Ηλεκτρομαγνητισμός

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

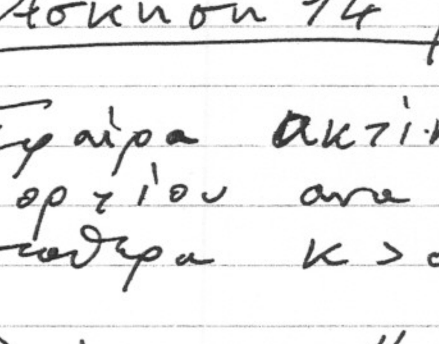
Κεφ. 2

Άσκηση 14

Σφαίρα ακτίνας R, με πυκνότητα φορτίου ανά μονάδα όγκου $\rho = \kappa r$, σταθερά $\kappa > 0$.

Βρείτε το Ηλεκτρικό πεδίο για $r > R$ και $r < R$ (I).

Λύση



α) Αποδεικνύουμε με αρ. επιχειρήματα ότι το Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι ακτινικό σε κάθε σημείο του χώρου μέσα και έξω από την σφαίρα

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r} .$$

Νόμος του Gauss για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή II, $r > R$.

Θεωρούμε μία σφαίρα ακτίνας $r > R$ και κέντρου O και εφαρμόζουμε τον Νόμο του Gauss:

$$\oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{εντος}}{\varepsilon_0}$$

επειδη $r > R$ εχουμε $Q_{εντος} = Q_{ολικο} =$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})\, d^3x = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} kr\, r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k\, 4\pi \int_0^R r^3\, dr = \frac{4\pi k}{4} R^4 = \pi k R^4$$

$$\oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E_{II} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{II} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

) Εφαρμοζουμε τον νομο του Gauss για να βρού, το ηλεκτρικό πεδιο στην περιοχή (I).

Ταίρνουμε μια σφαίρα ακτίνας $r < R$ και κεντρου O

$$\oint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{εντος}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{εντος} = 4\pi k \int_0^r r^3\, dr = \pi k r^4$$

$$4\pi E_I r^2 = \frac{\pi k r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_I = \frac{k r^2}{4\varepsilon_0}$$

Άσκηση 20

α) $\vec{E}_1 = kxy\,\hat{x} + 2kyz\,\hat{y} + 3kxz\,\hat{z}$

Για να παριστάνει αυτό το διάνυσμα ηλεκτροστατικό πεδίο πρέπει να ισχύει για κάθε σημείο στον χώρο:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_1 = 0$$

υπολογίζουμε το $\vec{\nabla}\times\vec{E}_1$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ kxy & 2kyz & 3kxz \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(0 - 2yk) + \hat{y}(-3kx) + \hat{z}(-kx) \neq 0$$

Άρα δεν παριστάνει ηλεκτροστατικό πεδίο

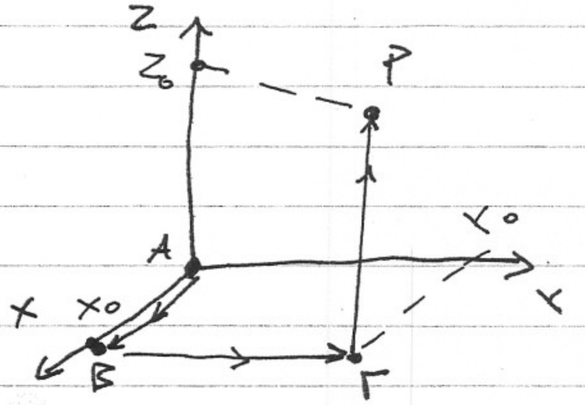
β) $\vec{E}_2 = ky^2\,\hat{x} + k(2xy + z^2)\,\hat{y} + 2kyz\,\hat{z}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ky^2 & 2kxy + kz^2 & 2kyz \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(2z - 2z) + \hat{y}(0) + \hat{z}(2y - 2y) \equiv 0$$

Άρα παριστάνει ηλεκτροστατικό πεδίο

Θα βρούμε το Δυναμικό $V(\vec{r})$ θέτοντας $V(0) = 0$.



$$V(A) - V(P) = \int_A^P \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

όλες οι διαδρομές από το σημείο A στο σημείο P θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα.
Διαλέγουμε την διαδρομή του σχήματος για να κάνουμε τον υπολογισμό.

$A \to B \to \Gamma \to P$

$$V(A) - V(P) = \int_A^P \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_B^\Gamma \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_\Gamma^P \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_0^{x_0} E_x\, dx + \int_{(x_0,0)}^{(x_0,y_0)} E_y\, dy + \int_{(x_0,y_0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} E_z\, dz$$

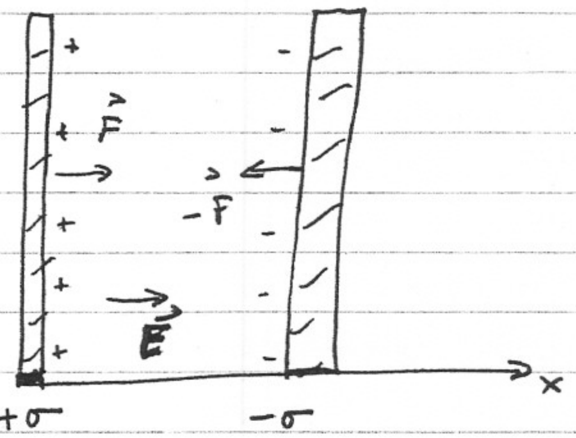
$$= 0 + x_0 y_0^2 + y_0 z_0^2$$

Το σημείο $P = (x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα γενικό σημείο στον χώρο

$$\Rightarrow V(x,y,z) = -xy^2 - yz^2$$

Άσκηση 41

Έχουμε έναν ιδανικό πυκνωτή με παράλληλες πλάκες.



Θα υπολογίσουμε την μεταβολή στην ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου του πυκνωτή με σκοπό να βρούμε την δύναμη που ασκείται μεταξύ των οπλισμών του

1ος τρόπος Έχουμε μια απειροστή μετατόπιση Δx της μίας πλάκας

$$\rightarrow \quad \Delta W = F \cdot A \cdot \Delta x$$

F = Δύναμη ανά μονάδα επιφανείας.
σ = επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

A = εμβαδόν των οπλισμών.

ΔV = μεταβολή του όγκου $= A \cdot \Delta x$

2ος τρόπος
$$W_{\pi\rho o} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 V_{\pi\rho o}$$

$$W_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 V_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$E = \text{σταθερό} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E$$

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \Delta V$$

Εξισώνουμε $\Rightarrow \; FA = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} A \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{2}\sigma E}$

Κεφ. 3

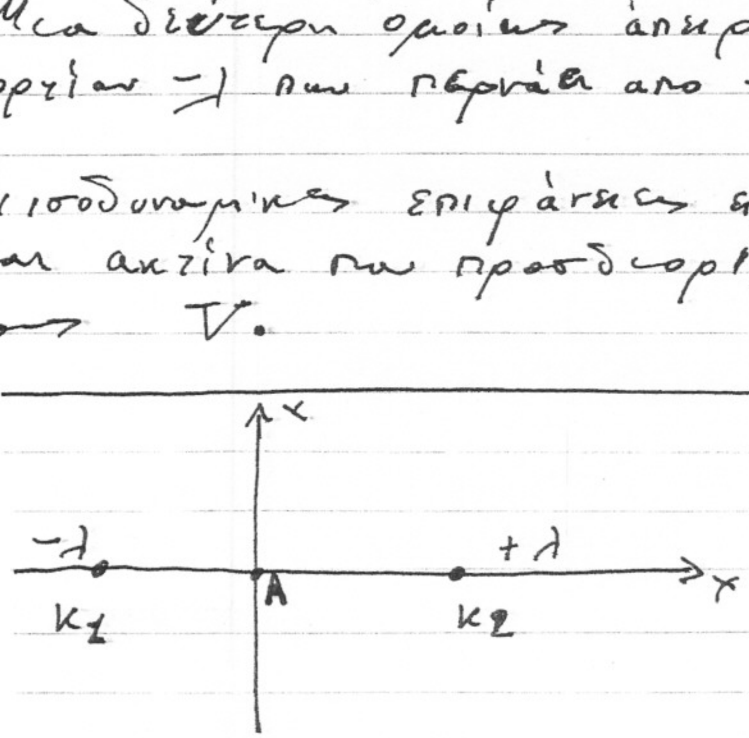
Άσκηση 10 Δύο ευθύγραμμοι σωλήνες ... μήκους απο χαλκό, ακτίνας R ο καθένας, κρατούνται σε απόσ... $2d$. Ο ένας βρίσκεται σε δυναμικό V_0 και ο άλλος σε δυναμικό $-V_0$. Βρείτε το δυναμικ... παντού στον χώρο.

Το Θεώρημα μοναδικότητας εφαρμόζεται εδώ... έχουμε ορίσει το δυναμικό στις δύο κυλινδρικές επιφάνειες και σε μία επιφάνεια στο άπειρο όπου το δυναμικό είναι ίσο με μηδέν.

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

Μια άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου κατά μήκος του άξονα των Z, πυκνότητα φορτίου $+\lambda$ ανά μονάδ... μήκους, που τέμνει το επίπεδο (x, y) στο σημείο K...
Μια δεύτερη ομοίως άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου $-\lambda$ που περνάει απο το σημείο K_1.

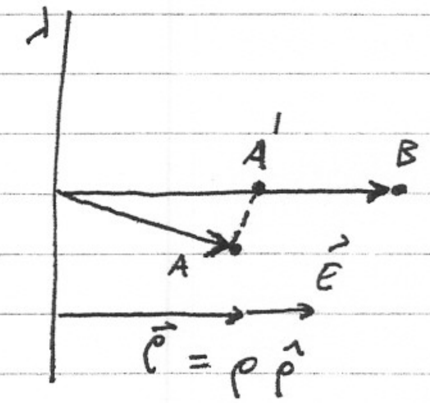
Ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κύκλοι με κέντρο ... ακτίνα που προσδιορίζονται απο το δυναμικό → V.



ο άξονας Z είναι κάθετος σε αυτό το επίπεδο (x, y).

$AK_1 = AK_2$

<u>Βήμα πρώτο:</u> Προσδιορίζουμε το δυναμικό από μια άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου, δεν μπορούμε να βάλουμε $V=0$ σε κάποιο σημείο διότι τα φορτία εκτείνονται μέχρι το άπειρο, υπολογίζουμε λοιπόν μόνο διαφορές δυναμικού.



Παίρνωντας κατάλληλη κυλινδρική επιφάνεια και εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss βρίσκουμε την ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία του χώρου είναι

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα διαλέγουμε την διαδρομή $A \to A' \to B$

με $\rho_A = \rho_{A'}$ ($A \to A'$ κινούμαστε κυκλικά)

$$\Rightarrow V(A) - V(B) = \int_A^{A'} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{A'}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\rho_A}^{\rho_B}\frac{d\rho}{\rho}$$

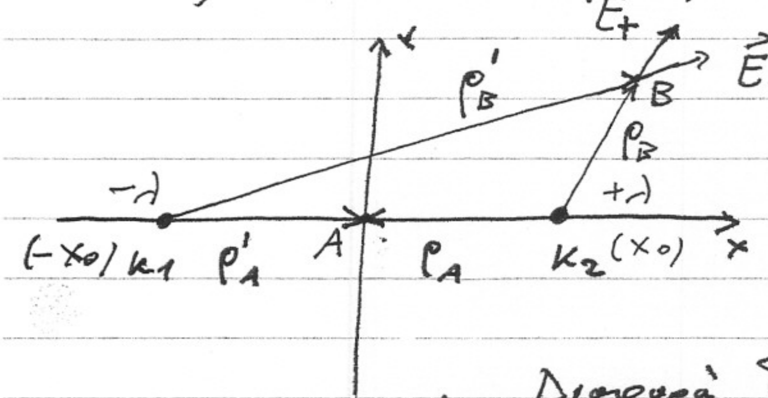
$$V(A) - V(B) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)$$

$A \to A'$ έχουμε $\vec{E} \perp d\vec{l}$.

$A' \to B$ έχουμε $d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho}$.

Βήμα δεύτερο: Παίρνουμε τώρα τις δύο γραμμικές κατανομές φορτίου $\pm\lambda$)

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο εντάσεων



$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

$$\vec{E}_- = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{\rho}'}{\rho'}$$

Διαφορά δυναμικού

$$V(B)-V(A) = \int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_B^A \vec{E}_+\cdot d\vec{\ell} + \int_B^A \vec{E}_-\cdot d\vec{\ell}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_A'}{\rho_B'}\right)$$

$$\rho_A' = AK_1 = AK_2 = \rho_A$$

$$V(B)-V(A) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_B'}{\rho_B}\right)$$

Παρατηρήσεις 1) όλα τα σημεία του επιπέδου (x, z) με $x=0$ έχουν το ίδιο δυναμικό και $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ κάθετο σε αυτό το επίπεδο.

2) Θέτουμε $V(A) = 0$

3) το σημείο B είναι ένα γενικό σημείο στον χώρο

$$\Rightarrow\quad V(B) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)$$

Βήμα τρίτο: Ισοδυναμικές επιφάνειες

Ζητάμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων με δυναμικό V σταθερό.

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = e^{\frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\lambda}} = k$$

$k<1$ εαν $V<0$, $k>1$ εαν $V>0$.

$$\rho' = k\rho \Rightarrow \rho' = k\,|\vec{K_2K_1} + \vec{\rho}'| = k\,|\vec{\rho}' - 2\vec{x}_0|$$

$$\rho'^2 = k^2(\rho'^2 - 4\vec{x}_0\cdot\vec{\rho}' + 4x_0^2)$$

$$\rho'^2(1-k^2) + 4k^2\,\vec{x}_0\cdot\vec{\rho}' = 4k^2x_0^2 \Rightarrow \rho'^2 + \frac{4k^2}{1-k^2}\vec{x}_0\cdot\vec{\rho}' = \frac{4k^2}{1-k^2}x_0^2$$

$$\rho'^2 + \frac{4k^2}{1-k^2}\vec{x}_0\cdot\vec{\rho}' + \left(\frac{2k^2}{1-k^2}\right)^2 x_0^2 = \frac{4k^2}{1-k^2}x_0^2 + \left(\frac{2k^2}{1-k^2}\right)^2 x_0^2$$

$$\left|\vec{\rho}' + \frac{2k^2}{1-k^2}\vec{x}_0\right|^2 = 4x_0^2\,\frac{k^2}{(1-k^2)^2}$$

Αρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με ακτίνα $R = 2x_0\,\dfrac{k}{|1-k^2|}$

και κεντρο στο σημείο M_1 ετσι ώστε

$$\vec{K_1M_1} = -2\vec{x}_0\,\frac{k^2}{1-k^2}, \quad \vec{x}_0 = x_0\hat{x}$$

Εαν $V = -V_0 < 0 \Rightarrow k<1$, $1-k^2>0$

και το σημείο M_1 αριστερότερα του K_1.

$$k = \exp\left[-\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right]$$

για $V = V_0$ παίρνω την αρχική σχέση ανάποδα

$$\frac{\rho}{\rho'} = e^{-\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}} = \kappa \quad , \quad \kappa < 1 \text{ πάλι}$$

$$\rho = \kappa\rho' \Rightarrow \rho = \kappa\left|\vec{\rho} + 2\vec{x}_0\right|$$

Γεωμετρικός τόπος κύκλος με ακτίνα

$$R = 2x_0 \frac{\kappa}{|1-\kappa^2|}$$

και κέντρο στο σημείο M_2 έτσι ώστε

$$\overrightarrow{K_2M_2} = 2\vec{x}_0 \frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}$$ δεξιότερα του K_2.

<u>Βήμα Τέταρτο</u>: Σύνδεση με τα στοιχεία του προβλήματος.

$$M_1M_2 = 2d = M_1K_1 + K_1K_2 + K_2M_2$$

$$2d = 2x_0 + 4x_0\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2} = 2x_0\frac{1+\kappa^2}{1-\kappa^2}$$

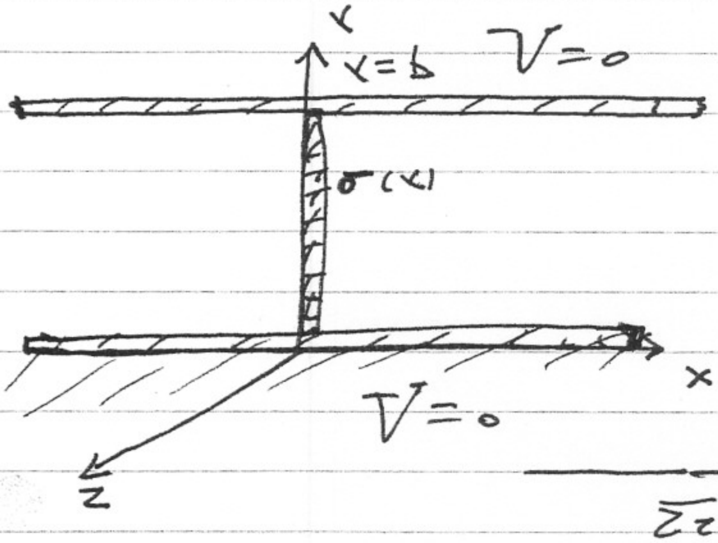
$$R = 2x_0\frac{\kappa}{1-\kappa^2}$$

Σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τα x_0, κ

βρίσκοντας το κ βρίσκουμε κατόπιν το λ

$$\lambda = -\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln\kappa} .$$

Άσκηση 13



Έχουμε δύο αγώγιμα άπειρα επίπεδα σε δυναμικό V = μηδέν.

Το ένα για $y=0$ επάνω στο επίπεδο (x, z) και το δεύτερο για $y=b$ παράλληλο επίπεδο στο (x, z) επίπεδο.

Στην θέση $x=0$ έχουμε μια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(y)$ ανεξάρτητη του z για $0<y<b$

Το δυναμικό V είναι συνάρτηση μόνο των x, y

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-k\frac{\pi}{b}|x|}\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$$

ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $V(x,0)=0$

$V(x,b)=0$ και $V(x,y)\to 0$ για $|x|\to\infty$

Οι άγνωστες σταθερές A_k υπολογίζονται από την οριακή συνθήκη

$$\boxed{E_x(0^+,y)-E_x(0^-,y)=\frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0}}$$

$$E_x(0^+,y)=-\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0^+}, \quad |x|=x$$

$$E_x(0^-,y)=-\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0^-}, \quad |x|=-x$$

$$x>0\,,\quad E_x = \frac{\pi}{b}\sum_{k=1}^{\infty} k A_k\, e^{-k\frac{\pi}{b}x}\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$$

$$x<0\,,\quad E_x = -\frac{\pi}{b}\sum_{k=1}^{\infty} k A_k\, e^{k\frac{\pi}{b}x}\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$$

η οριακή συνθήκη γίνεται : $(x=0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi}{b}k A_k \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) = \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{2\pi}{b}k A_k = \frac{2}{b}\int_0^b \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0}\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)dy$$

$$A_k = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 k}\int_0^b \sigma(y)\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)dy$$

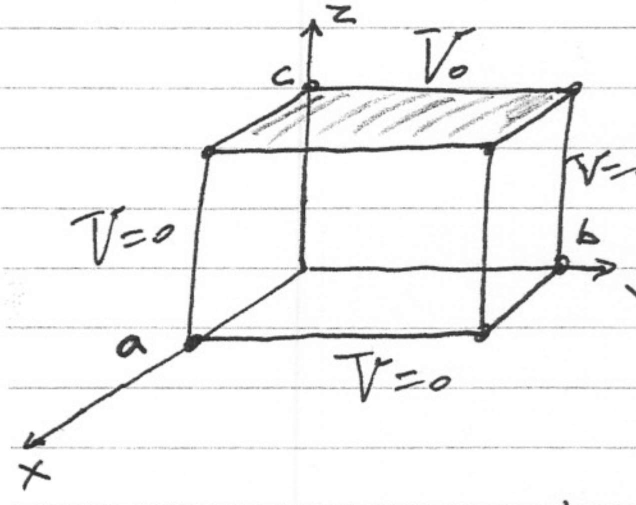
Παρατήρηση $\quad E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$

και εάν θέλουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου τα δυο αγώγιμα επίπεδα :

$$\sigma(x,y=0) = -\varepsilon_0\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0} = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\hat{y}$$

$$\sigma(x,y=b) = \varepsilon_0\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=b} = \varepsilon_0\vec{E}\cdot(-\hat{y})$$

$\boxed{\text{Άσκηση 16}}$ Μεταλλικό κουτί σε σχήμα κύβου. Οι πέντε πλευρές είναι σε δυναμικό μηδέν. Η έκτη πλευρά έχει δυναμικό V_0 (δες το σχήμα). Βρείτε το δυναμικό μέσα στο κουτί.



$$V = V(x,y,z)$$

Ξεκινάμε με μια λύση χωριζομένων μεταβλητών ώστε να ικανοποιήσουν ταυτοτικά όσο το δυνατόν περισσότερες οριακές συνθήκες.

$$V = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \quad , \quad \nabla^2 V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Z''}{Z} + \frac{Y''}{Y} + \frac{X''}{X} = 0 \quad , \quad \lambda + \mu + \nu = 0$$

$$\underset{\lambda}{\shortparallel} \qquad \underset{\mu}{\shortparallel} \qquad \underset{\nu}{\shortparallel}$$

$$\mu < 0 \;,\; \nu < 0$$

$$\lambda = -(\mu+\nu) > 0$$

$$Y(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{b} y\right) , \quad X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$\sqrt{|\mu|}\, b = k\pi \quad , \quad \sqrt{|\nu|}\, a = n\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu = -\dfrac{k^2\pi^2}{b^2} \\ \nu = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\lambda_{kn} = \frac{k^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad , \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda_{kn} Z$$

$$Z(z) = e^{\pm\sqrt{\lambda_{kn}}\, z} \quad \Rightarrow \quad Z(z) = \sinh(\lambda_{kn} z)$$

$$Z(z=0) = 0$$

$$Y(0) = 0 , \quad Y(b) = 0 \quad , \quad X(0) = 0 \quad , \quad X(a) = 0$$

ικανοποιούνται λοιπόν οι πέντε από τις έξι οριακές συνθήκες.

η γενική μορφή του δυναμικού είναι:

$$V(x,y,z) = \sum_{k,n} A_{kn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) \sinh(\ )_{kn}$$

τα A_{kn} προσδιορίζονται από την έκτη συν

$V(x,y,c) = V_0$

$$\sum_{k,n} A_{kn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) \sinh(\lambda_{kn} c) = V_0$$

$$A_{kn} \sinh(\lambda_{kn} c) = \frac{2}{a}\frac{2}{b} V_0 \int_0^a dx \int_0^b dy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}\right.$$

$$\frac{2}{b}\int_0^b \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) dy = \frac{2}{k\pi}\left[1-\cos k\pi\right]$$

$$A_{kn} = \frac{4V_0}{\pi^2} \frac{1}{\sinh(\lambda_{kn} c)} \frac{1}{kn} \left[1-\cos k\pi\right]\left[1-\cos n\pi\right.$$

$$\cos k\pi = \begin{cases} 0, & k = \text{άρτιος} \\ 2, & k = \text{περιττός} \end{cases}, \quad 1-\cos n\pi = \begin{cases} 0, & n = \text{άρ} \\ 2, & n = \text{περιτ} \end{cases}$$