆς δέσμης, ἀφοῦ αὐτή διανύσει ἀπόσταση L, θά εἶναι περίπου

$$W \approx D + L\frac{\lambda}{D}.$$

Παραγωγίζοντας, ὡς πρός D, τήν παραπάνω σχέση βρίσκουμε ὅτι ἡ διάμετρος W γίνεται ἐλάχιστη ὅταν

$$D \approx \sqrt{\lambda L} = 1\text{mm}.$$

Ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ W εἶναι

$$W_{min} \approx 2D = 2\text{mm}.$$

Παράδειγμα I-63 Διάκριση τῶν φώτων πορείας μακρυνοῦ αὐτοκινήτου

Τά φῶτα πορείας ἑνός αὐτοκινήτου ἀπέχουν d=1.30m. Σέ πόση περίπου ἀπόσταση L θά ἀρχίσετε νά διακρίνετε τό ἕνα φανάρι ἀπό τό ἄλλο καθώς τό αὐτοκίνητο σᾶς πλησιάζει ἀπό μακρυά; Τά φανάρια ἐκπέμπουν κίτρινο φῶς ($\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m)

Λύση

Τό φῶς ἀπό κάθε φανάρι παθαίνει περίθλαση ἀπό τή κόρη τοῦ ματιοῦ καθώς μπαίνει στό μάτι τοῦ παρατηρητῆ. Γιά νά διακρίνει ὁ παρατηρητής δύο φωτεινά σημεῖα πού ὑποτείνουν γωνία Δφ στό μάτι του θά πρέπει τά δύο κεντρικά μέγιστα περιθλάσεως πάνω στόν ἀμφιβληστροειδή τοῦ ματιοῦ του νά εἶναι χωρισμένα τουλάχιστο κατά τή γωνία Δθ πού καθορίζει τό γωνιακό εὖρος τοῦ ἑνός κεντρικοῦ μέγιστου. Δηλ. θά πρέπει

$$\Delta\varphi \geqslant \Delta\theta \qquad (1)$$

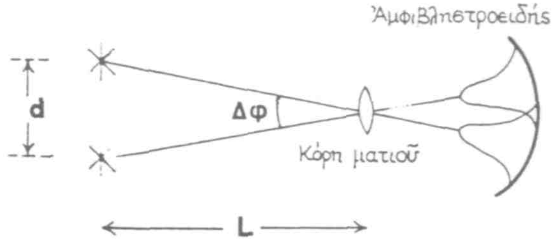
Τό γωνιακό εὖρος τοῦ κεντρικοῦ μεγίστου εἶναι

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{D}$$

ὅπου D=2mm, ἡ διάμετρος τῆς κόρης τοῦ ματιοῦ. Ἀλλά,

$$\tan\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{d}{2L}\simeq\frac{\Delta\varphi}{2} \qquad (3)$$

ἀφοῦ d<<L (Βλ. σχῆμα).
Ἄρα ὁ παρατηρητής θά ἀρχίσει νά διακρίνει τά δύο φανάρια ὅταν ἡ ἀπόσταση L τοῦ αὐτοκινήτου γίνει μικρότερη ἀπό



$$L=\frac{Dd}{2\lambda}=\frac{1.30\times2\times10^{-3}}{2\times5.9\times10^{-7}}\simeq2203\text{m}$$

ὅπως προκύπτει ἀπό τίς (1) καί (3).

Παράδειγμα Ι-64

Ὑποθέτουμε ὅτι θέλουμε νά φωτογραφίσουμε ἕνα μακρινό ἀστέρι. Γιά ἁπλότητα θεωροῦμε ὅτι ὁ φακός τῆς φωτογραφικῆς μηχανῆς ἔχει τετραγωνική τομή πλευρᾶς a. Πῶς θά κατανεμηθεῖ ἡ ἔνταση τοῦ φωτός στή φωτογραφική πλάκα;

Λύση

Ἡ ἔνταση τοῦ φωτός θά δίνεται ἀπό τόν τύπο, ἀνάλογο μέ τόν τύπο γιά περίθλαση ἀπό μιά στενή σχισμή,

$$I=I_0\left[\frac{\sin(\pi a\sin\theta/\lambda)}{\pi a\sin\theta/\lambda}\right]^2\left[\frac{\sin(\pi a\sin\varphi/\lambda)}{\pi a\sin\varphi/\lambda}\right]^2$$

ὅπου θ καί φ οἱ γωνίες πού σχηματίζουν οἱ προβολές τῆς ἀκτίνας ΟΑ στά ἐπίπεδα xz καί yz μέ τούς ἄξονες x καί y ἀντιστοίχως καί I_0 ἡ ἔνταση γιά θ=φ=0.

Ἀπό τήν παραπάνω σχέση βλέπουμε ὅτι θά σχηματισθεῖ ἕνα κεντρικό μέγιστο τετραγωνικῆς διατομῆς καί δύο κάθετα διασταυρωνόμενες ζῶνες μέ ἐναλλάξ φωτεινά καί σκοτεινά ὀρθογώνια. Ἑπομένως στό ἑστιακό ἐπίπεδο τοῦ φακοῦ δέν θά παρατηρήσουμε τό σημειακό εἴδωλο τοῦ ἀστέρα ἀλλά μιά τετράγωνη κηλίδα πού περιβάλλεται ἀπό δύο κάθετα διασταυρώμενες ταινίες μέ σκοτεινούς καί φωτεινούς κροσσούς. Ὁ πρῶτος μηδενισμός θά συμβεῖ γιά γωνίες θ καί φ ἴσες μέ

$$\varphi=\theta\approx\sin\theta=\frac{\lambda}{a}$$

καί συνεπῶς ὁ ἀστέρας θά ἐμφανισθεῖ ὅτι ἔχει γωνιακή διάμετρο