

## Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

### Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

#### Άσκηση 3.

α)

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \\ \hat{\alpha}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \\ 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x &= \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger) \\ 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} &= \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger \Rightarrow \frac{d}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger) \\ x\Psi_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha}\Psi_n + \hat{\alpha}^\dagger\Psi_n) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\ \frac{d\Psi_n}{dx} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\alpha}\Psi_n - \hat{\alpha}^\dagger\Psi_n) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}\langle n|x^2|n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n x^2 \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x\Psi_n)(x\Psi_n) dx \\ x\Psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\ \alpha &= \frac{m\omega}{\hbar} \\ x^2\Psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{n}x\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}x\Psi_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{2\alpha}(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\Psi_{n-2} + \sqrt{n}\sqrt{n}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\Psi_{n+2}) \\ \Rightarrow \langle n|x^2|n\rangle &= \frac{1}{2\alpha}\langle n|n\rangle(n + (n+1)) = \frac{2n+1}{2\alpha} \\ p\Psi_n &= (-i\hbar)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\ p^2\Psi_n &= (-i\hbar)^2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{n}\frac{d\Psi_{n-1}}{dx} - \sqrt{n+1}\frac{d\Psi_{n+1}}{dx}\right) = \\ &= (-\hbar^2)\frac{\alpha}{2}(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\Psi_{n-2} - \sqrt{n}\sqrt{n}\Psi_n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\Psi_{n+2}) \\ \Rightarrow \langle n|p^2|n\rangle &= (-\hbar^2)\frac{\alpha}{2}\langle n|n\rangle(-n - (n+1)) = \hbar^2\frac{2n+1}{2}\alpha \\ \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle &= \frac{\langle P^2\rangle}{2m} \Rightarrow \langle \text{Δυναμικής Ενέργειας} \rangle = \langle \text{Κινητικής Ενέργειας} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \langle n|x|n \rangle = 0, & \langle p \rangle &= \langle n|p|n \rangle = 0 \\
(\Delta x)^2(\Delta p)^2 &= \frac{2n+1}{2\alpha}(\hbar^2)\frac{2n+1}{2}\alpha = \frac{(2n+1)^2}{4}\hbar^2 \\
(\Delta x)(\Delta p) &= \frac{2n+1}{2}\hbar \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned}
x|m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{m}|m-1\rangle + \sqrt{m+1}|m+1\rangle) \\
x_{nm} &= \langle n|x|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle \\
x_{nm} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\alpha}}\delta_{n,n+1} & , n = m-1 \Rightarrow m = n+1 \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\alpha}}\delta_{n,n-1} & , n = m+1 \Rightarrow m = n-1 \end{cases} \\
(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \sqrt{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p|m\rangle &= -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{m}|m-1\rangle - \sqrt{m+1}|m+1\rangle) \\
p_{nm} &= \langle n|p|m\rangle = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle - \sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle) \\
p_{nm} &= \begin{cases} -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n+1} & , m = n+1 \\ i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n} & , m = n-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$N|m\rangle = \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha}|m\rangle = \sqrt{m}\hat{\alpha}^\dagger|m-1\rangle = m|m\rangle$$

$$N_{nm} = \langle n|N|m\rangle = m\langle n|m\rangle = n\delta_{n,m}$$

$$(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

---

#### Άσκηση 4.

α) Έστω  $\hat{A} = \alpha^n (\alpha^\dagger)^n$

Εάν ο τελεστής  $\hat{A}$  δράσει σε μια ιδιοσυνάρτηση του  $\hat{N}$ , έστω την  $\Psi_k$ , τότε θα την επαναφέρει στον εαυτό της αφού η συνολική μετατόπιση που προκαλείται στην ιδιοτιμή  $k$  θα είναι μηδέν. Η δράση του τελεστή δημιουργίας  $\alpha^\dagger$  θα αντισταθμίζεται από ισάριθμες δράσεις του τελεστή  $\alpha$ .

$$\hat{N}\Psi_k = k\Psi_k, \quad \hat{A}\Psi_k = f(k)\Psi_k$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε  $\Psi_k$ .

Άρα η δράση του  $\hat{A}$  θα είναι ισοδύναμη με την δράση του τελεστή  $f(\hat{N})$  επάνω στις  $\Psi_k$

$$\Rightarrow \hat{A} \equiv f(\hat{N})$$

β) Παίρνουμε τυχούσα ιδιοσυνάρτηση των  $\alpha$ ,  $\alpha^\dagger$  και  $\hat{N}$ , την  $\Psi_k$ .  
Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^\dagger \Psi_k &= \sqrt{k+1} \Psi_{k+1}, & \alpha \Psi_k &= \sqrt{k} \Psi_{k-1} \\ \alpha^n (\alpha^\dagger)^n \Psi_k &= \alpha^n (\alpha^\dagger)^{n-1} \Psi_{k+1} \sqrt{k+1} = \\ &= \alpha^n (\alpha^\dagger)^{n-2} \sqrt{k+1} \sqrt{k+2} \Psi_{k+2} = \\ &\vdots \\ &= \alpha^n \sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)} \Psi_{k+n} = \\ &= \sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)} \alpha^{n-1} \sqrt{k+n} \Psi_{k+n-1} = \\ &\vdots \\ &= \sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)} \sqrt{(k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)} \Psi_k = \\ &\Rightarrow (\alpha^n) (\alpha^\dagger)^n \Psi_k = (k+1)(k+2)\cdots(k+n) \Psi_k \end{aligned}$$

για κάθε κυματοσυνάρτηση  $\Psi_k$  του αρμονικού ταλαντωτή

$$\Rightarrow \alpha^n (\alpha^\dagger)^n = (\hat{N} + 1)(\hat{N} + 2)\cdots(\hat{N} + n)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^\dagger)^n \alpha^n \Psi_k &= (\alpha^\dagger)^n \sqrt{k} \sqrt{k-1} \cdots \sqrt{k-(n-1)} \Psi_{k-n} = \\ &= \sqrt{k(k-1)\cdots(k-(n-1))} \sqrt{(k-n+1)(k-n+2)\cdots(k)} \Psi_{k-n+n} \\ &= k(k-1)\cdots(k-(n-1)) \Psi_k \\ &\Rightarrow (\alpha^\dagger)^n \alpha^n = \hat{N}(\hat{N}-1)\cdots(\hat{N}-n+1) \end{aligned}$$

Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 5

Άσκηση 5.

α) Λύσεις Αρνητικής Ενέργειας:

$$E = -|E| < 0$$

Περιοχή Α:,  $0 \leq x < L$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi, \quad \gamma^2 = 2m \frac{|E|}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -2m \frac{E}{\hbar^2} \Psi = \gamma^2 \Psi \Rightarrow \Psi(x) = e^{\pm\gamma x}$$

$$\Psi_A(0) = 0 \Rightarrow \Psi_A(x) = A \sinh(\gamma x)$$

Περιοχή Β:,  $L < x \leq 2L$

$$\Psi_B(2L) = 0, \Rightarrow \Psi_B(x) = B \sinh(\gamma(x - 2L))$$

Η συνέχεια της συνάρτησης μας δίνει

$$\Psi_A(L) = \Psi_B(L) \Rightarrow A \sinh(\gamma L) = B \sinh(-\gamma L) = -B \sinh(\gamma L)$$

$$\Rightarrow A = -B$$

Η  $\Psi(x)$  ικανοποιεί την εξίσωση του Schrödinger, άρα

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' - g\delta(x - L)\Psi = E\Psi$$

Ολοκληρώνουμε γύρω από το σημείο της ασυνέχειας

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon} \Psi''(x) dx - g \int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon} \Psi(x) \delta(x - L) dx = E \int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon} \Psi(x) dx$$

Το δεξί μέλος τείνει στο μηδέν για  $\epsilon \rightarrow 0$ , άρα

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=L+\epsilon} - \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=L-\epsilon} \right) = g\Psi(L)$$

Παίρνοντας το όριο  $\epsilon \rightarrow 0$  από αριστερά έχουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d\Psi_B}{dx}(L) - \frac{d\Psi_A}{dx}(L) \right] = g\Psi_A(L)$$

$$\gamma B \cosh(\gamma L) - \gamma A \cosh(\gamma L) = -\frac{2mg}{\hbar^2} A \sinh(\gamma L)$$

Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση των δυο συναρτήσεων και η γραφική λύση

Ορίζουμε  $\lambda = \frac{2mg}{\hbar^2}$  και παίρνουμε την εξίσωση

$$2\gamma \cosh(\gamma L) = \lambda \sinh(\gamma L) \Rightarrow \tanh(\gamma L) = 2\frac{\gamma}{\lambda}$$

Κάνοντας γραφική παράσταση της υπερβολικής εφαπτομένης  $\tanh(\gamma L)$  συναρτήσει του  $\gamma$ , η τομή με την ευθεία  $\frac{2}{\lambda}\gamma$  δίνει την ενέργεια. Έχουμε μια μη μηδενική λύση όταν η κλίση της ευθείας είναι μικρότερη από την κλίση της υπερβολικής εφαπτομένης στην αρχή. Δηλαδή:

$$\left. \frac{d}{d\gamma} \tanh(\gamma L) \right|_{\gamma=0} = L$$

και πρέπει να έχουμε  $\frac{2}{\lambda} < L$

$$\Rightarrow \lambda L > 2$$

Εάν  $\lambda L = 2$  έχουμε μια λύση με μηδενική ενέργεια ( $\gamma_0 = 0$ ). Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται για  $E=0$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} - g\delta(x-L)\Psi = 0$$

για  $x \neq L$  έχουμε

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Psi_A(x) = Ax \\ \Psi_B(x) = B(2L-x) \end{cases}$$
$$\Psi_A(L) = \Psi_B(L) \Rightarrow AL = BL \Rightarrow A = B$$

Ολοκλήρωση της εξίσωσης του Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\Psi_B}{dx}(L) - \frac{d\Psi_A}{dx}(L) \right) = g\Psi_A(L)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2A) = gAL \Rightarrow 2A = \frac{2mg}{\hbar^2}LA$$

$\Rightarrow 2 = \lambda L$  που ικανοποιείται.

β) Λύσεις Θετικής Ενέργειας

$$x \neq L \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_A(x) = A \sin(kx) & , 0 \leq x < L \\ \Psi_B(x) = B \sin(k(x-2L)) & , L < x \leq 2L \end{cases}$$

Συνέχεια της συνάρτησης για  $x = L$ , δίνει

$$A \sin(kL) = B \sin(-kL)$$

Εάν  $\sin(kL) \neq 0 \Rightarrow A = -B$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Schrödinger έχουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\Psi_B}{dx}(L) - \frac{d\Psi_A}{dx}(L) \right) = g\Psi_A(L)$$

$$2k \cos(kL) = \frac{2mg}{\hbar^2} \sin(kL) = \lambda \sin(kL)$$

$$\Rightarrow \tan(kL) = \frac{2}{\lambda} k$$

Η λύση είναι πάλι γραφική από την τομή της εφαπτομένης  $\tan(kL)$  με την ευθεία  $\frac{2}{\lambda} k$ .

$$\text{Για } \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{2L} n$$

$$\text{με ενέργεια } E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Schrödinger βρίσκουμε  $A = B$ . ■

Άσκηση 6.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' - \frac{g}{x} \Psi = E\Psi, \quad E < 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' + \left( E + \frac{g}{x} \right) \Psi = 0, \quad E = -|E|$$

Διαστατική ανάλυση:

Το  $g$  έχει διαστάσεις Joules·Length ,

$$\frac{\hbar^2}{m} = \frac{\text{Joule}^2 \cdot \text{sec}^2}{\text{kg}} = \frac{\text{Joule} \cdot \text{sec}^2}{\text{kg}} \text{kg} \left( \frac{\text{Length}}{\text{sec}} \right)^2$$

$$\frac{\hbar^2}{m} = \text{Joule} \cdot (\text{Length})^2, \quad \alpha = \frac{m}{\hbar^2} g = \frac{\text{Joule} \cdot \text{Length}}{\text{Joule} \cdot (\text{Length})^2} = \frac{1}{\text{Length}}$$

Ορίζουμε:

$$\alpha = \frac{mg}{\hbar^2} \Rightarrow \text{η μεταβλητή } \xi = \alpha x \text{ είναι αδιάστατη.}$$

Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται:

$$\begin{aligned} \Psi'' + \left(2\frac{mE}{\hbar^2} + \frac{mg}{\hbar^2} \frac{2}{x}\right) \Psi &= 0 \\ \frac{d\Psi}{dx} &= \frac{d\Psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dx}\right) = \alpha \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right) = \alpha^2 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} \\ \Rightarrow \alpha^2 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(2\frac{mE}{\hbar^2} + \frac{2\alpha}{\xi}\right) \Psi &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(2\frac{mE}{\hbar^2\alpha^2} + \frac{2}{\xi}\right) \Psi &= 0 \\ \gamma^2 = \frac{2\hbar^2|E|}{mg^2} = \frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\frac{m|E|}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{m|E|}{\hbar^2} \frac{h^4}{m^2g^2} = \frac{\hbar^2|E|}{mg^2} = \text{αδιάστατο.}$$

Άρα η εξίσωση του Schrödinger στις νέες μεταβλητές είναι

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(-\gamma^2 + \frac{2}{\xi}\right) \Psi = 0$$

Παίρνουμε πρώτα την ασυμπτωτική εξίσωση για  $\xi \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \Psi'' - \gamma^2\Psi = 0 \Rightarrow \Psi'' = \gamma^2\Psi \Rightarrow \Psi(\xi) = e^{-\gamma\xi}$$

Για κάθε  $\xi$  έχουμε την λύση

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= e^{-\gamma\xi} F(\xi) \\ \frac{d\Psi}{d\xi} &= -\gamma e^{-\gamma\xi} F(\xi) + e^{-\gamma\xi} \frac{dF}{d\xi} \\ \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} &= \gamma^2 e^{-\gamma\xi} F(\xi) - \gamma e^{-\gamma\xi} \frac{dF}{d\xi} - \gamma e^{-\gamma\xi} \frac{dF}{d\xi} + e^{-\gamma\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} \\ \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} &= \left(\gamma^2 F - 2\gamma \frac{dF}{d\xi} + \frac{d^2F}{d\xi^2}\right) e^{-\gamma\xi} \end{aligned}$$

Η εξίσωση του Schrödinger ξανά:

$$\begin{aligned} (\gamma^2 F - 2\gamma F' + F'') - \gamma^2 F + \frac{2F}{\xi} &= 0 \\ F'' - 2\gamma F' + \frac{2}{\xi} F &= 0 \end{aligned}$$

Λύση με σειρά:

$$F(\xi) = \xi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k$$

$$\Rightarrow F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^k$$

όπου ξεκινάμε με τον γραμμικό όρο διότι θέλουμε  $F(\xi = 0) = 0$ . Έτσι

$$F' = \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k \xi^{k-1}, \quad \frac{F}{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^{k-1}$$

$$F'' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \beta_k \xi^{k-2}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \beta_k \xi^{k-2} - 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k \xi^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^{k-1} = 0$$

Αναδιατάσσουμε τις σειρές για να έχουμε ίδιες δυνάμεις

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) \beta_{l+2} \xi^l - 2\gamma \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \beta_{l+1} \xi^l + 2 \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l+1} \xi^l = 0$$

όπου για την πρώτη σειρά έχουμε κάνει τον μετασχηματισμό  $k = l+2, l=0 \mapsto k=2$ , για την δεύτερη σειρά  $k = l+1, l=0 \mapsto k=1$  και για την τρίτη  $k = l+1, l=0 \mapsto k=1$ .

Κρατάμε τους ομοβάθμιους όρους:

$$(l+2)(l+1) \beta_{l+2} - 2\gamma(l+1) \beta_{l+1} + 2\beta_{l+1} = 0$$

$$\beta_{l+2} = \frac{2\gamma(l+1) - 2}{(l+2)(l+1)} \beta_{l+1}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

Ορίζοντας  $k = l+1$  έχουμε

$$\beta_{k+1} = 2 \frac{\gamma k - 1}{(k+1)k} \beta_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Η σειρά τερματίζεται εάν  $\gamma = \frac{1}{n}$ ,  $n = \text{ακέραιος}$   
και για κάθε  $n$  η λύση είναι πολυώνυμο βαθμού  $n$ .



Ενέργειες:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2\hbar^2 |E|}{mg^2}$$
$$\Rightarrow E_n = -\frac{mg^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

---

### Άσκηση 8.

Πρώτον, αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του  $x^2$ :

$$V(x) = \left( 1 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2 x^4}{2} + \frac{\lambda^3 x^6}{3!} + \dots \right) V_0$$

Δεύτερον, κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους λύνουμε την εξίσωση του Schrödinger για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V_0\lambda x^2\Psi = (E_n - V_0)\Psi$$
$$V_0\lambda = \frac{1}{2}m\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2V_0\lambda}{m}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}\sqrt{\lambda}$$

Οι λύσεις είναι:

$$E_n^{(0)} - V_0 = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$
$$E_n^{(0)} = V_0 + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

και ιδιοσυναρτήσεις  $\Psi_n$  αυτές του αρμονικού ταλαντωτή.

Τρίτον, αντιμετωπίζουμε τον όρο  $V(x) = \frac{\lambda^2}{2}x^4V_0$  σαν διαταραχή και υπολογίζουμε τις διορθώσεις στην ενέργεια  $E_n$ .

Εφαρμόζουμε λοιπόν πρώτης τάξης θεωρία διαταραχών:

$$W_n = \langle \Psi_n | V(x) | \Psi_n \rangle = V_{nn}$$

$$V_{nn} = \langle \Psi_n | V_0 \frac{\lambda^2}{2} x^4 | \Psi_n \rangle = \frac{V_0}{2} \lambda^2 \langle \Psi_n | x^4 | \Psi_n \rangle$$

$$\langle \Psi_n | x^4 | \Psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n x^4 \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \Psi_n)(x^2 \Psi_n) dx$$

$$x^2 |n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left( \sqrt{n(n-1)} \Psi_{n-2} + (2n+1) \Psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)} \Psi_{n+2} \right)$$

$$\langle n | x^4 | n \rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} (n(n-1) + (2n+1) + (n+1)(n+2))$$

$$\langle n | x^4 | n \rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} (2(n^2 + 2n + 2))$$

$$W_n = V_{nn} = \frac{V_0}{2} \lambda^2 \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} 2(n^2 + 2n + 2)$$

$$V_{nn} = \frac{\lambda \hbar^2}{8m} (n^2 + 2n + 2)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + V_{nn} = V_0 + \sqrt{2V_0} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \hbar + \frac{1}{8} (n^2 + 2n + 2) \left( \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \hbar \right)^2$$

Για μικρό  $n$  η διόρθωση πάει με τις δυνάμεις του  $\hbar \sqrt{\frac{\lambda}{m}} < \sqrt{V_0}$  όπως υποθέτουμε. Για μεγάλα  $n$  πάει με το  $n^2$  και γίνεται αναξιόπιστη η προσέγγιση. ■

### Άσκηση 9.

α)

$$c = 0 :$$

$$\Psi_n(x, y) = \Psi_{n_1}(x) \Psi_{n_2}(y)$$

$$E_n = E_{n_1} + E_{n_2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{n_i}}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Psi_{n_i} = E_{n_i} \Psi_{n_i}, \quad i = 1, 2$$

$$E_{n_1} = \hbar\omega \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_{n_2} = \hbar\omega \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_n = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) = \hbar\omega(n + 1)$$

$$n = n_1 + n_2, \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots, \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow n = 0, 1, 2, \dots$$

Για την ενέργεια  $E_0 = \hbar\omega$  έχουμε μόνο μια ιδιοσυνάρτηση, την  $\Psi_0(x, y) = \Psi_0(x)\Psi_0(y)$ .  
 Για την ενέργεια  $E_1 = 2\hbar\omega$  έχουμε δυο ιδιοσυναρτήσεις, τις

$$\begin{cases} \Psi_{10}(x, y) = \Psi_1(x)\Psi_0(y) = \Phi_1 \\ \Psi_{01}(x, y) = \Psi_0(x)\Psi_1(y) = \Phi_2 \end{cases}$$

δηλαδή έχουμε εκφυλισμό.

Για ορισμένο  $n$  με ενέργεια  $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n+1)$  το  $n_1$  μπορεί να πάρει τις τιμές  $n_1 = 0, 1, 2, \dots, n$  και το  $n_2 = n, n-1, n-2, \dots, 0$  αντίστοιχα, δηλαδή έχουμε  $n+1$  διαφορετικές καταστάσεις με την ίδια ενέργεια. ■

β) Ιδιοτιμές της ενέργειας για  $c \neq 0$

$$V_{11} = \langle \Phi_1 | V | \Phi_1 \rangle = \int \Psi_1^*(x)\Psi_0^*(y)cxy\Psi_1(x)\Psi_2(y)dxdy =$$

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x)x\Psi_1(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(y)y\Psi_0(y)dy$$

$$V_{11} = 0, \quad V_{22} = 0$$

$$V_{12} = \langle \Phi_1 | V | \Phi_2 \rangle = c \int \Psi_1^*(x)\Psi_0^*(y)xy\Psi_0(x)\Psi_1(y)dxdy =$$

$$= c \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1 x \Psi_0 dx \right)^2 = c \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Psi_1(x) dx \right)^2 =$$

$$= c \frac{\hbar}{2m\omega} = V_{21}$$

$$x\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Psi_1$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2\hbar\omega - E_1 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 2\hbar\omega - E_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2\hbar\omega - E_1)^2 - \frac{c^2\hbar^2}{4m^2\omega^2} = 0 \Rightarrow \left( 2\hbar\omega - E_1 - \frac{c\hbar}{2m\omega} \right) \left( 2\hbar\omega - E_1 + \frac{c\hbar}{2m\omega} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1^{(+)} = 2\hbar\omega + \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ E_1^{(-)} = 2\hbar\omega - \frac{c\hbar}{2m\omega} \end{cases}$$

$$\Phi^{(+)} = c_1^{(+)}\Phi_1 + c_2^{(+)}\Phi_2, \quad E_1^{(+)} = E_1^{(0)} + W$$

$$\Phi^{(-)} = c_1^{(-)}\Phi_1 + c_2^{(-)}\Phi_2, \quad E_1^{(-)} = E_1^{(0)} - W$$

$$E_1^{(0)} = 2\hbar\omega \text{ και } W = \frac{c\hbar}{2m\omega}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(+)} \\ c_2^{(+)} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} c_1^{(+)} \\ c_2^{(+)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{c\hbar}{2m\omega} c_2^{(+)} = \frac{c\hbar}{2m\omega} c_1^{(+)} \Rightarrow c_1^{(+)} = c_2^{(+)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix} = -W \begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1^{(-)} = -c_2^{(-)}$$

Και με κανονικοποίηση  $|c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , έτσι

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + \Phi_2) & \text{Συμμετρική Λύση} \\ \Phi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - \Phi_2) & \text{Αντισυμμετρική Λύση} \end{cases}$$

■

γ)

$$xy = (v+z)(v-z) = v^2 - z^2$$

$$x^2 + y^2 = v^2 + z^2 + 2vz + v^2 + z^2 - 2vz = 2v^2 + 2z^2$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + cxy = m\omega^2v^2 + m\omega^2z^2 + cv^2 - cz^2 =$$

$$= (m\omega^2 + c)v^2 + (m\omega^2 - c)z^2$$

$$v = \frac{1}{2}(x+y), \quad z = \frac{1}{2}(x-y)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Η εξίσωση του Schrödinger στις νέες μεταβλητές είναι

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + (m\omega^2 + c)v^2 + (m\omega^2 - c)z^2$$

όπου  $m\omega^2 - c > 0$ .

Ξαναορίζοντας τις μεταβλητές

$$v \rightarrow \sqrt{2}v = w, \quad z \rightarrow \sqrt{2}z = u$$

η Χαμιλτονιανή γίνεται

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{2}(m\omega^2 + c)w^2 + \frac{1}{2}(m\omega^2 - c)u^2$$

με ιδιοτιμές της ενέργειας:

$$\begin{cases} E_{n_1} = \hbar\omega_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \\ E_{n_2} = \hbar\omega_2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

όπου

$$m\omega_1^2 = m\omega^2 + c \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{c}{m}}$$

$$m\omega_2^2 = m\omega^2 - c \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \frac{c}{m}}$$

Τελικά οι κυματοσυναρτήσεις είναι:

$$\Psi_{n_1, n_2}(x, y) = \Psi_{n_1}(w)\Psi_{n_2}(u)$$

$$\Psi_{n_1}(w) = \left( \frac{\alpha_1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{2^{-n_1}}{n_1!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha_1 \frac{w^2}{2}} H_{n_1}(\sqrt{\alpha_1}w)$$

$$\alpha_1 = \frac{m\omega_1}{\hbar}$$

$$\Psi_{n_2}(u) = \left( \frac{\alpha_2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{2^{-n_2}}{n_2!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha_2 \frac{u^2}{2}} H_{n_2}(\sqrt{\alpha_2}u)$$

$$\alpha_2 = \frac{m\omega_2}{\hbar}$$

με ολική ενέργεια  $E_{n_1, n_2} = E_{n_1} + E_{n_2}$  ■

**Άσκηση 10.**

**Πρώτον** Υποθέτω ότι λύνω την αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή  $H_0$  και έχω τα  $E_0$  και  $\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}$ .

**Δεύτερον** διαγωνοποιώ τον πίνακα  $V_{k\lambda}$  της διαταραχής και βρίσκω τις δυο ιδιοτιμές της ενέργειας

$$E_1 = E_0 + E^{(1)}, \quad E_2 = E_0 + E^{(2)}$$

**Τρίτον** βρίσκω για κάθε ιδιοτιμή  $E_1, E_2$  τα ιδιοδιανύσματα  $\Psi_k$  με  $k = 1, 2$

$$(H_0 + V)\Psi_k = E_k\Psi_k$$

$$H_0\Psi_k^{(0)} = E_0\Psi_k^{(0)}$$

$$\Psi_1 = c_{11}\Psi_1^{(0)} + c_{12}\Psi_2^{(0)}$$

$$\Psi_2 = c_{21}\Psi_1^{(0)} + c_{22}\Psi_2^{(0)}$$

**Τέταρτον** λύνω ως προς  $\Psi_1^{(0)}$

$$\Psi_1^{(0)} = \frac{c_{22}\Psi_1 - c_{12}\Psi_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\Psi(t=0) = \Psi_1^{(0)}, \quad \Psi(t) = \frac{c_{22}\Psi_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - c_{12}\Psi_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \left( c_{22}\Psi_1 e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - c_{12}\Psi_2 e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right)$$

αντικαθιστώντας όπου  $\Psi_1, \Psi_2$  τις εκφράσεις τους ως προς  $\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}$  έχουμε

$$\Psi(t) = \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \left[ \Psi_1^{(0)} \left( c_{11}c_{22} e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - c_{12}c_{21} e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) + \Psi_2^{(0)} c_{12}c_{22} \left( e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) \right]$$

Επιβεβαίωση:

$$t = 0 \Rightarrow \Psi(t=0) = \frac{1}{\det |c|} \Psi_1^{(0)} \det |c| = \Psi_1^{(0)}$$

$$\begin{aligned} \text{Πιθανότητα μετάβασης στην } \Psi_2^{(0)} \text{ σε χρόνο } (t) &= \left| \langle \Psi_2^{(0)} | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{(c_{12}c_{22})^* (c_{12}c_{22})}{|c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|^2} \left( e^{i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) \left( e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) = \\ &= \frac{|c_{12}|^2 |c_{22}|^2}{|c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|^2} \left( 2 - 2 \cos \left( \frac{E^{(1)} - E^{(2)}}{\hbar} t \right) \right) \end{aligned}$$

### Άσκηση 11.

Το δυναμικό που προστίθεται στο σύστημα είναι της μορφής  $V(x, t) = -q\mathcal{E}(t)x$   
 Άρα το πλάτος πιθανότητας  $\alpha_{n \rightarrow m}$  σε πρώτης τάξης διαταρακτική προσέγγιση είναι:

$$\alpha_m(t) = \alpha_{n \rightarrow m}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{mn}(t') e^{iW_{mn}t'} dt'$$

$$W_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) = \frac{1}{\hbar} \hbar\omega \left( m + \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} \right)$$

$$W_{mn} = \omega(m - n)$$

$$V_{mn}(t) = -q\mathcal{E}(t) \langle m|x|n \rangle = -qe^{-\lambda t^2} \langle m|x|n \rangle$$

για τον αρμονικό ταλαντωτή έχουμε:

$$x\Psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1})$$

άρα

$$m = \begin{cases} n-1 \\ n+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle m|x|n \rangle = \begin{cases} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} & , m = n-1 \\ \sqrt{n+1}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} & , m = n+1 \end{cases}$$

Εάν πάρουμε  $t \rightarrow \infty$  έχουμε:

$$\alpha_{n \rightarrow n+1} = \frac{iq}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} e^{i\omega t} dt$$

$$\alpha_{n \rightarrow n-1} = \frac{iq}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} e^{-i\omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda}}$$

και Πλάτος μετάβασης =  $|\alpha_m|^2$  ■

### Άσκηση 12.

Ολική δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - Fx$$

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 + V_0$$

$$x_0 = \frac{F}{m\omega^2}, \quad V_0 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{m\omega^2}$$

ορίζουμε  $y = x - x_0$

άρα οι κυματοσυναρτήσεις του διαταραγμένου συστήματος είναι

$$\Psi_k(y) = \Psi_k(x - x_0)$$

με  $\Psi_k$  τις λύσεις του ταλαντωτή,  $\Psi_k(x) = c_k H_k(\sqrt{a}x) e^{-\frac{ax^2}{2}}$ ,  $a = \frac{m\omega}{\hbar}$ .  
Άρα το πλάτος μετάβασης είναι:

$$\alpha_{0 \rightarrow k} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x) \Psi_k(x - x_0) dx$$

κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής

$$y = x - x_0, \quad dy = dx, \quad x = y + x_0$$

$$\begin{aligned} \alpha_{0 \rightarrow k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(y + x_0) \Psi_k(y) dy = \\ &= c_0 c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \frac{(y+x_0)^2}{2}} e^{-a \frac{y^2}{2}} H_k(\sqrt{a}y) dy = \\ &= c_0 c_k e^{-a \frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_0 y} e^{-ay^2} H_k(\sqrt{a}y) dy = \\ &= \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-a \frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}x_0 \xi} e^{-\xi^2} H_k(\xi) d\xi = \\ &= \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-a \frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\sqrt{a}x_0 \xi} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

$$\xi = \sqrt{a}y, \quad \xi_0 = \sqrt{a}x_0, \quad H_k(\xi) = (-1)^k e^{\xi^2} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{-\xi^2}$$

$$\alpha_{0 \rightarrow k} = (-1)^k \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_0 \xi} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{-\xi^2} d\xi$$

Το ολοκλήρωμα επιλύεται κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέρη  $k$  φορές.

$$c_0 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad c_k = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \Rightarrow \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^k k!}}$$