ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Έλλειμμα μάζας και ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα του ατόμου

Ένα ισότοπο, το οποίο συμβολίζουμε με ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, έχει ατομικό αριθμό Z και μαζικό αριθμό A. Ο πυρήνας του ισοτόπου αποτελείται από Z πρωτόνια, A συνολικά νουκλεόνια και επομένως $(A - Z)$ νετρόνια.

Αν αθροίσουμε τις μάζες ηρεμίας Z πρωτονίων και $(A - Z)$ νετρονίων, θα βρούμε μια ολική μάζα μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας του πυρήνα του ισοτόπου ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

Αν m_{p} είναι η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου, m_{n} η μάζα ηρεμίας του νετρονίου και m_{X} η μάζα ηρεμίας του πυρήνα του ισοτόπου ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, ως *αληθές έλλειμμα μάζας* του πυρήνα του ισοτόπου ορίζεται η ποσότητα

$$\Delta m = Zm_{\mathrm{p}} + (A - Z)m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{X}}$$

Επειδή οι πίνακες δίνουν συνήθως τις ατομικές μάζες των ισοτόπων και όχι τις πυρηνικές, λαμβάνοντας δηλαδή υπόψη και τις μάζες των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα, η ποσότητα αυτή μπορεί να οριστεί και ως

$$\Delta M = Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{X}}$$

όπου m_{H} είναι η μάζα του *ατόμου* του υδρογόνου και M_{X} η μάζα του *ατόμου* του ισοτόπου ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

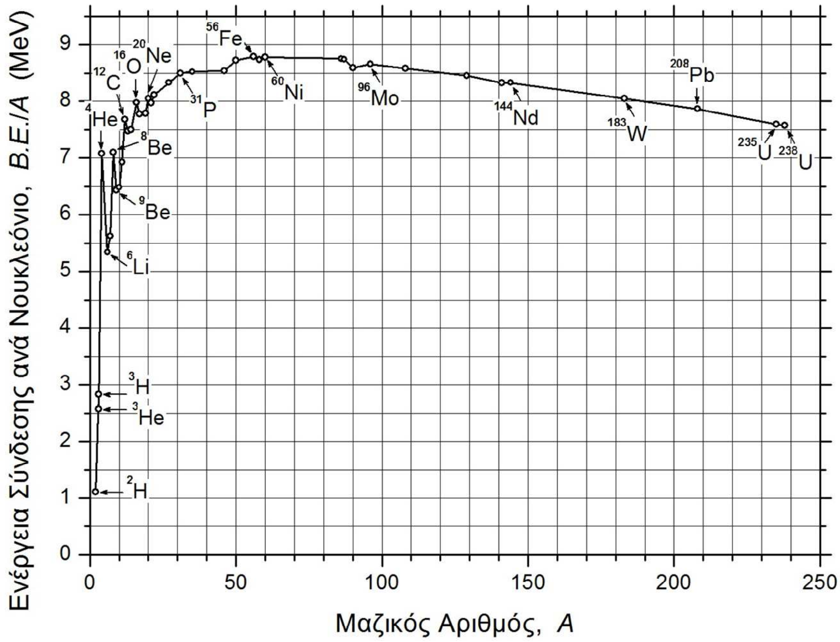
Το ενεργειακό ισοδύναμο του ΔM ονομάζεται *ενέργεια σύνδεσης* (*B.E.*, binding energy) του πυρήνα του ισοτόπου :

$$B.E. = \Delta M\, c^2 = \left[Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{X}} \right] c^2$$

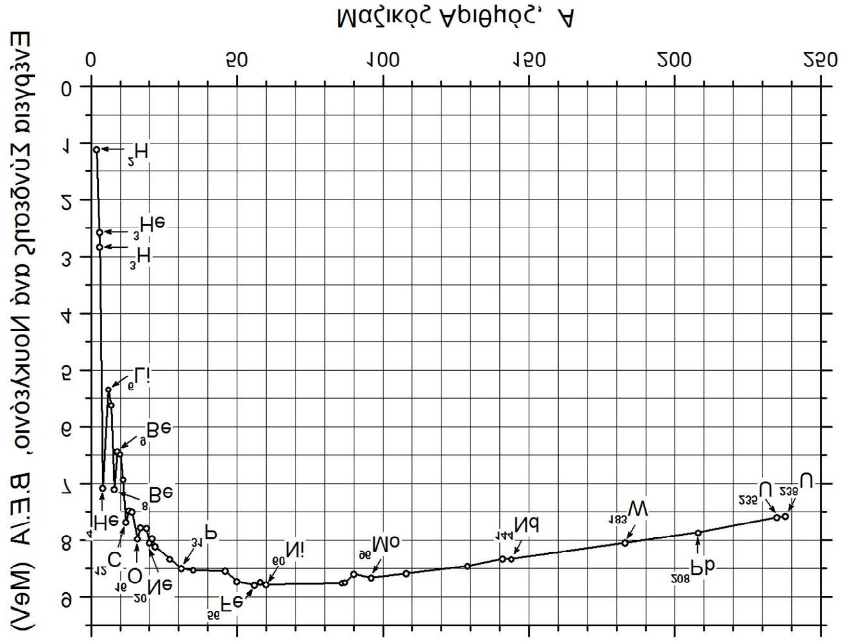
Έχει αγνοηθεί το γεγονός ότι οι ενέργειες σύνδεσης των Z ηλεκτρονίων στον πυρήνα του ισοτόπου ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ είναι μεγαλύτερες από ό,τι στο άτομο του υδρογόνου.

Το μέγεθος που συνήθως υπολογίζεται είναι η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο του πυρήνα,

$$\frac{B.E.}{A} = \frac{\Delta M\, c^2}{A}$$



Ενέργεια Σύνδεσης ανά Νουκλεόνιο, B.E./A (MeV)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
50
100
150
200
250
Μαζικός Αριθμός, A
2H
3He
3H
6Li
9Be
8Be
4He
12C
16O
20Ne
31P
56Fe
60Ni
96Mo
144Nd
183W
208Pb
235U
238U



Η μονάδα μέτρησης των μαζών των ατόμων είναι η *μονάδα ατομικής μάζας*, u.

Ορίζεται έτσι ώστε η μάζα ενός ουδέτερου ατόμου του ισοτόπου ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ να είναι ακριβώς ίση με 12 u.

Γνωρίζοντας ότι ένα mol ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ έχει μάζα 12 g και αποτελείται από έναν αριθμό ατόμων ίσο με τη σταθερά του Αβογκάντρο $N_{\mathrm{A}} = 6{,}022\,142 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ βρίσκουμε ότι είναι

$$1\ \mathrm{u} = 1{,}660\,539 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Από τη σχέση $E = mc^2$ βρίσκουμε το ενεργειακό ισοδύναμο της μονάδας u, ως

$$1\ \mathrm{u} \equiv 1{,}492\,418 \times 10^{-10}\ \mathrm{J} = 931{,}494\ \mathrm{MeV}$$

Σωματίδιο ή άτομο	Μάζα (u)	Μάζα (kg)	Ενεργειακό ισοδύναμο (MeV)	Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (MeV/νουκλεόνιο)
1 u	1	$1{,}660\,539 \times 10^{-27}$	931,494	–
e	0,000 548 6	$9{,}109\,382 \times 10^{-31}$	0,511	–
p	1,007 276	$1{,}672\,622 \times 10^{-27}$	938,272	–
n	1,008 665	$1{,}674\,927 \times 10^{-27}$	939,565	–
α	4,001 506	$6{,}644\,656 \times 10^{-27}$	3727,379	7,074
${}^{1}_{1}\mathrm{H}$	1,007 825	$1{,}673\,533 \times 10^{-27}$	938,783	–
${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ (D)	2,014 102		1876,124	1,112
${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ (T)	3,016 049		2809,432	2,827
${}^{4}_{2}\mathrm{He}$	4,002 603		3728,401	7,074
${}^{12}_{6}\mathrm{C}$	12,000 000	$1{,}992\,647 \times 10^{-26}$	11 177,93	7,680
${}^{16}_{8}\mathrm{O}$	15,994 915		14 899,17	7,976
${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$	55,934 939		52 103,06	8,790
${}^{58}_{28}\mathrm{Ni}$	57,935 347		53 966,43	8,732
${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$	59,930 786		55 825,17	8,781
${}^{90}_{36}\mathrm{Kr}$	89,919 517		83 759,49	8,591
${}^{141}_{56}\mathrm{Ba}$	140,914 411		131 260,9	8,326
${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$	207,976 64		193 729,0	7,867
${}^{235}_{92}\mathrm{U}$	235,043 925		218 942,0	7,591
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$	238,050 786	$395{,}292\,61 \times 10^{-27}$	221 742,9	7,570

Πυρηνικές αντιδράσεις και ενέργεια σύνδεσης

Με $A(a,b)B$ συμβολίζεται η πυρηνική αντίδραση $A + a \to B + b + Q$.
Ο πυρήνας A βομβαρδίζεται με ένα σωματίδιο a, παράγοντας ένα νέο πυρήνα B και ένα σωματίδιο b.
$Q = \Delta M\, c^2$ είναι η ενέργεια που εκλύεται συνολικά κατά την αντίδραση

Έκλυση ενέργειας σε πυρηνικές αντιδράσεις

Εξώθερμες			*Ενδόθερμες*	
Αντίδραση	Q (MeV)		Αντίδραση	Q (MeV)
$^{2}H(n,\gamma)^{3}H$	+6,26		$^{7}Li(p,n)^{7}Be$	−1,65
$^{6}Li(d,\alpha)^{4}He$	+22,17		$^{9}Be(\gamma,n)^{8}Be$	−1,67
$^{9}Be(p,\alpha)^{6}Li$	+2,25		$^{14}N(\alpha,p)^{17}O$	−1,15
$^{10}B(d,n)^{11}C$	+6,38		$^{18}O(p,n)^{18}F$	−2,45
$^{14}N(n,\gamma)^{15}N$	+10,83		$^{28}Si(\alpha,p)^{31}P$	−2,25

Παράδειγμα 6.1 Η ενέργεια σύνδεσης του δευτερονίου
Το δευτερόνιο (d) είναι ο πυρήνας του Δευτερίου (D), ενός ισοτόπου του Υδρογόνου (H), και αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο. Να βρεθεί η ενέργεια σύνδεσης του δευτερονίου.

Η αντίδραση «σχηματισμού» ενός δευτερονίου είναι $\mathrm{p} + \mathrm{n} \to \mathrm{d} + \Delta E$
όπου $\Delta E = Q$ είναι η ενέργεια σύνδεσης του δευτερονίου και εκλύεται κατά τον σχηματισμό του.

Το έλλειμμα μάζας του δευτερονίου είναι $\Delta M = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{d}} = 0{,}002\,388\ \mathrm{u}$

Η διατήρηση της μάζας-ενέργειας δίνει: $m_{\mathrm{p}}c^2 + m_{\mathrm{n}}c^2 = m_{\mathrm{d}}c^2 + \Delta E$

Οι μάζες των σωματιδίων είναι:

$$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,276\ \mathrm{u} = 938{,}272\ \mathrm{MeV}/c^2$$
$$m_{\mathrm{n}} = 1{,}008\,665\ \mathrm{u} = 939{,}565\ \mathrm{MeV}/c^2$$

Αθροίζοντας, $m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{n}} = 1877{,}837\ \mathrm{MeV}/c^2$

Επίσης, $m_{\mathrm{d}} = 2{,}013\,553\ \mathrm{u} = 1875{,}613\ \mathrm{MeV}/c^2$

Η διαφορά είναι ίση με $\Delta E = \Delta M\, c^2 = 2{,}224\ \mathrm{MeV}$

που αντιστοιχεί σε 1,112 MeV/νουκλεόνιο.

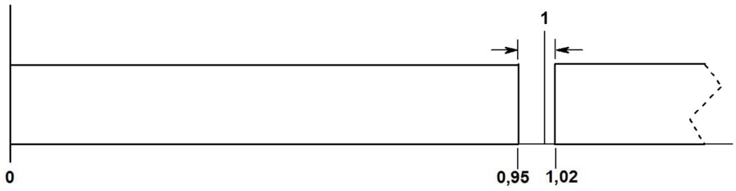
[Την ίδια τιμή βρίσκουμε από τη σχέση

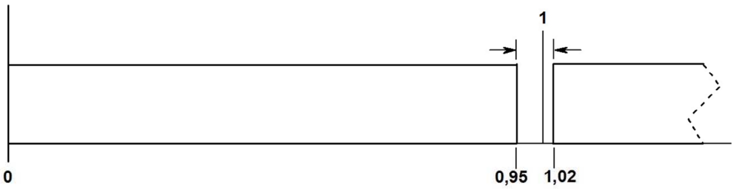
$$\Delta E = \Delta M c^2 = (0{,}002\,388\ \mathrm{u}) \times (931{,}5\ \mathrm{MeV/u}) = 2{,}224\ \mathrm{MeV}$$.]

Η ενέργεια σύνδεσης του δευτερονίου, εξαρτώμενη μόνο από τις ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις, μάς δίνει μια εκτίμηση για την ένταση αυτής της δύναμης ανάμεσα σε ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο.

Αν η ισχυρή πυρηνική δύναμη ήταν 5% ασθενέστερη, το δευτερόνιο δεν θα ήταν ευσταθές.

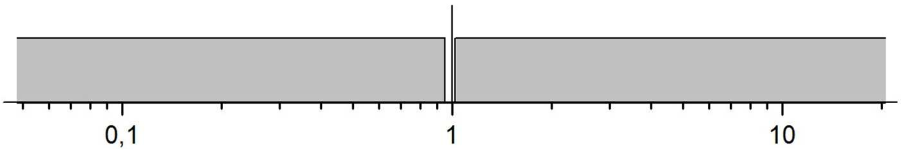
Αν δεν υπήρχε το δευτερόνιο, η σύνθεση βαρύτερων πυρήνων στα άστρα δεν θα ήταν δυνατή και η δημιουργία ζωής θα ήταν αδύνατη.





Αν η ισχυρή πυρηνική δύναμη ήταν 2% ισχυρότερη, θα ήταν δυνατή η σύνθεση *διπρωτονίου* (pp) στα άστρα με τεράστιο ρυθμό. Η διάσπασή του σε δευτερόνιο θα μετέτρεπε το ${}^{1}\mathrm{H}$ σε ${}^{2}\mathrm{H}$ πολύ γρήγορα.

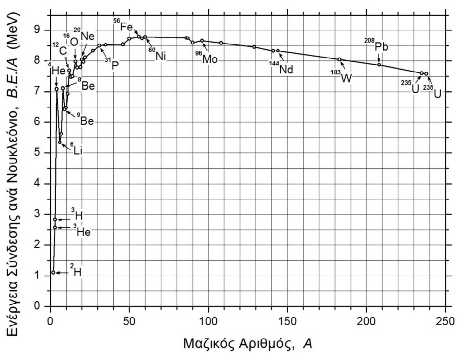
Η παραγωγή ενέργειας στα άστρα δεν θα συνέβαινε με αρκετά αργό ρυθμό για να αναπτυχθεί ζωή!



Βλ. C.P.W. Davies, “*The Accidental Universe*”, C.U.P.

Παράδειγμα 6.2 Πυρηνική σχάση

Ένας πυρήνας ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, βομβαρδιζόμενος με ένα θερμικό νετρόνιο, υφίσταται σχάση σε ${}^{141}_{56}\mathrm{Ba}$, ${}^{92}_{36}\mathrm{Kr}$ και 3 νετρόνια. Να βρεθεί πόση ενέργεια εκλύεται.



Η πυρηνική αντίδραση είναι η

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3{}^{1}_{0}\mathrm{n} + Q $$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η

η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για το ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ είναι περίπου 7,6 MeV/νουκλεόνιο, ενώ για τα ${}^{141}_{56}\mathrm{Ba}$ και ${}^{92}_{36}\mathrm{Kr}$ είναι περίπου 8,5 MeV/νουκλεόνιο. Η ολική ενέργεια που εκλύεται κατά τη σχάση, είναι

Q = (Αριθμός νουκλεονίων, A) $\times$(Διαφορά στις ενέργειες σύνδεσης ανά νουκλεόνιο)

$Q = 235\times(8{,}5 - 7{,}6) = 212$ MeV ανά σχάση.

Εναλλακτική λύση

Από την αντίδραση $\,^{235}_{92}\mathrm{U} + \,^{1}_{0}\mathrm{n} \to \,^{141}_{56}\mathrm{Ba} + \,^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,^{1}_{0}\mathrm{n} + Q$

Το έλλειμμα μάζας είναι:

$$\Delta m = m\left(\,^{235}_{92}\mathrm{U}\right) + m\left(\,^{1}_{0}\mathrm{n}\right) - m\left(\,^{141}_{56}\mathrm{Ba}\right) - m\left(\,^{92}_{36}\mathrm{Kr}\right) - 3m\left(\,^{1}_{0}\mathrm{n}\right)$$

ή

$$\Delta m = 235{,}043\,930 + 1{,}008\,665 - 140{,}914\,411 - 91{,}926\,156 - 3 \times 1{,}008\,665$$

$$\Delta m = 0{,}186\,033\ \mathrm{u}$$

Το ενεργειακό ισοδύναμο αυτού του ελλείμματος μάζας είναι

$$Q = \Delta m c^2 = 173\ \mathrm{MeV}\ \text{ανά σχάση}$$

Η διαφορά της τιμής αυτής από την προηγούμενη λύση οφείλεται στην ανακρίβεια των ενεργειών σύνδεσης ανά νουκλεόνιο, όπως τις διαβάσαμε από το σχήμα.

Άσκηση XX Πόση μάζα $\,^{235}_{92}\mathrm{U}$ πρέπει να υποστεί σχάση για την παραγωγή θερμικής ενέργειας ίσης με 1 GW σε μια ημέρα; Κατά τη σχάση ενός πυρήνα $\,^{235}_{92}\mathrm{U}$ εκλύεται ενέργεια περίπου ίση με 220 MeV.

ΛΥΣΗ

Η ισχύς του 1 GW για μια ημέρα ισοδυνεμεί με συνολική ενέργεια

$$W = 24 \times 60 \times 60 \times 10^9 = 8{,}64 \times 10^{11}\ \mathrm{J} = \left(8{,}64 \times 10^{13}\right) \Big/ \left(1{,}602 \times 10^{-19}\right) = 5{,}4 \times 10^{32}\ \mathrm{eV}$$

Ο απαιτούμενος αριθμός σχάσεων για να εκλυθεί αυτή η ενέργεια είναι

$$N = \left(5{,}4 \times 10^{32}\ \mathrm{eV}\right) \Big/ \left(2{,}2 \times 10^{8}\ \mathrm{eV/σχάση}\right) = 2{,}5 \times 10^{24}\ \text{σχάσεις}$$

Η μάζα ενός ατόμου του $\,^{235}_{92}\mathrm{U}$ έχει μάζα ίση με

$$m\left(\,^{235}_{92}\mathrm{U}\right) = \left(235{,}044\ \mathrm{u}\right) \times \left(1{,}661 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}\right) = 3{,}9 \times 10^{-25}\ \mathrm{kg}$$

Η ολική μάζα $\,^{235}_{92}\mathrm{U}$ που πρέπει να υποστεί σχάση είναι, επομένως,

$$M = N \times m\left(\,^{235}_{92}\mathrm{U}\right) = \left(2{,}5 \times 10^{24}\right) \times \left(3{,}9 \times 10^{-25}\right) = 0{,}976\ \mathrm{kg} \approx 1\ \mathrm{kg}$$

Ένας συμβατικός σταθμός που χρησιμοποιεί άνθρακα για καύσιμο θα χρειαζόταν, για την ίδια ποσότητα ενέργειας, 10 000 τόνους άνθρακα.

Παράδειγμα 6.3 Πυρηνική σύντηξη. Παραγωγή ενέργειας στα άστρα

Οι αντιδράσεις πυρηνικής σύντηξης στο εσωτερικό ενός άστρου είναι οι εξής:

(1) $\quad {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{d} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}} + 0,420 \text{ MeV}$

(2) $\quad {}^{2}_{1}\mathrm{d} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He}^{2-} + \gamma + 5,493 \text{ MeV}$

(3) $\quad {}^{3}_{2}\mathrm{He}^{2-} + {}^{3}_{2}\mathrm{He}^{2-} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2-} + 2\,{}^{1}_{1}\mathrm{p} + 12,860 \text{ MeV}$

Σε ένα πλήρη κύκλο, αποτελούμενο από 2 αντιδράσεις (1), 2 αντιδράσεις (2) και μία αντίδραση (3) πόση ενέργεια εκλύεται;

Ένας πλήρης κύκλος αποτελείται από τις εξής αντιδράσεις:

$2\times$ (1) $\quad 2\,{}^{1}_{1}\mathrm{p} + 2\,{}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow \cancel{2\,{}^{2}_{1}\mathrm{d}} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}} + 0,840 \text{ MeV}$

$2\times$ (2) $\quad \cancel{2\,{}^{2}_{1}\mathrm{d}} + \cancel{2\,{}^{1}_{1}\mathrm{p}} \rightarrow \cancel{2\,{}^{3}_{2}\mathrm{He}^{2-}} + 2\gamma + 10,986 \text{ MeV}$

$1\times$ (3) $\quad \cancel{2\,{}^{3}_{2}\mathrm{He}^{2-}} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2-} + \cancel{2\,{}^{1}_{1}\mathrm{p}} + 12,860 \text{ MeV}$

Προσθέτοντας: $\quad 4\,{}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2-} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}} + 2\gamma + 24,686 \text{ MeV}$

δηλαδή το ολικό αποτέλεσμα είναι η σύντηξη τεσσάρων πρωτονίων για τη δημιουργία ενός πυρήνα ηλίου, 2 ποζιτρονίων, 2 νετρίνων και 2 ακτίνων γ, με ταυτόχρονη έκλυση 24,7 MeV ενέργεια. Με αυτόν τον μηχανισμό, το υδρογόνο ενός άστρου μετατρέπεται σε ήλιο, παράγοντας ενέργεια.

$$4{}_1^1\mathrm{p} \to {}_2^4\mathrm{He}^{2-} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu_\mathrm{e} + 2\gamma + 24,686\ \mathrm{MeV}$$

Η μεταβολή στη μάζα είναι

$$\Delta m = 4m\left({}_1^1\mathrm{p}\right) - m\left({}_2^4\mathrm{He}^{2-}\right) - 2m_e = 4m\left({}_1^1\mathrm{p}\right) - m\left({}_2^4\mathrm{He}^2 - 2\mathrm{e}\right) - 2m_e =$$
$$= 4m\left({}_1^1\mathrm{p}\right) - \left({}_2^4\mathrm{He}^2\right) = 4\times 1,007\,276 - 4,002\,603 = 0,0265\ \mathrm{u}$$

όπου ελήφθη υπόψη το ότι ο πυρήνας του ηλίου, ${}_2^4\mathrm{He}^{2-}$, έχει μάζα ίση με τη μάζα του ουδέτερου ατόμου μείον τη μάζα δύο ηλεκτρονίων.

Αυτή η μεταβολή στη μάζα ισοδυναμεί με ενέργεια

$$\Delta m c^2 = 24,686\ \mathrm{MeV}$$

Ο πειραματικός έλεγχος της ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας σε πυρηνικές αντιδράσεις

Πυρηνική Αντίδραση	Έλλειμμα Μάζας ΔM (u)	Απελευθερωνόμενη Ενέργεια	
		Θεωρητική ΔMc^2 (MeV)	Πειραματική Q (MeV)
${}_4^9\mathrm{Be} + {}_1^1\mathrm{H} \to {}_3^6\mathrm{Li} + {}_2^4\mathrm{He}$	0,00242	2,25	2,28
${}_3^6\mathrm{Li} + {}_1^2\mathrm{H} \to {}_2^4\mathrm{He} + {}_2^4\mathrm{He}$	0,02381	22,17	22,20
${}_5^{10}\mathrm{B} + {}_1^2\mathrm{H} \to {}_6^{11}\mathrm{C} + {}_0^1\mathrm{n}$	0,00685	6,38	6,08
${}_7^{14}\mathrm{N} + {}_1^2\mathrm{H} \to {}_6^{12}\mathrm{C} + {}_2^4\mathrm{He}$	0,01436	13,37	13,40
${}_7^{14}\mathrm{N} + {}_2^4\mathrm{He} \to {}_8^{17}\mathrm{O} + {}_1^1\mathrm{H}$	− 0,00124	− 1,15	− 1,16
${}_{14}^{28}\mathrm{Si} + {}_2^4\mathrm{He} \to {}_{15}^{31}\mathrm{P} + {}_1^1\mathrm{H}$	− 0,00242	− 2,25	− 2,23

Άσκηση XX Δείξετε ότι, ενεργειακά, ο πυρήνας του ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ μπορεί να διασπαστεί εκπέμποντας ένα ηλεκτρόνιο. Δίνονται οι μάζες των ατόμων: $m\left({}^{60}_{27}\mathrm{Co}\right) = 59{,}93382\ \mathrm{u}$, $m\left({}^{60}_{28}\mathrm{Ni}\right) = 59{,}93079\ \mathrm{u}$.

ΛΥΣΗ

Όταν ο πυρήνας εκπέμψει ένα ηλεκτρόνιο, ο αριθμός των νετρονίων του μειώνεται κατά μία μονάδα και ο αριθμός των πρωτονίων του αυξάνει κατά μία μονάδα. Η διάσπαση θα δώσει επομένως έναν πυρήνα ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$,

σύμφωνα με τη διάσπαση: ${}^{60}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni}^{-} + \mathrm{e}$

Το άτομο του ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$ θα είναι απλά ιονισμένο γιατί του λείπει ένα τροχιακό ηλεκτρόνιο. Αν χρησιμοποιήσουμε τις μάζες των ατόμων, η μείωση στη μάζα θα είναι

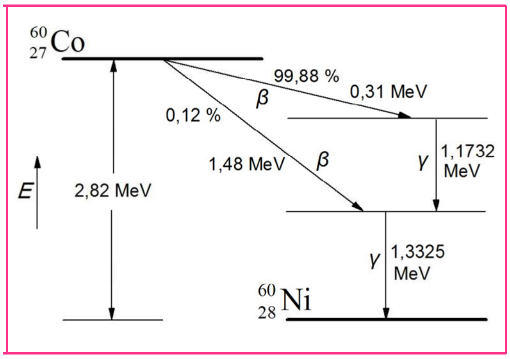
$$\Delta m = m\left({}^{60}_{27}\mathrm{Co}\right) - m\left({}^{60}_{28}\mathrm{Ni}^{-}\right) - m_{\mathrm{e}} = m\left({}^{60}_{27}\mathrm{Co}\right) - m\left({}^{60}_{28}\mathrm{Ni}\right) =$$

$$= 59{,}93382\ \mathrm{u} - 59{,}93079\ \mathrm{u} = 0{,}00303\ \mathrm{u}$$

Το ενεργειακό ισοδύναμο αυτής της μάζας είναι

$$\Delta E = \Delta m c^2 = \left(0{,}00303\ \mathrm{u}\right) \times \left(931{,}5\ \mathrm{MeV/u}\right) = 2{,}82\ \mathrm{MeV}$$

άρα η εκπομπή ηλεκτρονίου από το ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ είναι ενεργειακά δυνατή.



Από πίνακες βρίσκουμε ότι το ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ πράγματι διασπάται, με χρόνο υποδιπλασιασμού 5,27 έτη εκπέμποντας ένα σωματίδιο β.

Στις 99,88% των περιπτώσεων εκπέμπεται ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια 0,31 MeV, ακολουθούμενο από δύο φωτόνια με ενέργειες 1,1732 MeV και, 1,3325 MeV, αντίστοιχα.
Η ολική ενέργεια που εκλύεται είναι 0,31 + 1,1732 + 1,3325 = 2,82 MeV.

Στις υπόλοιπες 0,12% των περιπτώσεων εκπέμπεται ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια 1,48 MeV, ακολουθούμενο από ένα φωτόνιο, με ενέργεια 1,3325 MeV. Η ολική ενέργεια που εκλύεται είναι 1,48 + 1,3325 = 2,81 MeV.

Και στις δύο περιπτώσεις οι πειραματικά μετρούμενες εκλυόμενες ενέργειες βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με την πρόβλεψη που βασίζεται στις μάζες των ατόμων.

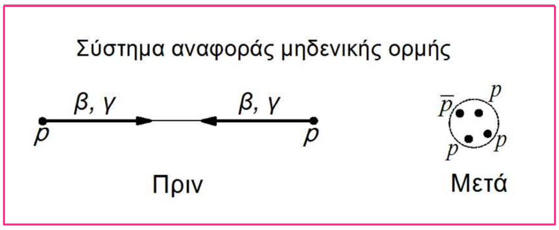
Ενέργεια κατωφλίου

Η ενέργεια κατωφλίου είναι η μικρότερη δυνατή ενέργεια που πρέπει να είναι διαθέσιμη για να επιτρέπεται να συμβεί μια κάποια αντίδραση.

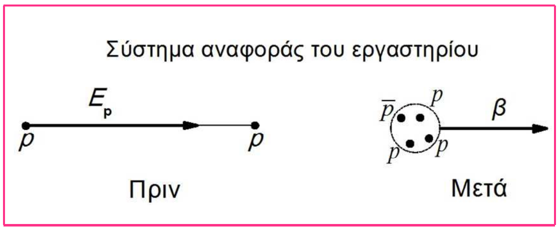
Οι υπολογισμοί απλοποιούνται σημαντικά αν η ανάλυση γίνει στο σύστημα μηδενικής ορμής των αντιδρώντων σωματιδίων. Στο σύστημα αυτό, η ολική ορμή πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται και όταν τα προϊόντα μιας αντίδρασης είναι ακίνητα. Επομένως, η διαθέσιμη ενέργεια είναι μέγιστη σε αυτή την περίπτωση.

Στο σύστημα μηδενικής ορμής, αν τα προϊόντα μιας αντίδρασης είναι ακίνητα, είμαστε σίγουροι ότι η διαθέσιμη ενέργεια μόλις που κατόρθωσε να τα δημιουργήσει. Αυτή θα είναι επομένως και η ενέργεια κατωφλίου, στο σύστημα αυτό, για τη συγκεκριμένη αντίδραση.

Στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής, όταν η κινητική ενέργεια που είναι διαθέσιμη είναι ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα προϊόντα της αντίδρασης θα είναι ακίνητα. Συνεπώς,



Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, όταν η κινητική ενέργεια που είναι διαθέσιμη είναι ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα προϊόντα της αντίδρασης θα κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα.



Παράδειγμα 6.5
Ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή αντιπρωτονίου

Κατά την πρόσπτωση ενός πρωτονίου σε ένα άλλο ακίνητο πρωτόνιο, δείξετε ότι η ενέργεια κατωφλίου (ελάχιστη κινητική ενέργεια) για την αντίδραση παραγωγής ζεύγους πρωτονίου-αντιπρωτονίου,

$$p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$$

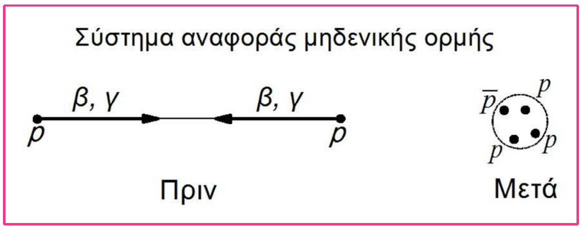
είναι ίση με $6m_{\mathrm{p}}c^2$, όπου m_{p} είναι η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου και του αντιπρωτονίου.

Θα λύσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους.
Πρώτα στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής (ΣΑΜΟ) και μετά στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (ΣΑΕ).

(α) Στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής

Στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής τα δύο αρχικά πρωτόνια έχουν ίσες και αντίθετες ορμές και επομένως και ίσες και αντίθετες ταχύτητες, στις οποίες αντιστοιχεί ο ίδιος παράγοντας Λόρεντς, γ.

Αν η διαθέσιμη ενέργεια είναι η ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που προκύπτουν από τη σύγκρουση θα είναι ακίνητα στο ΣΑΜΟ.



Η διατήρηση της ενέργειας δίνει: $2m_{\mathrm{p}}c^2\gamma = 4m_{\mathrm{p}}c^2$

Επομένως, $\gamma = 2$ και $|\beta| = \sqrt{1-1/\gamma^2} = \sqrt{1-1/4} = \sqrt{3}/2$

Επειδή το πρωτόνιο, που ήταν αρχικά ακίνητο στο ΣΑΕ, έχει ταχύτητα $-\left(\sqrt{3}/2\right)c$ στο ΣΑΜΟ, η ταχύτητα του ΣΑΕ ως προς το ΣΑΜΟ είναι

$$\upsilon = \left(\sqrt{3}/2\right)c$$

Μετασχηματίζουμε την ταχύτητα του πρωτονίου που κινείται στο ΣΑΕ, και έχει ταχύτητα στο ΣΑΜΟ ίση με $\upsilon = \left(\sqrt{3}/2\right)c$, από το ΣΑΜΟ στο ΣΑΕ.

$$\upsilon' = \frac{\upsilon - V}{1-(\upsilon V)/c^2} = c\frac{\sqrt{3}/2-\left(-\sqrt{3}/2\right)}{1+\left(\sqrt{3}/2\right)^2} = c\frac{4\sqrt{3}}{7} \qquad \Rightarrow \qquad \beta' = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Στο ΣΑΕ, ο παράγοντας Λόρεντς του κινούμενου πρωτονίου είναι, επομένως,

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(4\sqrt{3}/7\right)^2}} = \frac{7}{\sqrt{49-48}} = 7$$

Επομένως, η ολική ενέργεια του προσπίπτοντος πρωτονίου είναι

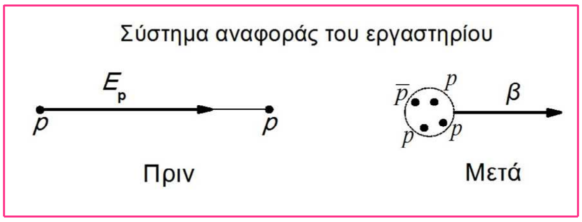
$$E_\text{p} = 7m_\text{p}c^2$$

και η ενέργεια κατωφλίου (η κινητική του ενέργεια) είναι $K_\text{p} = 6m_\text{p}c^2$

(β) Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου

Για διαθέσιμη ενέργεια ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που παράγονται θα είναι ακίνητα στο σύστημα μηδενικής ορμής.

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, επομένως, όλα τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έστω , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Έτσι, έχουμε,

διατήρηση της ενέργειας: $\quad E_\text{p} + m_\text{p}c^2 = 4m_\text{p}c^2\gamma \qquad (1)$

διατήρηση της ορμής: $\quad p_\text{p}c = \sqrt{E_\text{p}^2 - \left(m_\text{p}c^2\right)^2} = 4m_\text{p}c^2\beta\gamma \qquad (2)$

όπου E_p και p_p είναι η ενέργεια και ορμή, αντίστοιχα, του προσπίπτοντος πρωτονίου.

Η Εξ. (1) δίνει $E_{\mathrm{p}}^2 = \left(m_{\mathrm{p}}c^2\right)^2 (4\gamma - 1)^2$

και η (2) $E_{\mathrm{p}}^2 = 16\left(m_{\mathrm{p}}c^2\right)^2 \beta^2\gamma^2 + \left(m_{\mathrm{p}}c^2\right)^2$

Επομένως, $\left(m_{\mathrm{p}}c^2\right)^2 (4\gamma - 1)^2 = 16\left(m_{\mathrm{p}}c^2\right)^2 \beta^2\gamma^2 + \left(m_{\mathrm{p}}c^2\right)^2$

και $(4\gamma - 1)^2 = 16\beta^2\gamma^2 + 1, \qquad 16\gamma^2 - 8\gamma + \cancel{1} = 16\beta^2\gamma^2 + \cancel{1}$

$$\gamma = 2\gamma^2\left(1 - \beta^2\right), \qquad \gamma = 2$$

Από την Εξ. (1) προκύπτει ότι $E_{\mathrm{p}} = 7m_{\mathrm{p}}c^2$

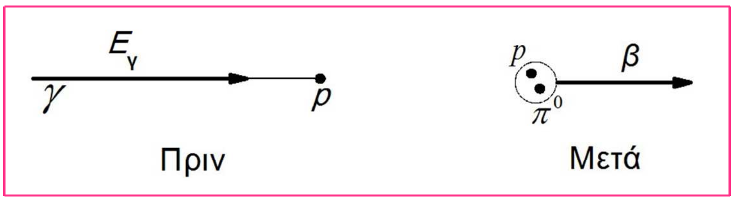
και η ενέργεια κατωφλίου (η κινητική ενέργεια) είναι $K_{\mathrm{p}} = 6m_{\mathrm{p}}c^2$.

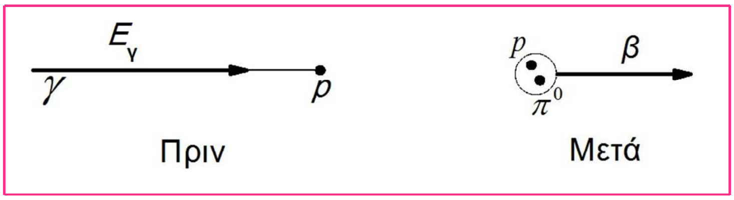
Παράδειγμα 6.6 Ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή π^0

Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή πιονίου κατά τη σύγκρουση φωτονίου με ακίνητο πρωτόνιο, $\gamma + p \to p + \pi^0$;

Δίνονται οι ενέργειες ηρεμίας των σωματιδίων p και π^0 ως 938 και 139 MeV, αντίστοιχα.

Για διαθέσιμη ενέργεια ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που παράγονται θα είναι ακίνητα στο σύστημα μηδενικής ορμής. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, επομένως, όλα τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έστω βc , όπως φαίνεται στο σχήμα.





Έτσι, έχουμε,

διατήρηση της ενέργειας: $E_\gamma + m_\mathrm{p}c^2 = \left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)\gamma$ (1)

διατήρηση της ορμής: $\dfrac{E_\gamma}{c} = \dfrac{\left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)}{c}\beta\gamma$ (2)

όπου E_γ και p_γ είναι η ενέργεια και ορμή, αντίστοιχα, του προσπίπτοντος φωτονίου.

Από τις δύο αυτές εξισώσεις, υψώνοντας στο τετράγωνο, προκύπτει ότι

$$\left(E_\gamma + m_\mathrm{p}c^2\right)^2 = \left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)^2\gamma^2 \qquad E_\gamma^2 = \left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)^2\beta^2\gamma^2$$

Αφαιρώντας, και επειδή είναι $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$, έχουμε

$$\left(E_\gamma + m_\mathrm{p}c^2\right)^2 - E_\gamma^2 = \left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)^2$$

ή

$$2m_\mathrm{p}c^2E_\gamma + \left(m_\mathrm{p}c^2\right) = \left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)^2$$

Επομένως, $$E_\gamma = \frac{\left(m_\mathrm{p}c^2 + m_\pi c^2\right)^2 - \left(m_\mathrm{p}c^2\right)}{2m_\mathrm{p}c^2}$$

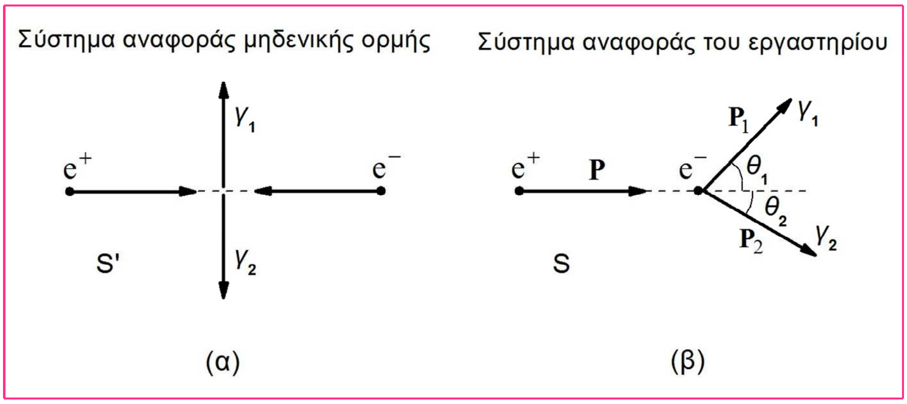
και, τελικά,

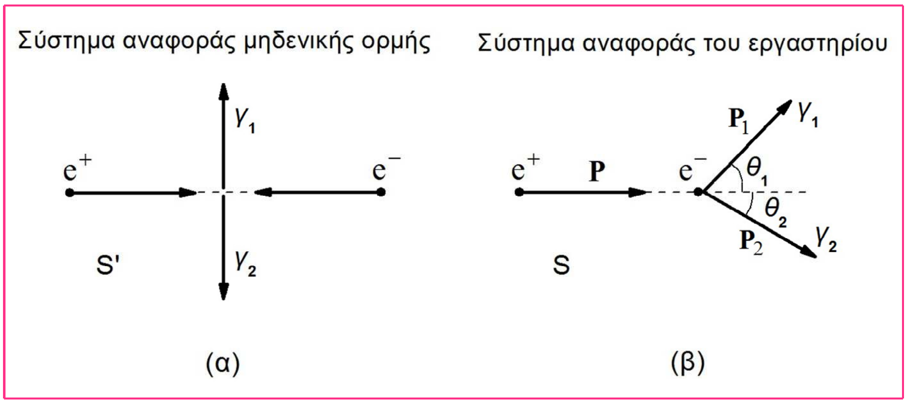
$$E_\gamma = m_\pi c^2\left(1 + \frac{m_\pi}{2m_\mathrm{p}}\right)$$

Αντικαθιστώντας, $$E_\gamma = 139 \times \left(1 + \frac{139}{938}\right) = 160\ \text{MeV}$$

Ασκηση 6.7 Ένα ποζιτρόνιο, e^+, με μάζα ηρεμίας m και ταχύτητα ίση με υ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, προσκρούει σε ένα ηλεκτρόνιο, e^-, που έχει την ίδια μάζα ηρεμίας m και είναι ακίνητο.

Τα δύο σωματίδια εξαϋλώνονται, με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν δύο φωτόνια, γ_1 και γ_2, τα οποία στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής, κινούνται σε διεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση κίνησης του ποζιτρονίου και του ηλεκτρονίου [Σχ. (α)].

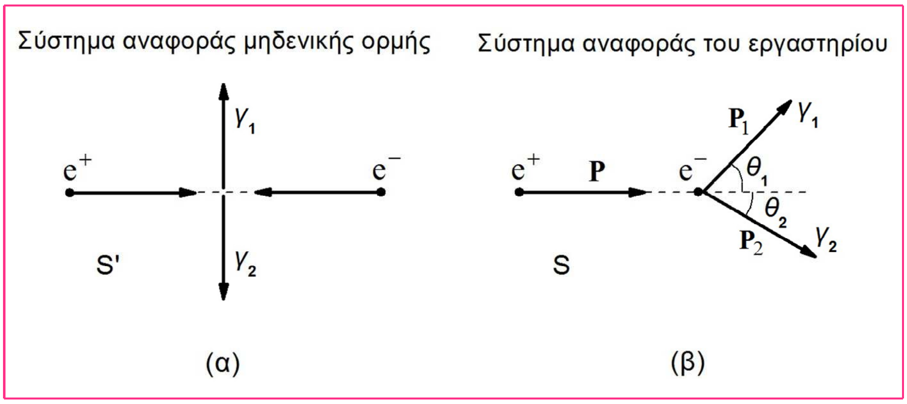




Έστω ότι $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$ είναι τα διανύσματα των ορμών του ποζιτρονίου και των δύο φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, αντίστοιχα, και θ_1 και θ_2 οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$ με το διάνυσμα $\mathbf{P}$ [Σχ. (β)].

(α) Αποδείξετε ότι είναι $|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2|$ και $\theta_1 = \theta_2$.

(β) Υπολογίστε τη γωνία $\theta = \theta_1 + \theta_2$ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$ ως συνάρτηση των μεγεθών υ και m.



ΛΥΣΗ

(α) Στο σύστημα του κέντρου μάζας $\mathbf{P}_1' + \mathbf{P}_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1' = P_2' \equiv P'$.

Επομένως και $E_1' = E_2' = cP'$

Αν πάρουμε την ορμή $\mathbf{P}_1'$ κατά μήκος του άξονα των y, θα έχουμε:

$$\mathbf{P}_1' = P'\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{P}_2' = -P'\hat{\mathbf{y}}$$

Από τους μετασχηματισμούς ορμής-ενέργειας έχουμε

$$P_{1x} = \gamma\left(P_{1x}' + \frac{\beta}{c}E_1'\right) = \beta\gamma P', \qquad P_{1y} = P_{1y}' = P', \qquad P_{1z} = 0$$

$$P_{2x} = \gamma\left(P_{2x}' + \frac{\beta}{c}E_2'\right) = \beta\gamma P', \qquad P_{2y} = P_{2y}' = -P', \qquad P_{2z} = 0$$

και, επομένως, $|\mathbf{P}_1| = \sqrt{P_{1x}^2 + P_{1y}^2} = P'\sqrt{\gamma^2\beta 2 + 1} = \gamma P'$

$$|\mathbf{P}_2| = \sqrt{P_{2x}^2 + P_{2y}^2} = P'\sqrt{\gamma^2\beta 2 + 1} = \gamma P'$$

$$\tan\theta_1 = \frac{P_{1y}}{P_{1x}} = \frac{P'}{\gamma\beta P'} = \frac{1}{\gamma\beta} \qquad \tan\theta_2 = \frac{|P_{2y}|}{P_{2x}} = \frac{P'}{\gamma\beta P'} = \frac{1}{\gamma\beta}$$

Έτσι, είναι $|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2|$ και $\theta_1 = \theta_2$.

(β) Από τις θ_1 και θ_2 βρίσκουμε

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{2\tan\theta_1}{1 - \tan^2\theta_1} = \frac{2/\gamma\beta}{1 - 1/\gamma^2\beta^2} = \frac{2\gamma\beta}{\gamma^2\beta^2 - 1} = \frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\beta - 1/2}$$

Άσκηση 5.14

Εξηγήστε γιατί τα ακόλουθα είναι αδύνατο να συμβούν:

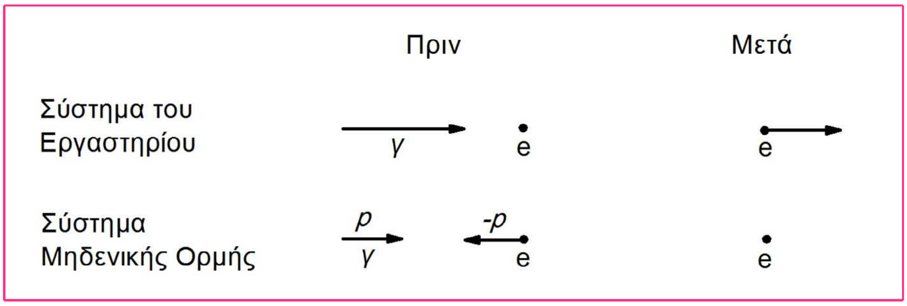
(α) Ένα φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, και του δίνει όλη του την ενέργεια.

(β) Ένα μεμονωμένο φωτόνιο μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. (Το ποζιτρόνιο είναι το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου.)

(γ) Ένα κινούμενο ποζιτρόνιο συγκρούεται με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο, και τα δύο εξαϋλώνονται παράγοντας ένα μόνο φωτόνιο.

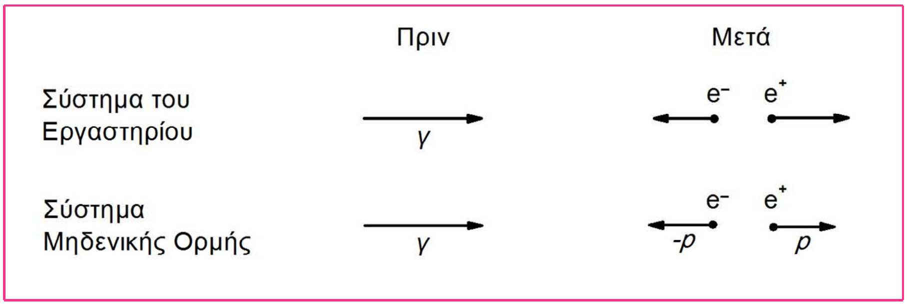
ΛΥΣΗ

(α) *Ένα φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, και του δίνει όλη του την ενέργεια.*



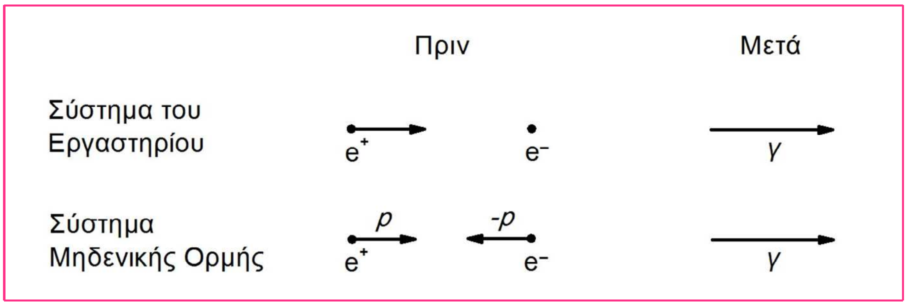
Στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής, για να διατηρείται η ορμή, θα πρέπει το ηλεκτρόνιο να είναι ακίνητο μετά την κρούση. Πριν όμως από την κρούση, στο ίδιο σύστημα, εκτός από το φωτόνιο υπήρχε και ένα κινούμενο ηλεκτρόνιο. Προφανώς η ενέργεια δεν διατηρείται αφού ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο έχει λιγότερη ενέργεια από ένα κινούμενο ηλεκτρόνιο. Άρα το φαινόμενο είναι αδύνατο να συμβεί.

(β) *Ένα μεμονωμένο φωτόνιο μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.*



Μετά τη δίδυμη γένεση, στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο έχουν ίσες και αντίθετες ορμές. Στο ίδιο όμως σύστημα, υπήρχε πριν από τη δίδυμη γένεση ένα μοναδικό φωτόνιο, το οποίο προφανώς είχε κάποια ορμή. Αν συνέβαινε το φαινόμενο αυτό, θα είχαμε επομένως παραβίαση της αρχής της διατήρησης της ορμής.

(γ) *Ένα κινούμενο ποζιτρόνιο συγκρούεται με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο, και τα δύο εξαΰλώνονται παράγοντας ένα μόνο φωτόνιο.*



Πριν από την εξαΰλωση, στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο έχουν ίσες και αντίθετες ορμές. Στο ίδιο όμως σύστημα θα υπάρχει μετά την εξαΰλωση ένα μοναδικό φωτόνιο, το οποίο προφανώς είχε κάποια ορμή. Αν συνέβαινε το φαινόμενο αυτό, θα είχαμε επομένως παραβίαση της αρχής της διατήρησης της ορμής.