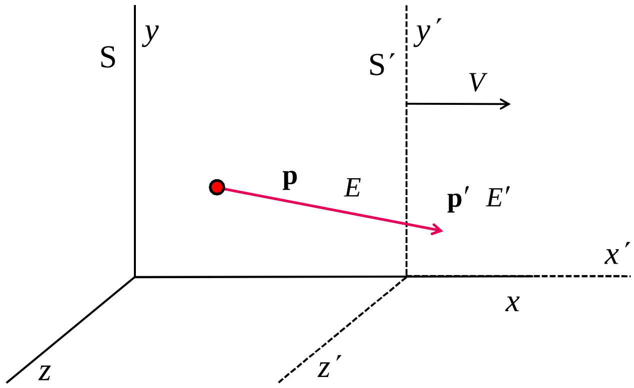
Ο μετασχηματισμός της ορμής και της ενέργειας

Ορμή $\mathbf{p}$ Ολική ενέργεια E $(p_x, p_y, p_z, E) \Leftrightarrow (p'_x, p'_y, p'_z, E')$



Ο μετασχηματισμός της ορμής και της ενέργειας

Για σωματίδιο: ορμή $\mathbf{p} = m_0 \gamma_\sigma \boldsymbol{\upsilon}$ ολική ενέργεια $E = m_0 \gamma_\sigma c^2$

$\gamma_\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ είναι ο παράγοντας Λόρεντς για το σωματίδιο.

Συνιστώσες

$$p_x = m_0 \gamma_\sigma \frac{dx}{dt}, \qquad p_y = m_0 \gamma_\sigma \frac{dy}{dt}, \qquad p_z = m_0 \gamma_\sigma \frac{dz}{dt}, \qquad \frac{E}{c^2} = m_0 \gamma_\sigma .$$

Αν στο εργαστήριο παρέλθει χρόνος ίσος με dt, το αντίστοιχο χρονικό διάστημα στο σύστημα του σωματιδίου (χρόνος ηρεμίας του σωματιδίου, ή ιδιοχρόνος), είναι $d\tau = dt/\gamma_\sigma$.

Στο σύστημα S:

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau}, \qquad p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}, \qquad p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau}, \qquad \frac{E}{c^2} = m_0 \frac{dt}{d\tau}.$$

Στο σύστημα S΄:

$$p'_x = m_0 \frac{dx'}{d\tau}, \qquad p'_y = m_0 \frac{dy'}{d\tau}, \qquad p'_z = m_0 \frac{dz'}{d\tau}, \qquad \frac{E'}{c^2} = m_0 \frac{dt'}{d\tau}.$$

Το μέγεθος $d\tau$ παραμένει αναλλοίωτο κατά τον μετασχηματισμό Λόρεντς Επομένως, τα μεγέθη p_x, p_y, p_z και E/c^2 μετασχηματίζονται όπως τα μεγέθη *x*, *y*, *z* και *t*, αντιστοίχως.

Η διαφορική μορφή του μετασχηματισμού του Λόρεντς είναι:

$$dx' = \gamma\left(dx - \beta c dt\right), \qquad dy' = dy, \qquad dz' = dz, \qquad dt' = \gamma\left(dt - (\beta/c)dx\right)$$

όπου $\beta = V/c$ και $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Πολλαπλασιάζοντας με $m_0 \dfrac{1}{d\tau}$

$$m_0 \frac{dx'}{d\tau} = \gamma\left(m_0 \frac{dx}{d\tau} - \beta c m_0 \frac{dt}{d\tau}\right), \qquad m_0 \frac{dy'}{d\tau} = m_0 \frac{dy}{d\tau}, \qquad m_0 \frac{dz'}{d\tau} = m_0 \frac{dz}{d\tau},$$

και
$$m_0 \frac{dt'}{d\tau} = \gamma\left(m_0 \frac{dt}{d\tau} - \frac{\beta}{c} m_0 \frac{dx}{d\tau}\right)$$

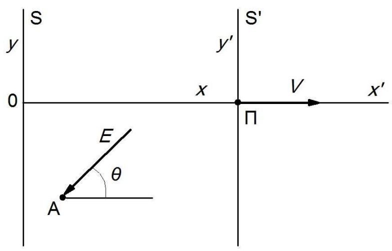
$$\boxed{p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E\right), \qquad p_y' = p_y, \qquad p_z' = p_z, \qquad E' = \gamma\left(E - c\beta p_x\right)}$$

τα μεγέθη p_x, p_y, p_z και E/c^2 μετασχηματίζονται όπως τα μεγέθη *x*, *y*, *z* και *t*, αντιστοίχως.

Παράδειγμα: Το Φαινόμενο Ντόπλερ

Πηγή φωτός Π κινείται με σταθερή ταχύτητα *V* κατά μήκος του άξονα των *x* στο σύστημα αναφοράς S. Η πηγή εκπέμπει, προς όλες τις κατευθύνσεις, φωτόνια τα οποία στο σύστημα αναφοράς S΄ της πηγής έχουν ενέργεια E_0 (και επομένως συχνότητα $f_0 = E_0/h$, και ορμή $p_0 = E_0/c$, στο S΄).

Στο επίπεδο *xy* βρίσκεται παρατηρητής Α, ακίνητος στο σύστημα S. Ο παρατηρητής βλέπει σε μια χρονική στιγμή φωτόνια από την πηγή να κινούνται προς αυτόν, πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει γωνία *θ* με τον άξονα των *x*, και τα οποία έχουν ενέργεια E ($p = E/c$, $f = E/h$) στο σύστημα του, S. Να βρεθούν:

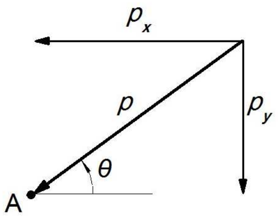


(α) Οι συνιστώσες της ορμής των φωτονίων στο S συναρτήσει των *E* και *θ*.

(β) Η συχνότητα των φωτονίων στο S.

Κ. Χριστοδουλίδης: Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

(α) Η ορμή ενός φωτονίου που έχει ενέργεια E είναι $p = E/c$. Επομένως, στο σύστημα S, οι συνιστώσες της ορμής του φωτονίου είναι:



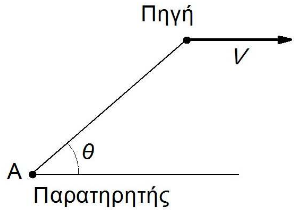
$$p_x = -\frac{E}{c}\cos\theta \qquad p_y = -\frac{E}{c}\sin\theta \qquad p_z = 0$$

(β) Στο σύστημα αναφοράς S έχουμε φωτόνια με συνιστώσα x της ορμής $p_x = -\frac{E}{c}\cos\theta$ και ενέργεια E. Επομένως, στο σύστημα αναφοράς της πηγής, S΄, η ενέργεια του φωτονίου είναι:

$$E_0 = E' = \gamma(E - p_x c\beta) = \gamma[E + (E/c)c\beta\cos\theta]$$

και επομένως $E_0 = E\gamma(1+\beta\cos\theta)$. Τελικά,

$$\frac{E}{E_0} = \boxed{\frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}} \qquad \text{όπου} \quad \beta = \frac{V}{c}$$



η γενική εξίσωση για το φαινόμενο Ντόπλερ.

Η ισοδυναμία μάζας και ενέργειας

Η σχέση $E = Mc^2$ περιγράφει μια ισοδυναμία μάζας και ενέργειας η οποία είναι εξαιρετικά σημαντική στη Φυσική.

Η διατηρούμενη ποσότητα E εμπεριέχει και ενέργεια την οποία το σώμα έχει ακόμη και όταν είναι ακίνητο, λόγω της μάζας ηρεμίας του.

Φαίνεται να υπάρχει μια ισοδυναμία ανάμεσα στη μάζα και την ενέργεια, η οποία επαληθεύεται και πειραματικά με πολλούς τρόπους.

Γενικά, μια μεταβολή Δm στη μάζα αντιστοιχεί σε μεταβολή ΔE στην ενέργεια, και αντιστρόφως, όπου τα δύο μεγέθη συνδέονται μέσω της σχέσης

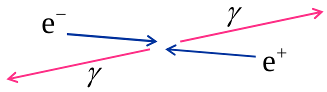
$$\boxed{\Delta E = \Delta m\, c^2}$$

Η σχέση ισχύει σε όλες τις μεταβολές που υφίσταται ένα σύστημα, αλλά επιδεικνύεται με δραματικό τρόπο στην **εξαΰλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου** και στο φαινόμενο της **δίδυμης γένεσης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου** από ένα φωτόνιο.

(α) ***Εξαΰλωση ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.***

Ένα ηλεκτρόνιο και το αντισωματίδιό του, το ποζιτρόνιο, εξαϋλώνονται πλήρως παράγοντας δύο φωτόνια ενέργειας 511 keV το καθένα, τα οποία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις:

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \to 2\gamma$$



Επειδή η ορμή του ζεύγους των σωματιδίων είναι αρχικά σχεδόν μηδενική, τα δύο φωτόνια έχουν την ίδια ενέργεια και κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η διαθέσιμη ενέργεια, η οποία οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στις μάζες ηρεμίας των δύο σωματιδίων είναι

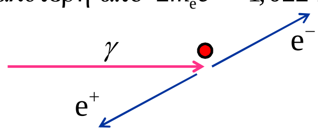
$$2m_\mathrm{e}c^2 = 1{,}022 \text{ MeV},$$

την οποία μοιράζονται εξίσου τα δύο φωτόνια.

(β) ***Δίδυμη γένεση (ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου).***

Ένα φωτόνιο, αν έχει ενέργεια μεγαλύτερη από $2m_\mathrm{e}c^2 = 1{,}022 \text{ MeV}$, μπορεί να παραγάγει ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.

$$\gamma \to \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+$$



Για να διατηρηθεί τόσο η ορμή όσο και η ενέργεια, η διεργασία μπορεί να συμβεί κοντά σε ένα άλλο σώμα, όπως ένα πυρήνα ατόμου.

Η κατώτατη ενέργεια που πρέπει να έχει ένα φωτόνιο για τη δημιουργία ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου είναι $2m_\mathrm{e}c^2 = 1{,}022 \text{ MeV}$

και ονομάζεται ***ενέργεια κατωφλίου*** για τη δίδυμη γένεση. Η ενέργεια αυτή είναι ίση με το ενεργειακό ισοδύναμο των δύο σωματιδίων.

Αν το φωτόνιο διαθέτει ακριβώς τόση ενέργεια, τότε τα δύο σωματίδια θα έχουν μηδενική κινητική ενέργεια μετά τη δημιουργία τους. Φωτόνια μεγαλύτερης ενέργειας προσδίδουν και κινητική ενέργεια στα δύο προϊόντα της δίδυμης γένεσης.

Παράδειγμα 5.4

Μεταβολή μάζας σε ενέργεια σε μια χημική αντίδραση

Κατά την ένωση 1 kg υδρογόνου με 8 kg οξυγόνου για την παραγωγή 9 kg ύδατος, απελευθερώνεται ενέργεια ίση με 10^8 J περίπου.

Θα ήταν δυνατό να ανιχνεύσουμε την ποσοστιαία μεταβολή στη μάζα σε αυτή την αντίδραση με ένα ζυγό που μπορεί να μετρήσει ποσοστιαία μεταβολή στη μάζα ίση με 1 μέρος στα 10^7 ;

Το ισοδύναμο σε μάζα της ενέργειας που εκλύεται είναι

$$\Delta m = \Delta E / c^2 = 10^8 / \left(3\times 10^8\right)^2 \approx 10^{-19} \text{ kg}$$

Αυτό είναι περίπου 1 μέρος στα 10^{10} της μάζας που συμμετέχει στην αντίδραση και δεν μπορεί να ανιχνευτεί με τον ζυγό που διαθέτουμε.

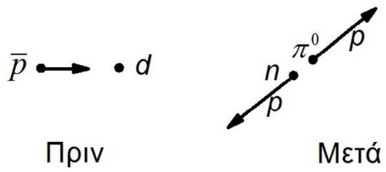
Μια μάζα ίση με $\Delta m \approx 10^{-19}$ kg είναι ίση με τη μάζα 10^{11} ηλεκτρονίων, ή 5×10^7 άτομα υδρογόνου.

Παράδειγμα 5.6 Η δημιουργία ουδέτερου πιονίου

Κατά την αρπαγή ενός αντιπρωτονίου, το οποίο κινείται με πολύ μικρή ταχύτητα, από ακίνητο πυρήνα δευτερίου ($\overline{p} + d \to n + \pi^0$), πόση είναι η ολική ενέργεια του παραγόμενου π^0 ;

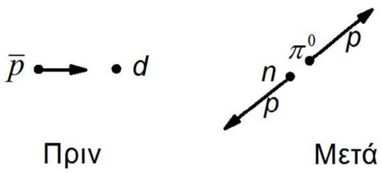
Οι ενέργειες ηρεμίας των σωματιδίων $\overline{p}$, d , n και π^0 είναι, αντίστοιχα, $E_{\text{p}0} = 938,2$ MeV, $E_{\text{d}0} = 1875,5$ MeV, $E_{\text{n}0} = 939,5$ MeV, $E_{\pi 0} = 135,0$ MeV.

Επειδή η αρχική ορμή του συστήματος είναι αμελητέα, οι ορμές των n και π^0 πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες. Έστω ότι οι ορμές των δύο σωματιδίων έχουν μέτρο p. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι επίσης αμελητέα.



Η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{d}0} = E_{\mathrm{n}} + E_{\pi} \qquad (1)$$



Όπου E_{n} και E_{π} είναι οι ολικές ενέργειες των n και π^0, αντίστοιχα, ενώ, από τη σχέση

$$E^2 = \left(m_0 c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2$$

έχουμε, για τα σωματίδια n και π^0 , $\quad \left(pc\right)^2 = E_{\mathrm{n}}^2 - E_{\mathrm{n}0}^2 = E_{\pi}^2 - E_{\pi 0}^2 \qquad (2)$

Η Εξ. (1) δίνει $\quad E_{\mathrm{n}}^2 = \left(E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{d}0} - E_{\pi}\right)^2$

και η (2) $\quad E_{\mathrm{n}}^2 = E_{\pi}^2 + E_{\mathrm{n}0}^2 - E_{\pi 0}^2$.

Εξισώνοντας, $\quad \left(E_{0\mathrm{p}} + E_{0\mathrm{d}} - E_{\pi}\right)^2 = E_{\pi}^2 + E_{0\mathrm{n}}^2 - E_{0\pi}^2$

ή $\quad \left(E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{d}0}\right)^2 - 2E_{\pi}\left(E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{d}0}\right) + \cancel{E_{\pi}^2} = \cancel{E_{\pi}^2} + E_{\mathrm{n}0}^2 - E_{\pi 0}^2$

Τελικά, $\quad E_{\pi} = \dfrac{\left(E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{d}0}\right)^2 + E_{\pi 0}^2 - E_{\mathrm{n}0}^2}{2\left(E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{d}0}\right)}$.

Αντικαθιστώντας,

$$E_{\pi} = \frac{\left(938,2 + 1875,5\right)^2 + 135,0^2 - 939,5^2}{2\left(938,2 + 1875,5\right)} = 1253 \text{ MeV}$$

Το σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής

Ορίζουμε το *Σύστημα Αναφοράς Μηδενικής Ορμής* (ΣΑΜΟ) ενός συνόλου σωματιδίων ως εκείνο το αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η ολική ορμή του συνόλου των σωματιδίων είναι αρχικά, και διατηρείται, ίση με μηδέν.

Αν είναι δεδομένες οι ορμές ενός συνόλου N σωματιδίων

$$\left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_i, ..., \mathbf{p}_N\right)$$

σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S, τότε υποθέτουμε την ύπαρξη ενός άλλου αδρανειακού συστήματος αναφοράς, το ΣΑΜΟ S΄, που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V}$ ως προς το πρώτο, τέτοια ώστε το άθροισμα των ορμών $\left(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, ..., \mathbf{p}'_i, ..., \mathbf{p}'_N\right)$

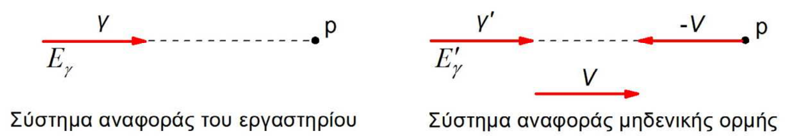
των σωματιδίων σε αυτό το σύστημα να είναι ίσο με μηδέν: $\sum_N \mathbf{p}'_i = 0$

Από τη συνθήκη αυτή μπορεί να βρεθεί η ταχύτητα $\mathbf{V}$.

Αφού λύσουμε ένα δεδομένο πρόβλημα στο Σύστημα Αναφοράς Μηδενικής Ορμής, μετασχηματίζουμε σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς.

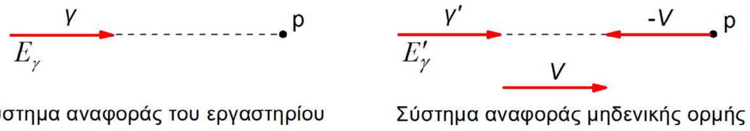
Παράδειγμα: Σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής φωτονίου-πρωτονίου

Έστω ότι ένα φωτόνιο με ενέργεια E_γ κατευθύνεται προς ένα πρωτόνιο το οποίο είναι ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.



(α) Ποια είναι η ταχύτητα V του συστήματος αναφοράς μηδενικής ορμής του πρωτονίου και του φωτονίου, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (ΣΑΕ);

(β) Πόση είναι η ενέργεια του φωτονίου και η ενέργεια του πρωτονίου στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής (ΣΑΜΟ);



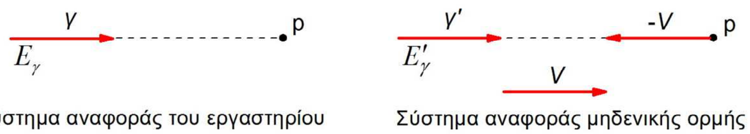
(α) Το ΣΑΜΟ πρέπει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το φωτόνιο.

Από τη σχέση $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}$, με $\upsilon_x = 0$, βρίσκουμε ότι

το πρωτόνιο έχει στο ΣΑΜΟ ταχύτητα $-V$ και ορμή $p'_{\mathrm{p}} = \dfrac{-M_{\mathrm{p}}\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Το φωτόνιο έχει στο ΣΑΕ ενέργεια E_γ και στο ΣΑΜΟ έχει ενέργεια

$E'_\gamma = E_\gamma \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$ (λόγω του φαινομένου Ντόπλερ) και ορμή $p'_\gamma = \dfrac{E'_\gamma}{c}$.



Στο ΣΑΜΟ η ολική ορμή είναι ίση με μηδέν. Έπεται ότι $\left|p'_\gamma\right| = \left|p'_{\mathrm{p}}\right|$.

Επομένως, $\dfrac{E'_\gamma}{c} = -p'_{\mathrm{p}}$, η οποία δίνει $\dfrac{E_\gamma}{c}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} = \dfrac{M_{\mathrm{p}}\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$

ή $\dfrac{E_\gamma}{c}(1-\beta) = M_{\mathrm{p}}\beta c$.

Σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου Σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής

Στο ΣΑΜΟ η ολική ορμή είναι ίση με μηδέν. Έπεται ότι $|p'_\gamma| = |p'_{\mathrm{p}}|$.

Επομένως, $\dfrac{E'_\gamma}{c} = -p'_{\mathrm{p}}$, η οποία δίνει $\dfrac{E_\gamma}{c}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} = \dfrac{M_{\mathrm{p}}\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$

ή $\dfrac{E_\gamma}{c}(1-\beta) = M_{\mathrm{p}}\beta c$.

Έτσι, $\dfrac{E_\gamma}{c} = \beta\left(\dfrac{E_\gamma}{c} + M_{\mathrm{p}}c\right)$ και, τελικά, $\beta = \dfrac{E_\gamma}{E_\gamma + M_{\mathrm{p}}c^2}$,

η οποία είναι η ανηγμένη ταχύτητα του ΣΑΜΟ ως προς το ΣΑΕ.

Σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου Σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής

(β) Η ενέργεια του φωτονίου στο ΣΑΜΟ είναι

$$E'_\gamma = E_\gamma\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = E_\gamma\sqrt{\frac{M_{\mathrm{p}}c^2}{2E_\gamma + M_{\mathrm{p}}c^2}}$$

Όπως αναμένεται, είναι $E'_\gamma < E_\gamma$

Για την ενέργεια του πρωτονίου στο ΣΑΜΟ, βρίσκουμε

$$E'_{\mathrm{p}} = \frac{M_{\mathrm{p}}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_{\mathrm{p}}c^2}{\sqrt{1-\dfrac{E_\gamma^2}{\left(E_\gamma + M_{\mathrm{p}}c^2\right)^2}}} = \frac{M_{\mathrm{p}}c^2\left(E_\gamma + M_{\mathrm{p}}c^2\right)}{\sqrt{M_{\mathrm{p}}^2c^4 + 2E_\gamma M_{\mathrm{p}}c^2}} = \frac{E_\gamma + M_{\mathrm{p}}c^2}{\sqrt{1+2\dfrac{E_\gamma}{M_{\mathrm{p}}c^2}}}$$

Η αναλλοιότητα του μεγέθους $E^2 - c^2P^2$ για σύστημα σωματιδίων

Εξετάζουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από n σωματίδια, τα οποία ενδεχομένως και να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Ο μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας ισχύει για καθένα από τα σωματίδια ξεχωριστα. Για το υπ' αριθμόν i σωματίδιο, ισχύουν οι σχέσεις:

$$p'_{ix} = \gamma\left(p_{ix} - \frac{\beta}{c}E_i\right), \qquad p'_{iy} = p_{iy}, \qquad p'_{iz} = p_{iz}, \qquad E'_i = \gamma\left(E_i - c\beta p_{ix}\right)$$

Οι συνιστώσες της ολικής ορμής και η ολική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} p_{ix} \qquad P_y = \sum_{i=1}^{n} p_{iy} \qquad P_z = \sum_{i=1}^{n} p_{iz} \qquad E = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

Οι μετασχηματισμοί ορμής-ενέργειας είναι γραμμικοί. Αθροίζοντας για τα n σωματίδια τις αντίστοιχες εξισώσεις έχουμε για τις συνιστώσες της ολικής ορμής και την ολική ενέργεια του συστήματος

$$P'_x = \gamma\left(P_x - \frac{\beta}{c}E\right), \qquad P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z, \qquad E' = \gamma\left(E - c\beta P_x\right)$$

Πώς μετασχηματίζεται κατά Λόρεντς το μέγεθος $E'^2 - c^2P'^2$;

$$E'^2 - c^2P'^2 = \gamma^2\left(E - c\beta P_x\right)^2 - c^2\gamma^2\left(P_x - \frac{\beta}{c}E\right)^2 - c^2P_y^2 - c^2P_z^2 =$$

$$= \gamma^2E^2 - \cancel{2\gamma^2 c\beta P_x E} + \gamma^2c^2\beta^2P_x^2 - c^2\gamma^2P_x^2 + \cancel{2\gamma^2 c\beta P_x E} - \gamma^2\beta^2E^2 - c^2P_y^2 - c^2P_z^2 =$$

$$= \gamma^2\left(1-\beta^2\right)E^2 - c^2\gamma^2\left(1-\beta^2\right)P_x^2 - c^2P_y^2 - c^2P_z^2 = E^2 - c^2P_x^2 - c^2P_y^2 - c^2P_z^2 =$$

$$= E^2 - c^2P^2$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι το μέγεθος $E^2 - c^2P^2$ παραμένει αναλλοίωτο κατά τον μετασχηματισμό του Λόρεντς. Συμπεραίνουμε ότι το μέγεθος $E^2 - c^2P^2$ όχι μόνο διατηρείται κατά τις μεταβολές που συμβαίνουν σε ένα σύστημα n σωματιδίων, αλλά έχει και την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Ο μετασχηματισμός της δύναμης

Έχουμε ήδη διατηρήσει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη μορφή

$\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$ που έχει και στην κλασική Μηχανική,

όπου η ορμή ορίζεται πάλι ως $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$.

Στη θέση της ορμής θέτουμε τώρα τη σχετικιστική ορμή, οπότε είναι

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2 / c^2}} \right)$$

Με αυτόν τον ορισμό, η επιτάχυνση δεν είναι, γενικά, στην κατεύθυνση της δύναμης. Ο ορισμός όμως έχει μεγάλα πλεονεκτήματα: κάνει δυνατή τη διατήρηση της αρχής της δράσης-αντίδρασης και απλοποιεί την ερμηνεία των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων.

Έχουμε επίσης διατηρήσει τον ορισμό του έργου που παράγει η δύναμη κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της κατά διάστημα ως $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, οπότε και ο ρυθμός παραγωγής έργου (ισχύς) δίνεται

από τη σχέση $\dfrac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$

Εξετάζουμε ένα σωματίδιο που έχει μάζα ηρεμίας m_0, ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ και ορμή $\mathbf{p}$ στο σύστημα αναφοράς S, ενώ έχει ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}'$ και ορμή $\mathbf{p}'$ στο σύστημα αναφοράς S΄, το οποίο κινείται ως προς το S με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$.

Η συνιστώσα x της ορμής στο σύστημα S΄ δίνεται από $F'_x = \dfrac{dp'_x}{dt'}$

Από τον μετασχηματισμό ορμής-ενέργειας, είναι $p'_x = \gamma\left(p_x - \dfrac{\beta}{c} E \right)$

Έτσι $F'_x = \gamma \dfrac{d}{dt'}\left(p_x - \dfrac{\beta}{c} E \right)$

Επίσης, από τον μετασχηματισμό $t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2} x \right)$,

έχουμε $\dfrac{dt'}{dt} = \dfrac{d}{dt}\gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2} x \right) = \gamma\left(1 - \dfrac{V\upsilon_x}{c^2} \right)$ και, επειδή $\dfrac{d}{dt'} = \dfrac{dt}{dt'}\dfrac{d}{dt}$,

προκύπτει ότι

$$F'_x = \gamma \frac{d}{dt'}\left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right) = \frac{\gamma}{\gamma\left(1 - \dfrac{V\upsilon_x}{c^2} \right)} \frac{d}{dt}\left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right) = \frac{1}{1 - \dfrac{V\upsilon_x}{c^2}}\left(F_x - \frac{V}{c^2}\frac{dE}{dt} \right)$$

Επίσης $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\upsilon} = F_x \upsilon_x + F_y \upsilon_y + F_z \upsilon_z$

Οπότε $$F'_x = F_x - \frac{V\upsilon_y}{c^2\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} F_y - \frac{V\upsilon_z}{c^2\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} F_z$$

Για τη συνιστώσα *y* της δύναμης, επειδή είναι $p'_y = p_y$

προκύπτει ότι $F'_y = \dfrac{dp'_y}{dt'} = \dfrac{dp_y}{dt'} = \dfrac{dt}{dt'}\dfrac{dp_y}{dt} = \dfrac{dt}{dt'} F_y$

και $F'_y = \dfrac{F_y}{\gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)}$. Ομοίως, $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)}$.

Συνοψίζοντας:

$$\boxed{\begin{aligned} &F'_x = F_x - \frac{V\upsilon_y}{c^2\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} F_y - \frac{V\upsilon_z}{c^2\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} F_z \\ &F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} \qquad F'_z = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} \end{aligned}}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί εξήχθησαν για μια δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο και μεταβάλλει τη θέση του.

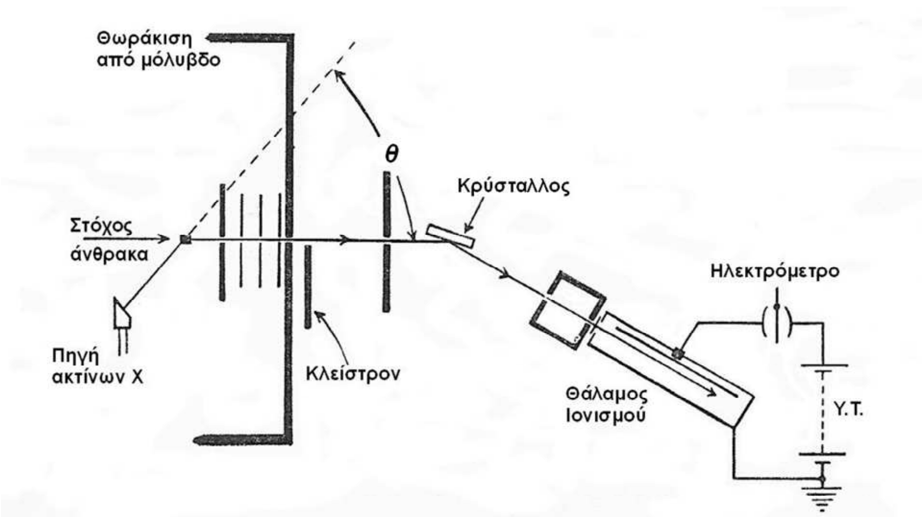
Για σταθερό σημείο εφαρμογής της δύναμης ($\boldsymbol{\upsilon}' = 0$), οι σχέσεις ανάγονται σε

$$F_x = F'_x \qquad F_y = \frac{F'_y}{\gamma} \qquad F_z = \frac{F'_z}{\gamma}$$

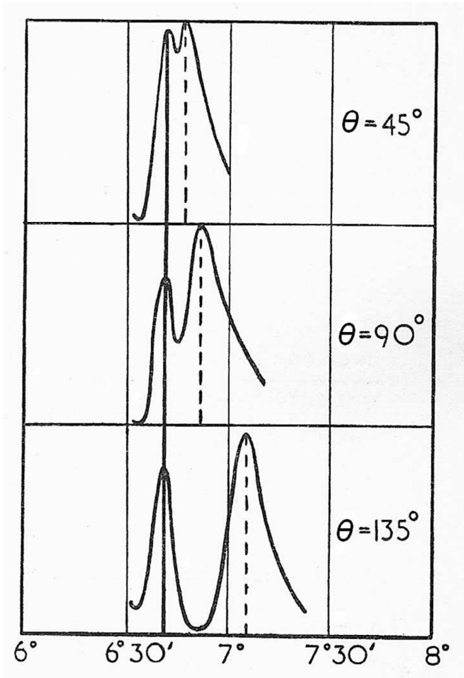
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

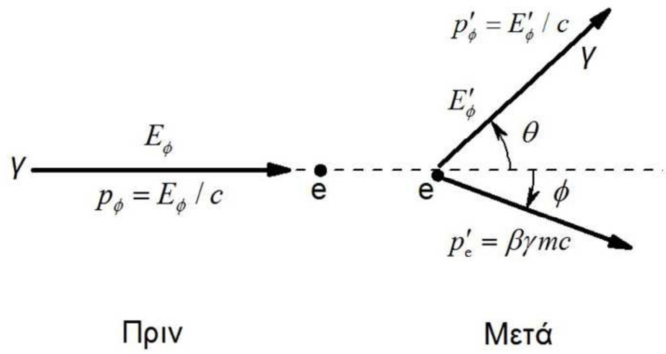
Το φαινόμενο Κόμπτον

Η σωματιδιακή φύση του φωτός επιβεβαιώθηκε, όχι μόνο από την ερμηνεία που έδωσε ο Άινστάιν στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, αλλά και από την επιτυχία που είχε η εφαρμογή της σχετικιστικής Μηχανικής στην ερμηνεία των παρατηρήσεων του Κόμπτον (A.H. Compton) κατά τη σκέδαση ακτίνων Χ από ελαφρά στοιχεία.



Φάσματα ακτίνων Χ της γραμμής K_α του μολυβδαινίου που σκεδάστηκαν από στόχο άνθρακα κατά τα πειράματα του Κόμπτον. Στη γωνία περίθλασης των φαίνεται η κορυφή που οφείλεται σε ακτίνες Χ με μήκος κύματος ίδιο με αυτό των προσπιπτουσών ακτίνων. Σε μεγαλύτερη γωνία φαίνεται η κορυφή που οφείλεται σε ακτίνες Χ με μεγαλύτερο μήκος κύματος.





Διατήρηση της ενέργειας: $$m_0c^2 + E_\phi = mc^2 + E'_\phi \qquad (1)$$

Διατήρηση διαμήκους ορμής: $$\frac{E_\phi}{c} = \frac{E'_\phi}{c}\cos\theta + m\upsilon\cos\phi \qquad (2)$$

Διατήρηση εγκάρσιας ορμής: $$0 = \frac{E'_\phi}{c}\sin\theta - m\upsilon\sin\phi \qquad (3)$$

Θα απαλείψουμε τη γωνία ϕ ανάμεσα στις Εξ. (2) και (3).
Οι δύο αυτές εξισώσεις δίνουν

$$m^2c^2\upsilon^2\cos^2\phi = \left(E_\phi - E'_\phi\cos\theta\right)^2 \qquad m^2c^2\upsilon^2\sin^2\phi = E'^2_\phi\sin^2\theta \tag{4}$$

Προσθέτοντας,

$$m^2c^2\upsilon^2 = \left(E_\phi - E'_\phi\cos\theta\right)^2 + E'^2_\phi\sin^2\theta = E_\phi^2 + E'^2_\phi - 2E_\phi E'_\phi\cos\theta \tag{5}$$

Όμως, $m^2 = \dfrac{m_0^2}{1-\upsilon^2/c^2}$ ή $m^2\upsilon^2 = c^2\left(m^2 - m_0^2\right)$ (6)

Αυτή, μαζί με την Εξ. (1), δίνει

$$m^2\upsilon^2c^2 = \left(m_0c^2 + E_\phi - E'_\phi\right)^2 - m_0^2c^4 =$$

$$= \cancel{m_0^2c^4} + E_\phi^2 + E'^2_\phi + 2m_0c^2E - 2m_0c^2E'_\phi - 2E_\phi E'_\phi - \cancel{m_0^2c^4}$$

ή

$$\cancel{E_\phi^2} + \cancel{E'^2_\phi} + 2m_0c^2E - 2m_0c^2E'_\phi - 2E_\phi E'_\phi = \cancel{E_\phi^2} + \cancel{E'^2_\phi} - 2E_\phi E'_\phi\cos\theta$$

Τελικά, $2m_0c^2\left(E_\phi - E'_\phi\right) = 2E_\phi E'_\phi(1-\cos\theta)$

Με διαίρεση διά $2E_\phi E'_\phi m_0c^2$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{E'_\phi} - \frac{1}{E_\phi} = \frac{1}{m_0c^2}\left(1-\cos\theta\right)$$

Επειδή είναι $E_\phi = hc/\lambda$ και $E'_\phi = hc/\lambda'$, προκύπτει τελικά η σχέση

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}\left(1-\cos\theta\right) \qquad \text{ή} \qquad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\theta$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι $\dfrac{h}{m_\mathrm{e}c} = 2,4\times10^{-12}$ m

όπου m_e είναι η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου. Το μέγεθος

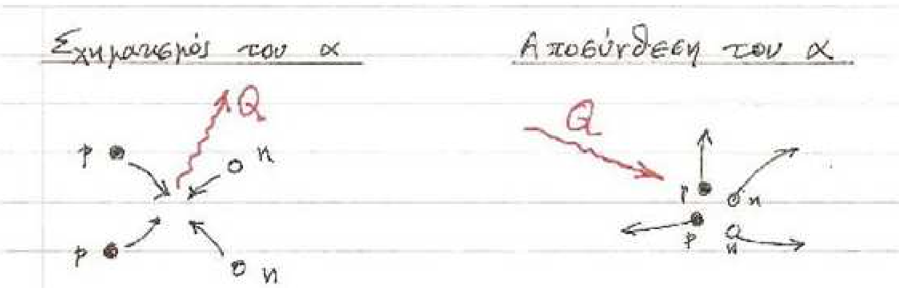
$$\frac{\hbar}{m_\mathrm{e}c} = 3,86\times10^{-13}\ \mathrm{m}$$

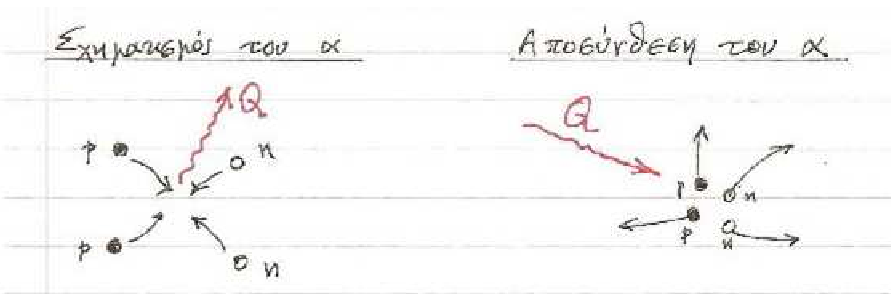
Όπου $\hbar \equiv h/2\pi$, ονομάζεται *μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.2 *Η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α.* Το σωματίδιο α είναι ένας πυρήνας ηλίου, αποτελούμενος από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Να βρεθεί η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α καθώς και η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο.

ΛΥΣΗ





Η αντίδραση «σχηματισμού» ενός σωματιδίου α είναι: $2\mathbf{p} + 2\mathbf{n} \rightarrow \alpha + Q$.
Q είναι η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α και εκλύεται κατά τον σχηματισμό του.
Η διατήρηση μάζας-ενέργειας δίνει: $2m_{\mathrm{p}}c^2 + 2m_{\mathrm{n}}c^2 = m_\alpha c^2 + Q$

$$Q = \frac{1}{c^2}\left(2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_\alpha\right) = \frac{\Delta M}{c^2}$$

όπου ΔM είναι το έλλειμμα μάζας $\Delta M = 2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_\alpha$.

Κ. Χριστοδουλίδης: Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Η μάζα του σωματιδίου α μπορεί να βρεθεί από αυτήν του ατόμου του Ηλίου-4 αν αφαιρέσουμε τη μάζα δύο ηλεκτρονίων και αγνοήσουμε την ενέργεια σύνδεσής τους στον πυρήνα του Ηλίου, η οποία είναι μικρή σε σύγκριση με τις άλλες ενέργειες:

$$m_\alpha = m_{\mathrm{He}} - 2m_{\mathrm{e}} \,.$$

Επομένως $\Delta M = (2\times 1{,}007\,276 + 2\times 1{,}008\,665) - (4{,}002\,604 - 2\times 0{,}000\,549)$

$$\Delta M = 4{,}031\,882 - 4{,}001\,506 \qquad \Delta M = 0{,}030\,376\ \mathbf{u}\,.$$

Από την ισοδυναμία $\quad \mathbf{1\ u \equiv 931{,}478\ MeV}$

Προκύπτει ότι $\quad Q = 0{,}0304 \times 931 = 28{,}3\ \mathrm{MeV}$

Η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α είναι: **28,3 MeV**
και η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο:

$$28{,}3/4 = 7{,}07\ \mathrm{MeV}\ /\text{νουκλεόνιο}$$

η οποία είναι αρκετά μεγάλη ώστε να κάνει το σωματίδιο α έναν από τους πιο ισχυρά συνδεδεμένους πυρήνες.

6.3 *Η διάσπαση του νετρονίου.* Το ελεύθερο νετρόνιο είναι ασταθές και διασπάται με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau = 898\ \mathrm{s} \approx 15$ λεπτά (χρόνο υποδιπλασιασμού $\tau_{1/2} = 622\ \mathrm{s} \approx 10$ λεπτά) σύμφωνα με την αντίδραση $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e + \Delta E$. Να βρεθεί η ενέργεια που εκλύεται κατά τη διάσπαση.

ΛΥΣΗ

Η ενέργεια σύνδεσης του νετρονίου είναι $\Delta E = (m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{e}} - m_\nu)c^2$.

Η μάζα ηρεμίας του νετρίνου, αν υπάρχει, είναι πολύ μικρή και μπορεί να αγνοηθεί. Επίσης είναι

$$m_{\mathrm{n}}c^2 = 939{,}67\ \mathrm{MeV} \qquad m_{\mathrm{p}}c^2 = 938{,}37\ \mathrm{MeV} \qquad m_{\mathrm{e}}c^2 = 0{,}511\ \mathrm{MeV}$$

οπότε $\Delta E = 0{,}79\ \mathrm{MeV}$.
