# 5. ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

## Σχετικιστική μάζα. Σχετικιστική ορμή.

Αν εξετάσουμε μια σύγκρουση δύο μαζών σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και επιβάλουμε τη διατήρηση της ορμής, όπως αυτή ορίζεται στην κλασική Μηχανική, θα διαπιστώσουμε ότι εξεταζόμενη από ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται ως προς το πρώτο, η ορμή δεν θα διατηρείται στην κρούση.

Θα υποθέσουμε ότι είναι δυνατό να οριστεί η μάζα ως μια τέτοια συνάρτηση της ταχύτητας, $m = m(\upsilon)$ , ώστε να παραμείνουν σε ισχύ και στη Θεωρία της Σχετικότητας:

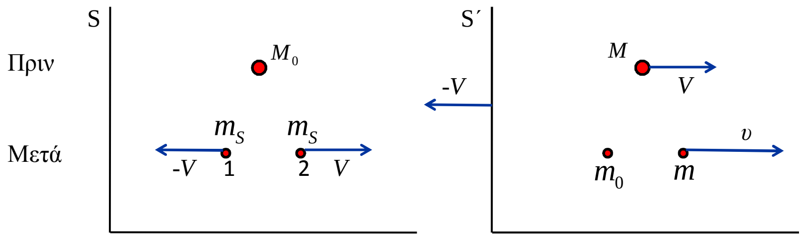
η αρχή της διατήρησης της μάζας, και

η αρχή της διατήρησης της ορμής, η οποία παραμένει $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$ .

Θέλουμε να βρούμε την εξάρτηση της μάζας από την ταχύτητα, $m(\upsilon)$ .



- Θα εξετάσουμε μια ειδική περίπτωση: Έστω ότι στο σύστημα αναφοράς S μια ακίνητη μάζα $M_0$ διασπάται σε δύο πανομοιότυπες μάζες $m_S$ , οι οποίες κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες $\pm V\hat{\mathbf{x}}$ .
  Ένα άλλο σύστημα αναφοράς, το S΄, κινείται με ταχύτητα $-V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S.



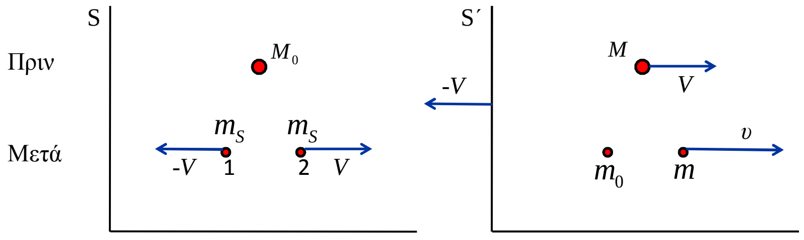

Στο σύστημα S΄, παρατηρείται μια μάζα, έστω $M$, που κινείται με ταχύτητα $V$, να διασπάται σε δύο μάζες, την $m_0$, που είναι ακίνητη, και την $m$ , που κινείται με ταχύτητα $\upsilon$. Ενδέχεται να είναι: $M = M(V)$ και $m = m(\upsilon)$

$m_0$ είναι η τιμή που παίρνουν οι $m_S$ και $m$ όταν είναι ακίνητες.

Για διατήρηση της μάζας θα έχουμε: $M = m_0 + m$ (1)

Για διατήρηση της ορμής θα έχουμε: $MV = m\upsilon$ (2)

οι οποίες λύνονται και δίνουν: $\dfrac{m_0}{m} = \dfrac{\upsilon}{V} - 1$ (3)




Από τον μετασχηματισμό της ταχύτητας της μάζας 1:

$$\upsilon = \frac{V-(-V)}{1-\dfrac{V(-V)}{c^2}} = \frac{2V}{1+\dfrac{V^2}{c^2}} \qquad (4)$$



Αυτή δίνει: $1+\dfrac{V^2}{c^2} = 2\dfrac{V}{\upsilon}$ ή $\dfrac{\upsilon^2}{V^2}+\dfrac{\upsilon^2}{c^2} = 2\dfrac{\upsilon}{V}$

και $\dfrac{\upsilon}{V} - 1 = \sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$

Αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε $\dfrac{m_0}{m} = \sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$

και, τελικά, $m(\upsilon) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$

Επομένως, αν ορίσουμε τη ***σχετικιστική μάζα*** ως $\boxed{m(\upsilon) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}}$

θα έχουμε τόσο διατήρηση της μάζας όσο και διατήρηση της ορμής.

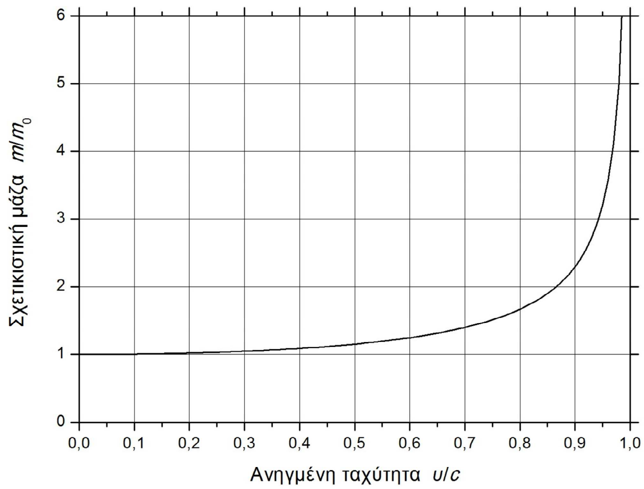
Επειδή είναι $m_0 = \lim\limits_{\upsilon\to 0} m(\upsilon)$, το μέγεθος $m_0$ ονομάζεται ***μάζα ηρεμίας*** του σώματος.

Έτσι, $\boxed{m(\upsilon) = m_0\gamma}$

<u>*Προσοχή:*</u> Ο παράγοντας Λόρεντς $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$, αντιστοιχεί στην ταχύτητα *υ της μάζας* στο σύστημα στο οποίο αυτή παρατηρείται.



Η μεταβολή με την ταχύτητα *υ*, της σχετικιστικής μάζας *m*(*υ*) ενός σώματος το οποίο έχει μάζα ηρεμίας $m_0$.



**Ορμή**

Με τη μάζα του σώματος να δίνεται από τη σχέση

$$m(\upsilon) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2 / c^2}} = \gamma m_0$$

όπου $m_0$ είναι η μάζα ηρεμίας του σώματος, η ορμή του ορίζεται ως

$$\boxed{\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon} = \frac{m_0 \boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2 / c^2}} = \gamma m_0 \boldsymbol{\upsilon}}$$

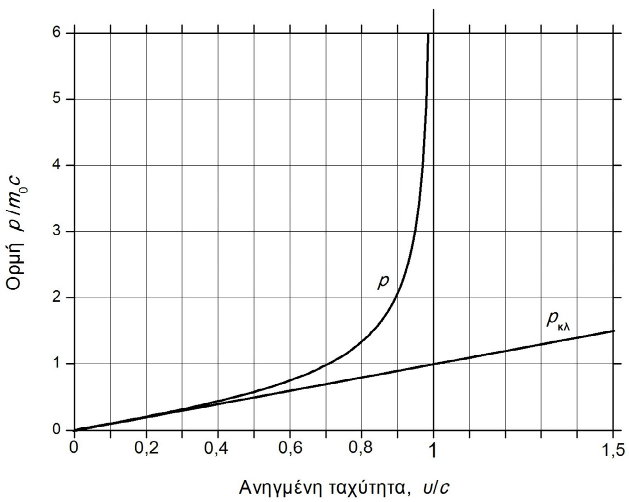
Με αυτόν τον ορισμό, η ορμή εξακολουθεί να διατηρείται και στη σχετικιστική δυναμική. Το μέτρο της ορμής μπορεί να γραφτεί και ως

$$p = \beta \gamma m_0 c$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι, αν οριστεί με αυτόν τον τρόπο, η ορμή διατηρείται σε κάθε σύγκρουση μαζών και στη σχετικιστική δυναμική.



Η μεταβολή με την ταχύτητα $\upsilon$, της σχετικιστικής ορμής $p$ ενός σώματος το οποίο έχει μάζα ηρεμίας $m_0$. $p_{κλ}$ είναι η κλασική ορμή.




Κ. Χριστοδουλίδης: Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

## Σχετικιστική ενέργεια

Επιθυμούμε να διατηρήσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση στη μορφή

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

που έχει και στην κλασική Μηχανική. Στη θέση της ορμής θα θέσουμε όμως τώρα τη σχετικιστική ορμή,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

Τα μεγέθη $t$, $\boldsymbol{\upsilon}$, $\mathbf{p}$ και $\mathbf{F}$ αναφέρονται όλα στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

Θα διατηρήσουμε επίσης τον ορισμό του έργου $dW$ που παράγει η δύναμη $\mathbf{F}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της κατά διάστημα $d\mathbf{r}$ ως

$$dW \equiv \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$



Υποθέτουμε ότι μια δύναμη $\mathbf{F}$ ασκείται πάνω σε ένα ελεύθερο σώμα το οποίο έχει μάζα ηρεμίας $m_0$ και το επιταχύνει.

Γράφοντας τη δύναμη ως $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{\upsilon}) = m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} + \frac{dm}{dt}\boldsymbol{\upsilon}$

έχουμε $dW = m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}\cdot d\mathbf{r} + \frac{dm}{dt}\boldsymbol{\upsilon}\cdot d\mathbf{r} = m\boldsymbol{\upsilon}\cdot d\boldsymbol{\upsilon} + \upsilon^2 dm$

Όμως, $\boldsymbol{\upsilon}\cdot d\boldsymbol{\upsilon} = \tfrac{1}{2}d(\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{\upsilon}) = \tfrac{1}{2}d(\upsilon^2) = \upsilon d\upsilon$

οπότε $dW = m\upsilon d\upsilon + \upsilon^2 dm = \left(m\upsilon + \upsilon^2\frac{dm}{d\upsilon}\right)d\upsilon$

και

$$dW = \left(\frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + \frac{m_0\upsilon^3/c^2}{\left(\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\right)^3}\right)d\upsilon = \frac{m_0\upsilon d\upsilon}{\left(\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\right)^3} = d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

ολοκληρώνοντας, $W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + a$ όπου $a$ μια σαθερά.

Αν υποθέσουμε ότι το σώμα είναι αρχικά ακίνητο όταν η δύναμη αρχίζει να το επιταχύνει, θα είναι $W = 0$ όταν $\upsilon = 0$.

Επομένως, $0 = m_0 c^2 + a$ και $a = -m_0 c^2$

οπότε και $$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Η παραγωγή έργου $W$ από τη δύναμη προσδίδει ταχύτητα $\upsilon$ στο σώμα. Θεωρούμε ότι το έργο αυτό, παραγόμενο πάνω σε ένα ελεύθερο σώμα, είναι η ***κινητική ενέργεια*** $K$ του σώματος:

$$\boxed{K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)}$$



Η ποσότητα $$\boxed{E \equiv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = mc^2 = K + m_0 c^2}$$

έχει διαστάσεις ενέργειας και αποτελείται από δύο όρους:

1. Τον όρο $m_0 c^2$, που είναι η τιμή της $E$ για $\upsilon = 0$ : $E(0) \equiv E_0 = m_0 c^2$ , και
2. Τη σχετικιστική κινητική ενέργεια $K$ του σώματος.

Ονομάζουμε την ποσότητα $E$ ***ολική σχετικιστική ενέργεια***.

Η τιμή της για $\upsilon = 0$ , $E(0) \equiv E_0 = m_0 c^2$, ονομάζεται ***ενέργεια ηρεμίας*** του σώματος. $$E(\upsilon) = E_0 + K = m_0 c^2 + K$$

Στη σχετικότητα, είναι:

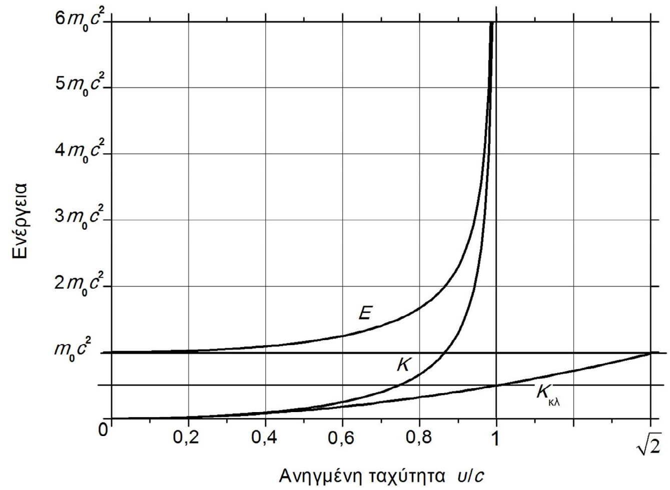
(ολική σχετικιστική ενέργεια ) =

= (ενέργεια ηρεμίας) + (σχετικιστική κινητική ενέργεια)

Η ολική σχετικιστική ενέργεια γράφεται και ως

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2 \quad \text{ή} \quad E = mc^2}$$

Η μεταβολή, με την ταχύτητα $\upsilon$, της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας $K$ και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας $E$ ενός σώματος το οποίο έχει μάζα ηρεμίας $m_0$. Φαίνεται επίσης και η κλασική κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2$.






## Σχέση μεταξύ ορμής και ενέργειας

Από τη σχέση $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, έχουμε $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$.

Πολλαπλασιάζοντας επί $m_0^2c^4$, έχουμε $\gamma^2 m_0^2 c^4 - \beta^2\gamma^2 m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4$

Επειδή είναι $E = \gamma m_0 c^2$ και $p = \beta\gamma m_0 c$, η τελευταία σχέση γράφεται και

ως $\quad E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$

Η ποσότητα $(m_0c^2)^2$ είναι ένα αναλλοίωτο μέγεθος, γιατί υπολογιζόμενο παίρνει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Επομένως, και το μέγεθος $E^2 - p^2c^2$ είναι αναλλοίωτο.

Το μέγεθος $m_0c^2$ είναι το μέτρο του τετραδιανύσματος της ενέργειας-ορμής, το οποίο έχει συνιστώσες $E$, $p_xc$, $p_yc$ και $p_zc$.
Το τετράγωνο του μέτρου του είναι ίσο με

$$m_0^2c^4 = E^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 = E^2 - p^2c^2$$

το οποίο, ως μέτρο ενός τετραδιανύσματος, είναι αναλλοίωτο.

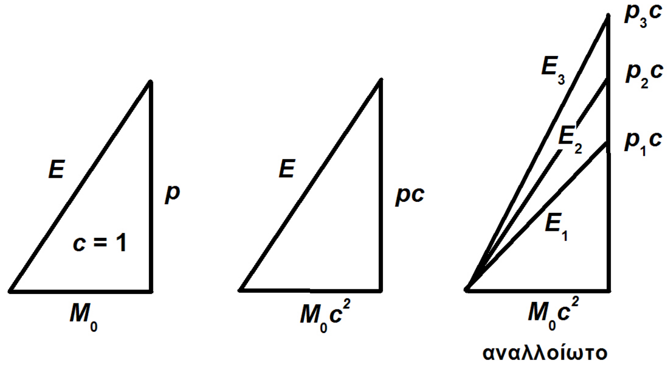
Η σχέση $\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$

συνδέει τα μεγέθη της μάζας ηρεμίας, της ορμής και της ολικής ενέργειας.
Το τρίγωνο του σχήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μνημονικός κανόνας για τη σχέση.
Η ολική ενέργεια $E$ μπορεί να εκφραστεί ως $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$

Η σχέση μεταξύ της ενέργειας και της ορμής προκύπτει από τις σχέσεις $E = mc^2$ και $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$ .

Προκύπτει ότι

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{\upsilon}}$$






**Κλασικές προσεγγίσεις**

Οι σχετικιστικές σχέσεις πρέπει να ανάγονται στις κλασικές για $c \to \infty$ ή για $\beta \to 0$ και $\gamma \to 1$ .

Οι προσεγγίσεις στις σχετικιστικές σχέσεις βρίσκονται αν αναπτύξουμε το $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \dots$$

Έτσι, η **κινητική ενέργεια** είναι, προσεγγιστικά, ίση με

$$K = m_0 c^2(\gamma - 1) = m_0 c^2\left(\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \dots\right) = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

όπως και στην κλασική Μηχανική. Η **ολική ενέργεια** είναι

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \dots\right) m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0\upsilon^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \dots\right) \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 = E_0 + K_{\kappa\lambda}$$

## Παράδειγμα: Ταχύτητες ηλεκτρονίων και πρωτονίων από σύγχρονους επιταχυντές

Η ενέργεια στην οποία επιταχύνονται ηλεκτρόνια από τα σημερικά σύγχροτρα ξεπέρασε τα 25 GeV, ενώ πρωτόνια έχουν επιταχυνθεί προσφάτως σε ενέργειες 7 TeV στο CERN, με τον επιταχυντή LHC. Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωματιδίων σε αυτές τις ενέργειες.

---

Οι ενέργειες ηρεμίας του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου είναι, αντίστοιχα, $m_{e0}c^2 = 0{,}511\ \text{MeV}$ και $m_{p0}c^2 = 938\ \text{MeV}$. Σε τόσο μεγάλες ενέργειες, όπως αυτές που δίνονται, ο παράγοντας Λόρεντς είναι αρκετά μεγάλος ώστε η κινητική ενέργεια να μπορεί να ληφθεί ως ίση με την ολική. Επομένως είναι

$$K = m_0c^2(\gamma - 1) \approx \gamma m_0 c^2, \quad \text{οπότε} \quad \gamma \approx K / m_0c^2 \quad \text{και}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_0c^2}{K}\right)^2$$



Για ηλεκτρόνιο με $K_e = 25\ \text{GeV} = 2{,}5 \times 10^{10}\ \text{eV}$ είναι

$$\gamma_e \approx K_e / m_{e0}c^2 = 2{,}5 \times 10^{10} / 0{,}511 \times 10^6 = 49\,000$$

Βλέπουμε ότι η προσέγγιση που κάναμε είναι δικαιολογημένη.
Η ανηγμένη ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι

$$\beta_e \approx 1 - 1/2\gamma_e^2 = 1 - 2{,}1 \times 10^{-10} = 0{,}999\,999\,999\,8$$

Για πρωτόνιο με $K_p = 7\ \text{TeV} = 7 \times 10^{12}\ \text{eV}$ είναι

$$\gamma_p \approx K_p / m_{p0}c^2 = 7 \times 10^{12} / 0{,}938 \times 10^9 = 7560$$

Η ανηγμένη ταχύτητα του πρωτονίου είναι

$$\beta_p \approx 1 - 1/2\gamma_p^2 = 1 - 8{,}7 \times 10^{-9} = 0{,}999\,999\,991\,3$$

Το πρωτόνιο θα διέσχιζε τον γαλαξία μας σε χρόνο $T = \dfrac{100\,000}{7560} \approx 13$ έτη,

όπως τον μετρά το ίδιο. Για εμάς, ο χρόνος αυτός θα ήταν 100 000 έτη.

## Σωματίδια μηδενικής μάζας ηρεμίας

Υπάρχουν στη φύση σωματίδια με μηδενική μάζα ηρεμίας. Το καλύτερα γνωστό είναι το φωτόνιο, ο φορέας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το βαρυτόνιο, ή γκραβιτόνιο, ο φορέας της βαρυτικής δύναμης έχει επίσης μηδενική μάζα ηρεμίας. Το νετρίνο, ενδέχεται να έχει και αυτό μηδενική μάζα ηρεμίας.

Αν θέσουμε $m_0 = 0$ στις σχετικιστικές ενεργειακές σχέσεις έχουμε, για την ολική ενέργεια, από την εξίσωση $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$ ότι

$$E = pc \qquad \text{και} \qquad \boxed{p = E / c}$$

Επειδή είναι, γενικά $p = \frac{E}{c^2}\upsilon$, αντικαθιστώντας στην $E = pc$ βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\upsilon = c}$$

Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα μας λέει ότι

***Όλα τα σωματίδια που έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.***



Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει θέτοντας $m_0 \to 0$ στη σχέση $E = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$ οπότε και έχουμε $\upsilon \to c$.

**<u>Φωτόνια</u>**

Για το φωτόνιο, ισχύουν επίσης και οι σχέσεις που συνδέουν την ενέργειά του με τη συχνότητά του, $f$, και το μήκος κύματός του, $\lambda$,

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

όπου $h$ είναι η σταθερά του Πλανκ $h = 6,626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s}$

Επομένως, η ορμή του φωτονίου εκφράζεται ως

$$\boxed{p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}}$$

## Διατήρηση ορμής και ενέργειας

Η ορμή ορίστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε σε μια αλληλεπίδραση σωματιδίων να διατηρούνται τόσο η μάζα όσο και η ορμή. Με δεδομένο ότι η ολική ενέργεια ενός σώματος ισούται με $E = mc^2$ , το γεγονός ότι σε μια αλληλεπίδραση ισχύει η διατήρηση $\sum_{i=1}^{n} m_i = \text{σταθ.}$

σημαίνει ότι και η ολική ενέργεια διατηρείται: $\sum_{i=1}^{n} E_i = \text{σταθ.}$

Η αρχή αυτή, μαζί με την αρχή διατήρησης της ορμής $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \text{σταθ.}$

χρησιμοποιούνται στη λύση προβλημάτων στα οποία σωματίδια αλληλεπιδρούν με οποιοδήποτε τρόπο.



Για $n$ σωματίδια, οι συνιστώσες της ολικής ορμής και η ολική μάζα-ενέργεια ορίζονται ως

$$P_{x,\,\text{ολ}} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{x,\,i} \qquad P_{y,\,\text{ολ}} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{y,\,i} \qquad P_{z,\,\text{ολ}} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{z,\,i} \qquad E_{\text{ολ}} \equiv \sum_{i=1}^{n} E_i$$

για το σύστημα S, με αντίστοιχες σχέσεις για το σύστημα S΄.

Αν, στο σύστημα S, κατά την αντίδραση $n$ σωματιδίων η ορμή και η μάζα-ενέργεια διατηρούνται, τότε, για τις ολικές τιμές των συνιστωσών της ορμής και για την ολική ενέργεια ισχύουν:

$$\boxed{\begin{gathered}\left(P_{x,\,\text{ολ}}\right)_{\text{πριν}} = \left(P_{x,\,\text{ολ}}\right)_{\text{μετά}} \qquad \left(P_{y,\,\text{ολ}}\right)_{\text{πριν}} = \left(P_{y,\,\text{ολ}}\right)_{\text{μετά}} \qquad \left(P_{z,\,\text{ολ}}\right)_{\text{πριν}} = \left(P_{z,\,\text{ολ}}\right)_{\text{μετά}} \\ \left(E_{\text{ολ}}\right)_{\text{πριν}} = \left(E_{\text{ολ}}\right)_{\text{μετά}}\end{gathered}}$$

Τα σωματίδια μπορούν απλώς να ανταλλάξουν ενέργεια, αλλά και να μετασχηματιστούν σε άλλα σωματίδια, να εξαφανιστούν τελείως μετατρεπόμενα σε ενέργεια ή και να δημιουργηθούν από την ενέργεια που γίνεται διαθέσιμη κατά την αλληλεπίδραση.

***Μονάδες της ενέργειας, της μάζας και της ορμής***

**Ενέργεια.** Στην Ατομική Φυσική, την Πυρηνική Φυσική και στη Φυσική των Στοιχειωδών Σωματιδίων, χρησιμοποιούμε ως μονάδα ενέργειας το ηλεκτρονιοβόλτ (eV).

Πολλαπλάσια αυτής της μονάδας που χρησιμοποιούνται είναι το keV $\left(10^3 \text{ eV}\right)$, το MeV $\left(10^6 \text{ eV}\right)$, το GeV $\left(10^9 \text{ eV}\right)$ ή ακόμη και το TeV $\left(10^{12} \text{ eV}\right)$.

**Μάζα.** Το μέγεθος $m_0c^2$ έχει διαστάσεις ενέργειας και μετριέται, συνήθως, για σχετικιστικά σωματίδια, σε MeV ή GeV. Συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε τα MeV/$c^2$ ή GeV/$c^2$ ως μονάδες της μάζας. Έτσι, αν βρούμε, π.χ., το αριθμητικό αποτέλεσμα $m_0c^2 = \text{X MeV}$, εκφράζουμε τη μάζα ως $m_0 = \text{X MeV}/c^2$.

**Ορμή.** Για την ορμή, αν υπολογίσουμε το μέγεθος $pc$, το οποίο επίσης έχει διαστάσεις ενέργειας, και βρούμε, π.χ., το αριθμητικό αποτέλεσμα $pc = \text{X MeV}$, εκφράζουμε την ορμή ως $p = \text{X MeV}/c$.



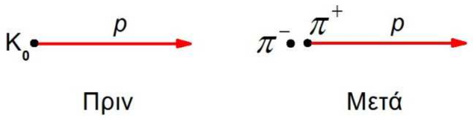
Τα πλεονεκτήματα από τη χρήση αυτών των μονάδων είναι ότι έχουμε μικρούς αριθμούς για την ενέργεια, μάζα και ορμή των σχετικιστικών σωματιδίων, και ότι οι αριθμοί αυτοί είναι συνήθως της ίδια τάξης μεγέθους.

Στη Θεωρία της Σχετικότητας χρησιμοποιείται συχνά και ένα σύστημα μονάδων στο οποίο λαμβάνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό ως ίση με τη μονάδα . Αυτό «εξαφανίζει» το σύμβολο $c$ από όλες τις εξισώσεις, οδηγώντας σε μια απλοποίηση.

## Παράδειγμα: Διάσπαση καονίου

Ένα ουδέτερο καόνιο διασπάται σε δύο πιόνια, $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$
Αν το παραγόμενο αρνητικό πιόνιο είναι ακίνητο, ποια είναι η ολική ενέργεια του θετικού πιονίου; Ποια ήταν η ολική ενέργεια του καονίου;
Δίνονται οι μάζες ηρεμίας: του $K^0$ ίση με $498\ \mathrm{MeV}/c^2$
και των $\pi^{\pm}$ ίση με $139\ \mathrm{MeV}/c^2$ .

Έστω ότι η μάζα ηρεμίας του $K^0$ είναι $M_0$ και των $\pi^{\pm}$ είναι $m_0$. Αφού το $\pi^+$ είναι το μόνο σωματίδιο που κινείται μετά τη διάσπαση, η διατήρηση της ορμής υπαγορεύει η ορμή του να είναι ίση με την ορμή $\mathbf{p}$ του $K^0$.




Αν $E_K$ είναι η ολική ενέργεια του $K^0$, η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει

$$E_K = m_0c^2 + m_0c^2\gamma \qquad (1)$$



Όμως, η ολική ενέργεια του $\pi^+$ είναι $E_\pi = m_0c^2\gamma = \sqrt{\left(m_0c^2\right)^2 + (pc)^2} \qquad (2)$

και του καονίου $E_K = \sqrt{\left(M_0c^2\right)^2 + (pc)^2} \qquad (3)$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2) και (3) στην (1) [ $E_K = m_0c^2 + m_0c^2\gamma$ ] έχουμε

$$\sqrt{\left(M_0c^2\right)^2 + (pc)^2} = m_0c^2 + \sqrt{\left(m_0c^2\right)^2 + (pc)^2}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο,

$$\left(M_0c^2\right)^2 + \cancel{(pc)^2} = \left(m_0c^2\right)^2 + \left(m_0c^2\right)^2 + \cancel{(pc)^2} + 2m_0c^2\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2 + (pc)^2}$$

$$\left(M_0c^2\right)^2 - 2\left(m_0c^2\right)^2 = 2m_0c^2E_\pi$$

και, επομένως,

$$E_\pi = m_0 c^2 \left( \frac{M_0^2}{2m_0^2} - 1 \right)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (1) [ $E_K = m_0 c^2 + m_0 c^2 \gamma$ ],

$$E_K = m_0 c^2 + E_\pi = m_0 c^2 \left( \frac{M_0^2}{2m_0^2} \right)$$

ή

$$E_K = \frac{M_0^2 c^2}{2m_0} .$$

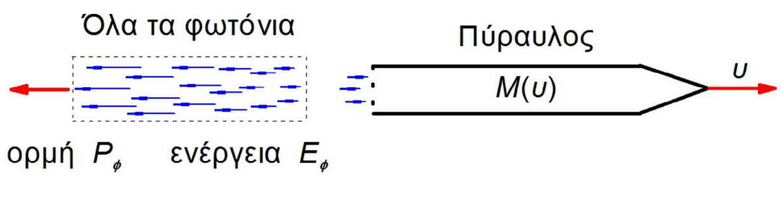
Έτσι,

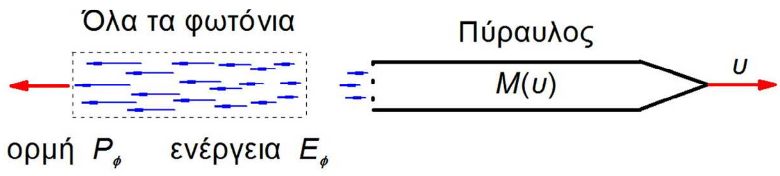
$$E_K = \frac{498^2}{2 \times 139} = 892 \text{ MeV}$$



- **Παράδειγμα: Πύραυλος Φωτονίων**

Έχει προταθεί η χρήση φωτονίων για την προώθηση πυραύλων. Ενώ για τα χημικά καύσιμα υπάρχει ένα όριο ταχύτητας αποβολής μάζας της τάξης των 10 km/s, για τα φωτόνια αυτή η ταχύτητα είναι 30 000 φορές μεγαλύτερη και γι’ αυτό η εκπομπή από τον πύραυλο φωτονίων, με τη μεγάλη τους ταχύτητα, θεωρείται ότι θα προσδώσει στον πύραυλο μεγαλύτερη ταχύτητα ανά μονάδα μάζας που αποβάλλεται ως φως. Να βρεθεί η ταχύτητα που επιτυγχάνεται με αυτήν την μέθοδο, ως κλάσμα *κ* της μάζας του πυραύλου που αποβάλλεται στη μορφή των φωτονίων.






Έστω ότι η αρχική μάζα του πυραύλου είναι $M_0$. Αν σε κάποια χρονική στιγμή έχει αποβληθεί ένα κλάσμα $\kappa$ της αρχικής μάζας, τα φωτόνια που εκπέμφθηκαν μεταφέρουν, συνολικά, ενέργεια $E_\phi$ και ορμή $P_\phi = E_\phi / c$. Αν εκείνη τη στιγμή ο πύραυλος κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ και έχει μάζα $M(\upsilon) = (1-\kappa)M_0\gamma$, όπου $\gamma = 1\big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$, οι αρχές της διατήρησης μας δίνουν:

Διατήρηση ενέργειας: $E_{\text{ολική}} = M_0c^2 = M(\upsilon)c^2 + E_\phi = (1-\kappa)M_0c^2\gamma + E_\phi$

Διατήρηση ορμής: $P_{\text{ολική}} = 0 = M(\upsilon)\upsilon + E_\phi / c = (1-\kappa)M_0\gamma\upsilon - E_\phi / c$



Από τις δύο αυτές σχέσεις, απαλείφοντας την $E_\phi$, προκύπτει ότι

$$M_0c^2 = (1-\kappa)M_0c^2\gamma(1+\beta) \qquad \text{ή} \qquad (1-\kappa)\gamma(1+\beta) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad (1-\kappa)\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1-\beta}{1+\beta} = (1-\kappa)^2$$

από την οποία βρίσκουμε

$$\beta = \frac{1-(1-\kappa)^2}{1+(1-\kappa)^2} \qquad \text{και} \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left(1-\kappa+\frac{1}{1-\kappa}\right)$$

που δίνουν την ταχύτητα και τον παράγοντα Λόρεντς για ένα δεδομένο κλάσμα της αρχικής μάζας ηρεμίας του πυραύλου που έχει εκπεμφθεί ως φωτόνια για την προώθηση του διαστημοπλοίου.

Μερικές αριθμητικές τιμές είναι:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0,5 | 0,9 | 0,95 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |
| $\gamma$ | 1,16 | 2,94 | 3,20 | 7,09 | 10 | 22,4 |
| $\kappa$ | 0,42 | 0,77 | 0,84 | 0,93 | 0,95 | 0,98 |

Βλέπουμε πως, για να πετύχουμε μια ταχύτητα 0,995*c*, που αντιστοιχεί σε $\gamma = 10$ , πρέπει να εκπέμψουμε ως φωτόνια το 95 % της ολικής μάζας του διαστημοπλοίου. Το ωφέλιμο φορτίο είναι, επομένως, μόνο το 5 % της αρχικής μάζας ηρεμίας του διαστημοπλοίου.

Αν επίσης επιθυμούμε να επιβραδύνουμε το διαστημόπλοιο μέχρι να σταματήσει, να το επιταχύνουμε προς τα πίσω, και να το ξαναφέρουμε στο σημείο εκκίνησης, το οφέλιμο φορτίο θα είναι μόνο $(1-\kappa)^4$ που έχει τιμή περίπου $10^{-5}$. Αυτό κάνει τα διαστημόπλοια με πυραύλους φωτονίων αμφίβολης χρησιμότητας.

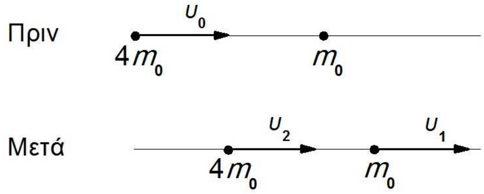


## Παράδειγμα: Ελαστική κρούση.
## Κλασική Μηχανική – Σχετικιστική Μηχανική

Σωματίδιο με μάζα $4m_0$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0 = \frac{4}{5}c$ και συγκρούεται ελαστικά με ένα άλλο σωματίδιο το οποίο έχει μάζα $m_0$ και είναι αρχικά ακίνητο. Μετά την κρούση, τα δύο σωματίδια κινούνται πάνω στην ευθεία κίνησης του αρχικά κινούμενου σωματιδίου.

Να βρεθούν οι τελικές ταχύτητες των δύο σωματιδίων, σύμφωνα με (α) την Κλασική Μηχανική και (β) τη Σχετικιστική Μηχανική.
Να υπολογιστούν και οι κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχές της διατήρησης της ενέργειας και της διατήρηση της ορμής. Έστω ότι μετά την κρούση το σωματίδιο με μάζα $m_0$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1$ και το σωματίδιο με μάζα $4m_0$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_2$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



***(α) Λύση σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική***

Διατήρηση της ενέργειας: $\frac{1}{2}4m_0\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_0\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}4m_0\upsilon_2^2$ (1)

Διατήρηση της ορμής: $4m_0\upsilon_0 = m_0\upsilon_1 + 4m_0\upsilon_2$ (2)

Αυτές απλοποιούνται σε

$$\upsilon_1^2 + 4\upsilon_2^2 = \frac{64}{25}c^2 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \upsilon_1 + 4\upsilon_2 = \frac{16}{5}c \quad (4)$$

Η Εξ. (4) δίνει $\upsilon_1 = \frac{16}{5}c - 4\upsilon_2$ (5)

η οποία μπορεί να αντικατασταθεί στην Εξ. (3), οπότε έχουμε

$$\left(\frac{16}{5}c - 4\upsilon_2\right)^2 + 4\upsilon_2^2 = \frac{64}{25}c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{256}{25}c^2 - \frac{128}{5}c\upsilon_2 + 20\upsilon_2^2 = \frac{64}{25}c^2$$

$$20\upsilon_2^2 - \frac{128}{5}c\upsilon_2 + \frac{192}{25}c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2^2 - \frac{32}{25}c\upsilon_2 + \frac{48}{125}c^2 = 0$$



Μία ρίζα της Εξ. (6) είναι η $\upsilon_{2A} = \frac{4}{5}c$ , οπότε και $\upsilon_{1A} = 0$ .

Αυτή είναι η περίπτωση στην οποία τα σωματίδια δεν μεταβάλλουν τις αρχικές τους καταστάσεις.

Η δεύτερη ρίζα βρίσκεται από την Εξ. (6) ως ίση με

$$\upsilon_{2B} = \frac{32}{25}c - \frac{4}{5}c = \frac{12}{25}c = 0,48c \ . \qquad (7)$$

Η αντίστοιχη ταχύτητα του άλλου σωματιδίου είναι

$$\upsilon_{1B} = \frac{16}{5}c - 4\times\frac{12}{25}c = \frac{32}{25}c = 1,28c \, . \qquad (8)$$

***(β) Λύση σύμφωνα με τη Σχετικιστική Μηχανική***

Προκύπτει το ερώτημα τί ακριβώς εννοούμε με τον όρο «ελαστική κρούση» στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Στην Κλασική Μηχανική, μια κρούση δεν είναι ελαστική αν ένα μέρος της ενέργειας «χάνεται», π.χ. μετατρεπόμενη σε εσωτερική ενέργεια των σωμάτων. Στη Θεωρία της Σχετικότητας η εσωτερική ενέργεια των σωμάτων εκδηλώνεται ως αδράνεια και επομένως λαμβάνεται υπόψη κατά τη διατήρηση της ενέργειας.

Θα θεωρήσουμε επομένως ότι με τον όρο «ελαστική κρούση» τίθεται η επιπρόσθετη συνθήκη ότι οι μάζες ηρεμίας των σωμάτων παραμένουν οι ίδιες κατά την κρούση.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ανηγμένες ταχύτητες

$$\beta_0 = \frac{\upsilon_0}{c} = \frac{4}{5}, \quad \beta_1 = \frac{\upsilon_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{\upsilon_2}{c} \qquad (9)$$

και τους παράγοντες Λόρεντς

$$\gamma_0 = 1\Big/\sqrt{1-\beta_0^2} = \frac{5}{3}, \quad \gamma_1 = 1\Big/\sqrt{1-\beta_1^2}, \quad \gamma_2 = 1\Big/\sqrt{1-\beta_2^2}\,. \qquad (10)$$



Διατήρηση της ενέργειας: $m_0c^2 + 4\gamma_0 m_0 c^2 = \gamma_1 m_0 c^2 + 4\gamma_2 m_0 c^2$ (11)

Διατήρηση της ορμής: $4\gamma_0 m_0 c\beta_0 = \gamma_1 m_0 c\beta_1 + 4\gamma_2 m_0 c\beta_2$ (12)

Αυτές απλοποιούνται σε

$1 + 4\gamma_0 = \gamma_1 + 4\gamma_2$ (13) και $4\gamma_0\beta_0 = \gamma_1\beta_1 + 4\gamma_2\beta_2$. (14)

Αυτές πρέπει να λυθούν για τα $\beta$. Αντικαθιστώντας για τα $\beta_0$ και $\gamma_0$, έχουμε

$$\gamma_1 + 4\gamma_2 = \frac{23}{3} \quad (15) \qquad \text{και} \qquad \gamma_1\beta_1 + 4\gamma_2\beta_2 = \frac{16}{3} \quad (16)$$

Αφαιρώντας την Εξ. (16) από την Εξ. (15),

$$\gamma_1(1-\beta_1) + 4\gamma_2(1-\beta_2) = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}} + 4\sqrt{\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2}} = \frac{7}{3} \qquad (17)$$

Προσθέτοντας την Εξ. (16) στην Εξ. (15),

$$\gamma_1(1+\beta_1) + 4\gamma_2(1+\beta_2) = 13 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}} + 4\sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}} = 13 \qquad (18)$$

οι οποίες πρέπει να λυθούν για τα $\beta$.

Ορίζουμε τις μεταβλητές $x=\sqrt{\dfrac{1-\beta_1}{1+\beta_1}}$ και $y=\sqrt{\dfrac{1-\beta_2}{1+\beta_2}}$, οπότε είναι

$$\beta_1=\frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad \text{και} \qquad \beta_2=\frac{1-y^2}{1+y^2}\,. \tag{19}$$

Τότε είναι $x+4y=\dfrac{7}{3}$ (20) και $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=13.$ (21)

Από την Εξ. (20) $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{7/3-x}=\dfrac{12}{7-3x}$ , (22)

την οποία αντικαθιστούμε στην Εξ. (21) για να βρούμε

$$\frac{1}{x}+\frac{48}{7-3x}=13 \qquad \Rightarrow \qquad 7-3x+48x=13x(7-3x)\,. \tag{23}$$

$$\Rightarrow \qquad 7+45x=91x-39x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 39x^2-46x+7=0\,. \tag{24}$$



Μια λύση της Εξ. (24) είναι η $x_A=1$, για την οποία, από την Εξ. (20), προκύπτει ότι $y_A=1/3$. Οι αντίστοιχες τιμές των $\beta$ είναι: $\beta_{1A}=0$, $\beta_{2A}=\dfrac{1-1/9}{1+1/9}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$. Και πάλι, αυτή είναι η περίπτωση στην οποία οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων δεν μεταβάλλονται κατά την «κρούση».

Η δεύτερη λύση της Εξ. (24) είναι ίση με $x_B=\dfrac{46}{39}-1=\dfrac{7}{39}$, οπότε και $y_B=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{7}{3}-x_B\right)=\dfrac{21}{39}$. Οι αντίστοιχες τιμές των $\beta$ είναι:

$$\beta_{1B}=\frac{1-7^2/39^2}{1+7^2/39^2}=\frac{1521-49}{1521+49}=\frac{736}{785}=0,94 \qquad (\Rightarrow\ \gamma_{1B}=2,88\ )$$

$$\beta_{2B}=\frac{1-21^2/39^2}{1+21^2/39^2}=\frac{1521-441}{1521+441}=\frac{540}{981}=\frac{60}{109}=0,55 \qquad (\Rightarrow\ \gamma_{2B}=1,20\ )$$

**Κινητικές ενέργειες:**

| | *Πριν* | | *Μετά* | |
|---|---|---|---|---|
| | Μάζα $m_0$ | Μάζα $4m_0$ | Μάζα $m_0$ | Μάζα $4m_0$ |
| Κλασική Μηχανική | 0 | $1,28\, m_0c^2$ | $0,46\, m_0c^2$ | $0,82\, m_0c^2$ |
| Σχετικιστική Μηχανική | 0 | $2,67\, m_0c^2$ | $0,79\, m_0c^2$ | $1,88\, m_0c^2$ |

Παρατηρούμε ότι, και στη σχετικιστική περίπτωση, επειδή οι μάζες ηρεμίας των σωμάτων δεν αλλάζουν, εκτός από την ολική ενέργεια διατηρείται και η ολική κινητική ενέργεια. Αυτό δε θα συνέβαινε αν υπήρχε μεταβολή στην ολική μάζα ηρεμίας των σωμάτων.