4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ

Το μεσονικό παράδοξο

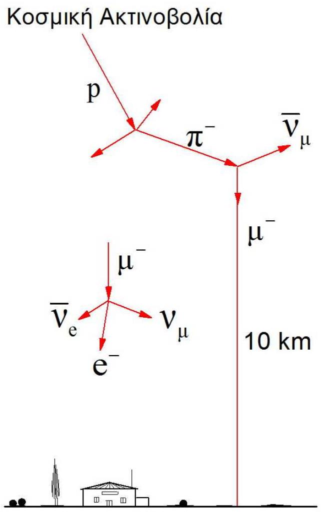
Η κοσμική ακτινοβολία (κυρίως πρωτόνια) αλληλεπιδρά με τα άτομα του αέρα στα υψηλά στρώματα της ατμόσφαιρας και παράγει σωματίδια $\pi^{\pm}$. Αυτά διασπώνται σε μιόνια και νετρίνα $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $\quad \pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$
με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\pi = 25\ \text{ns}$.

Τα μιόνια, στη συνέχεια, διασπώνται

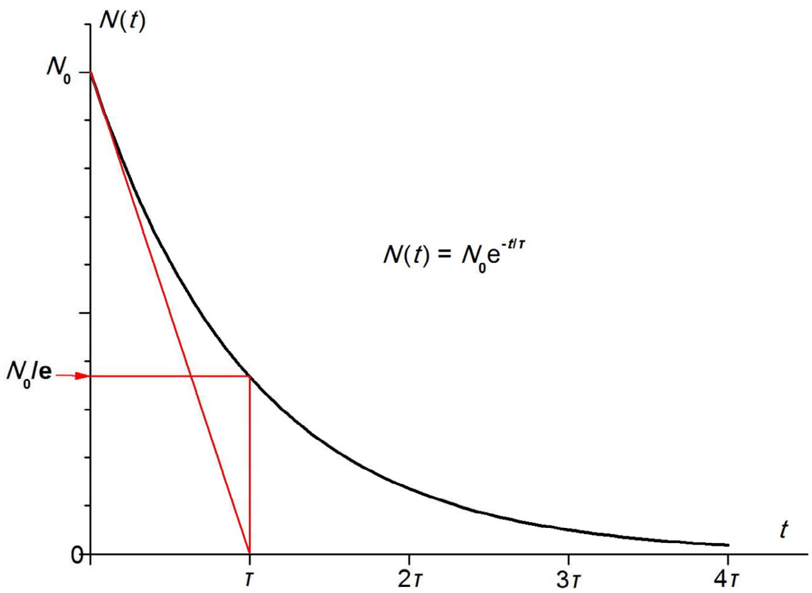
$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ $\quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

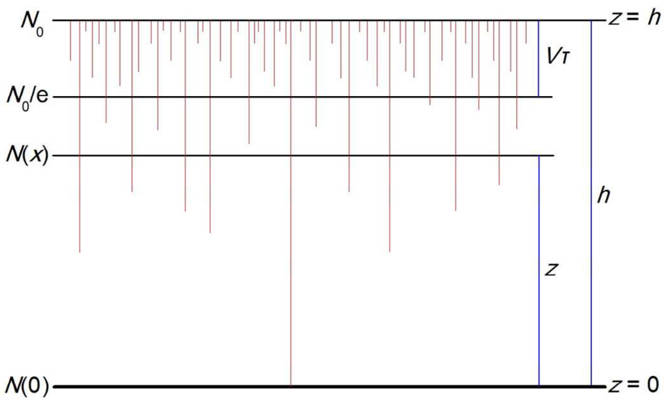
με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\mu = 2\ \mu\text{s}$,
σύμφωνα με τον νόμο της ραδιενέργειας,

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$



Ο νόμος της ραδιενέργειας





Θα υποθέσουμε, χάριν απλότητας, ότι όλα τα μιόνια παράγονται στο ίδιο ύψος h και ότι έχουν όλα ανηγμένη ταχύτητα β, κινούμενα κατακόρυφα προς τα κάτω.

Ο χρόνος που θα απαιτηθεί για να φτάσουν τα μιόνια στην επιφάνεια της θάλασσας θα είναι $t = h/V = h/c\beta$.

Ο αριθμός των μιονίων που θα επιβιώσουν μετά από αυτό το ταξίδι στην ατμόσφαιρα θα είναι:

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} = N_0 \mathrm{e}^{-h/c\beta\tau}$$

Θέτοντας $h = 10$ km, $\beta = 0,98$ και $\tau = 2$ μs , βρίσκουμε

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-15,5} = 1,94 \times 10^{-7} N_0 = N_0 / 5,2 \times 10^6 ,$$

δηλαδή ότι μόνο ένα μιόνιο στα 5,2 εκατομμύρια θα επιζούσε για να ανιχνευτεί στο έδαφος.

Στην πραγματικότητα όμως παρατηρείται να επιζεί ένα πολύ μεγαλύτερο ποσοστό.

Η ερμηνεία δίνεται από την Ε.Θ.Σ. Στους υπολογισμούς μας αγνοήσαμε το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου. Η τιμή που δίνεται για τη μέση διάρκεια ζωής, τ, των σωματιδίων, δίνεται στο δικό τους σύστημα αναφοράς, μέσα στο οποίο τα σωματίδια είναι ακίνητα. Ο χρόνος t όμως, που χρησιμοποιήσαμε είναι στο σύστημα αναφοράς της Γης.

Αν στο σύστημα της Γης το ταξίδι των σωματιδίων διαρκεί χρόνο $t = h/V = h/c\beta$, στο σύστημα των σωματιδίων θα διαρκέσει χρόνο ίσο με $t' = t/\gamma = h/c\beta\gamma$.

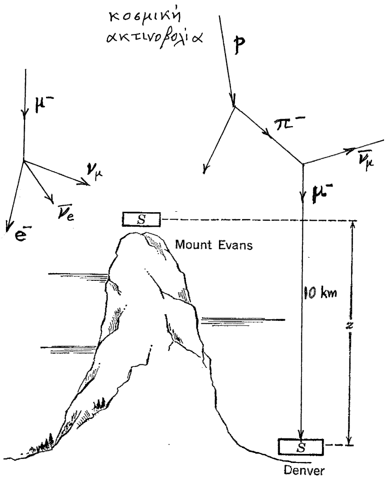
Για $\beta = 0{,}98$, είναι $\gamma = 5$ και έτσι έχουμε $N(t') = N_0 \mathrm{e}^{-t/\gamma\tau} = N_0 \mathrm{e}^{-h/c\beta\gamma\tau}$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε: $N(t') = N_0 \mathrm{e}^{-3{,}1} = 0{,}0454 N_0 = N_0 / 22$

δηλαδή ότι ένα μιόνιο στα 22 θα επιζήσει για να ανιχνευτεί στο έδαφος.

Εναλλακτικά, εργαζόμενοι στο σύστημα αναφοράς της Γης, πρέπει να πάρουμε ως μέση διάρκεια ζωής των σωματιδίων την τιμή $\gamma\tau$, που είναι γ φορές μεγαλύτερη αυτής των σωματιδίων σε ηρεμία λόγω της διαστολής του χρόνου, όπως προβλέπει η Ε.Θ.Σ., σε συμφωνία με το πείραμα.

Πειραματική επιβεβαίωση της Ε.Θ.Σ. στο μεσονικό παράδοξο



Οι B. Rossi κ.ά. (1940-1942), μέτρησαν μια μείωση κατά έναν παράγοντα 1,43 στον αριθμό των μιονίων ανάμεσα σε δύο σημεία με διαφορά υψομέτρου 1624 m.

Χωρίς τη σχετικιστική διόρθωση για τη διαστολή του χρόνου, επειδή η μέση διάρκεια ζωής των μιονίων είναι 2 μs, και αφού κινούνται σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός, σε 2 μs τα μιόνια θα διένυαν 600 m και ο αριθμός τους θα μειωνόταν κατά έναν παράγοντα e = 2,718.

Ο ρυθμός μείωσης με το ύψος, που μέτρησαν οι Rossi κ.ά. είναι πολύ μικρότερος.

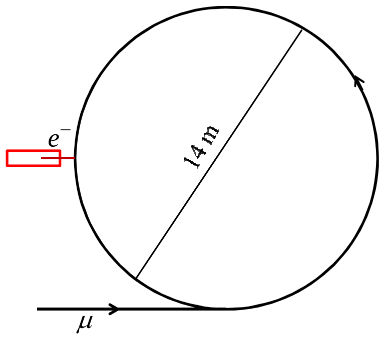
Πειραματικός έλεγχος του φαινομένου της διαστολής του χρόνου σε πειράματα με μιόνια στο CERN (J. Bailey κ.ά., 1977)

Μιόνια $\mu^{\pm}$ από τη δέσμη μιονίων του CERN αποθηκεύονταν σε δακτύλιο διαμέτρου 14 m, όπου κυκλοφορούσαν με ταχύτητα που αντιστοιχούσε σε $\beta = 0,9994$ και $\gamma = 29,3$. Τα μιόνια διασπώνται

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \qquad\qquad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Οι διασπάσεις των καταγράφονταν με ανίχνευση των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων.

Η περίοδος περιφοράς των μιονίων στον δακτύλιο είναι περίπου 0,150 μs, που είναι μικρή σε σχέση με τη μέση διάρκεια ζωής τους, που είναι $\tau_\mu = 2$ μs.



Προσδιορίστηκε έτσι η μέση διάρκεια ζωής των ταχέων αυτών μιονίων. Για τα μ^+ μετρήθηκε $\tau_{\text{E}}^+ = 64,419 \pm 0,058$ μs και για τα μ^- $\tau_{\text{E}}^- = 64,368 \pm 0,029$ μs (δείκτης Ε = στο σύστημα του εργαστηρίου).

Από τις μετρήσεις αυτές προκύπτει η μέση διάρκεια ζωής για τα σωματίδια στο σύστημά τους, $\tau^{\pm} = \tau_{\text{E}}^{\pm} / \gamma$, όπως προβλέπει η θεωρία.

Αυτές οι τιμές μπορούν να συγκριθούν με μετρήσεις των $\tau^{\pm}$ ηρεμίας, σε σωματίδια που είχαν πολύ μικρότερες ταχύτητες. Η σύγκριση έδωσε, για τα μ^+

$$\frac{\tau^+ - \tau_{\text{E}}^+ / \gamma}{\tau^+} = (2 \pm 9) \times 10^{-4} ,$$

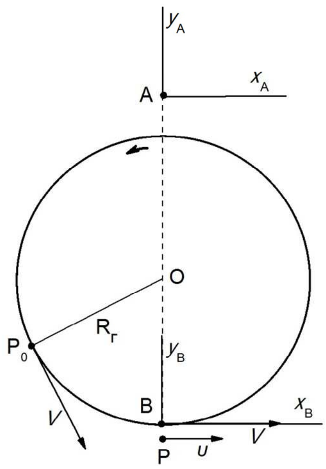
με αντίστοιχα αποτελέσματα για τα μ^-.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση των μιονίων στην τροχιά τους είναι της τάξης του 10^{16} m/s^2 $= 10^{15} g$, και όμως οι προβλέψεις της Ε.Θ.Σ. εξακολουθούν να ισχύουν!

Ρολόγια γύρω από τη Γη. Το φαινόμενο Sagnac

Ένα ρολόι P μετακινείται με μικρή σταθερή ταχύτητα υ, προς ανατολάς, κατά μήκος του Ισημερινού. Ένα άλλο ρολόι, P_0 , παραμένει ακίνητο στη Γη στο σημείο από όπου αρχίζει το ταξίδι το κινούμενο ρολόι, και όπου θα επανέλθει μετά από μια πλήρη περιφορά γύρω από τη Γη.

Θα επικαλεστούμε αδρανειακό παρατηρητή Α, εκτός της Γης (η οποία δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Αν σε κάποια στιγμή το κινούμενο ρολόι P βρίσκεται πάνω από παρατηρητή Β, σε σχέση με τον οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V}=V\hat{\mathbf{x}}$, η ταχύτητά του ως προς τον Α θα έχει μέτρο ...



$$\upsilon_A=\frac{\upsilon+V}{1+\dfrac{\upsilon V}{c^2}}$$ στην οποία αντιστοιχεί $$\gamma_A=\left(1-\frac{(\upsilon+V)^2}{c^2}\left(1+\frac{\upsilon V}{c^2}\right)^{-2}\right)^{-1/2}$$

Αν περάσει χρόνος Δt_A για τον Α,
για το ρολόι P_0 θα περάσει χρόνος $$\Delta t_0=\Delta t_A\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

και για το ρολόι P θα περάσει χρόνος $$\Delta t=\Delta t_A\sqrt{1-\frac{(\upsilon+V)^2}{c^2}\left(1+\frac{\upsilon V}{c^2}\right)^{-2}}$$

Ο λόγος των δύο χρονικών διαστημάτων είναι

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0}=\sqrt{1-\frac{(\upsilon+V)^2}{c^2}\left(1+\frac{\upsilon V}{c^2}\right)^{-2}}\Bigg/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Αν το κινούμενο ρολόι διαγράψει μια περιφορά γύρω από τη Γη κατά μήκος του Ισημερινού σε χρόνο T_0 για τον P_0 και T για τον P , θα είναι:

$$\frac{T}{T_0}=\left(1-\frac{(\upsilon+V)^2}{c^2}\left(1+\frac{\upsilon V}{c^2}\right)^{-2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Αναπτύσσουμε τις ρίζες για $V \ll c$ και διατηρούμε μόνο όρους μέχρι τις δυνάμεις V^2/c^2 , υ^2/c^2 και $\upsilon V/c^2$:

$$\frac{T}{T_0} \approx \left(1-\frac{1}{2}\frac{(\upsilon+V)^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right) \approx 1+\cancel{\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}}-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}-\frac{\upsilon V}{c^2}-\cancel{\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}}$$

και τελικά: $\frac{T}{T_0} \approx 1-\frac{\upsilon^2}{2c^2}-\frac{\upsilon V}{c^2} = 1-\frac{\upsilon V}{c^2}\left(1+\frac{\upsilon}{2V}\right)$.

Η διαφορά της ένδειξης του ρολογιού που κινήθηκε γύρω από τη Γη (κινούμενο προς ανατολάς) από την ένδειξη του ρολογιού που ήταν ακίνητο ως προς τη Γη, θα είναι:

$$\Delta T = T - T_0 = -\frac{\upsilon V}{c^2} T_0 \left(1+\frac{\upsilon}{2V}\right) .$$

Αν επίσης είναι $\upsilon \ll V$, τότε $\Delta T = T - T_0 \approx -\frac{\upsilon V}{c^2} T_0$.

Όμως, είναι $\upsilon T_0 = 2\pi R_\Gamma$, όπου R_Γ είναι η ισημερινή ακτίνα της Γης.

Επίσης είναι $V = \frac{2\pi R_\Gamma}{T_\Gamma}$, όπου $T_\Gamma = 1$ ημέρα είναι η περίοδος περιστροφής της Γης. Επομένως,

για κίνηση προς ανατολάς , θα είναι $\Delta T = -\frac{(2\pi R_\Gamma)^2}{c^2 T_\Gamma} = -207$ ns

ενώ για κίνηση προς δυσμάς, θα είναι $\Delta T = 207$ ns

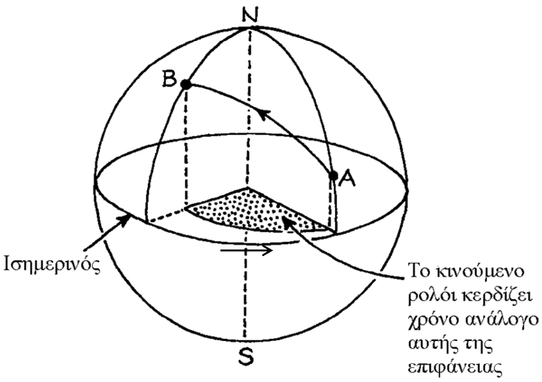
Οι διαφορές είναι ανεξάρτητες από την ταχύτητα *υ* του ρολογιού Ρ. Για μικρή ταχύτητα *υ* η διαστολή του χρόνου είναι μικρότερη αλλά το ταξίδι διαρκεί περισσότερο χρόνο.

Το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου είναι μετρήσιμο χάρη στην ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε τον χρόνο με ατομικά ρολόγια, και χάρη στην εμφάνιση του γινομένου υV μιας μικρής ταχύτητας *υ* με μια σχετικά μεγάλη ταχύτητα *V*.

Αν τα ρολόγια δεν βρίσκονται στον Ισημερινό αλλά πάνω σε έναν παράλληλο με γεωγραφικό πλάτος λ, τότε αντί της ισημερινής ακτίνας R_Γ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ως ακτίνα των τροχιών η $R_\Gamma \cos\lambda$

και $\Delta T = -\frac{(2\pi R_\Gamma \cos\lambda)^2}{c^2 T_\Gamma} = -207\cos^2\lambda \text{ ns}$

Για μια μετακίνηση ΑΒ όπως αυτήν του σχήματος, το κινούμενο ρολόι Β θα πηγαίνει μπροστά σε σχέση με το ακίνητο ρολόι Α κατά χρόνο που είναι ανάλογος της σκιασμένης επιφάνειας στο σχήμα. Ο συντελεστής μετατροπής είναι 1,62 ns ανά 10^6 km^2 επιφάνειας. Η επιφάνεια θεωρείται θετική για κινήσεις προς δυσμάς, και αρνητική για κινήσεις προς ανατολάς.



Για ταχύτητες υ που δεν είναι αμελητέες σε σύγκριση με την V, είναι

$$\Delta T = T - T_0 = \pm 207\left(1+\frac{\upsilon}{2V}\right) \text{ ns} = \pm 207 \text{ ns} - T_0 \frac{\upsilon^2}{2c^2}$$

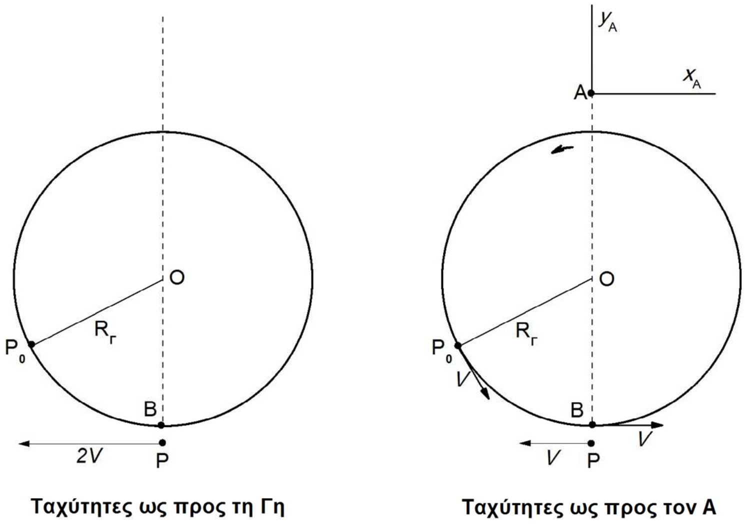
(+ για κίνηση προς τη Δύση και $-$ για κίνηση προς την Ανατολή).

Αν η κίνηση γίνεται σε γεωγραφικό πλάτος λ, η σχέση αυτή γίνεται:

$$\Delta T = T - T_0 = \pm\frac{(2\pi R_\Gamma)^2\cos^2\lambda}{c^2 T_\Gamma} - T_0\frac{\upsilon^2}{2c^2} = \pm 207\cos^2\lambda \text{ ns} - T_0\frac{\upsilon^2}{2c^2}$$

Ερώτηση: Για $\upsilon = -2V$ θα είναι $\Delta T = 0$. Γιατί;

Ερώτηση: Για $\upsilon = -2V$ θα είναι $\Delta T = 0$. Γιατί;



Παράδειγμα:

Με $R_\Gamma = 6378$ km (η ισημερινή ταχύτητα της Γης), είναι

$$V = 1670 \text{ km/h} = 464 \text{ m/s}$$

Για αεροπλάνο που κινείται στον Ισημερινό με την ταχύτητα του ήχου στον αέρα, έχουμε $\upsilon = 340$ m/s

για κίνηση προς ανατολάς $\left(1+\dfrac{\upsilon}{2V}\right) = 1+\dfrac{340}{2\times 464} = 1{,}37$, και $\Delta T = -383$ ns

και για κίνηση προς δυσμάς $\left(1+\dfrac{\upsilon}{2V}\right) = 1-\dfrac{340}{2\times 464} = 0{,}634$ $\Delta T = 131$ ns

Το πείραμα των Hafele και Keating

Το 1971, οι Hafele και Keating έβαλαν 4 ατομικά ρολόγια δέσμης καισίου σε ένα εμπορικό αεροπλάνο και έκαναν τον γύρο της Γης σε 41 ώρες πετώντας προς ανατολάς. Σε μια άλλη πτήση έκαναν τον γύρο της Γης σε 49 ώρες πετώντας προς δυσμάς.

Οι ενδείξεις των ρολογιών που ταξίδεψαν συγκρίθηκαν στο τέλος με αυτές άλλων ατομικών ρολογιών που παρέμειναν στην επιφάνεια της Γης, στο αρχικό σημείο εκκίνησης.

Οι διαφορές των ενδείξεων των ιπτάμενων ρολογιών από τις ενδείξεις των επίγειων προέκυψε από δύο φαινόμενα:

1. Σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, ένα ρολόι που βρίσκεται σε ύψος *h* μέσα σε βαρυτικό πεδίο έντασης (επιτάχυνσης της βαρύτητας) *g*, θα προηγηθεί ενός ρολογιού που βρίσκεται σε μηδενικό ύψος κατά χρόνο

$$(\Delta T)_\Gamma = \frac{gh}{c^2} T_0$$

2. Σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, ένα ρολόι που κινείται με ταχύτητα υ ως προς την επιφάνεια της Γης σε γεωγραφικό πλάτος λ θα προηγηθεί ενός ρολογιού που είναι ακίνητο ως προς τη Γη κατά χρόνο

$$(\Delta T)_\mathrm{E} = -\frac{\upsilon V}{c^2} T_0 \left(1 + \frac{\upsilon}{2V}\right)\cos^2\lambda$$

Επειδή κατά τη διάρκεια της πτήσης τα *h*, *υ* και *λ* μεταβάλλονται, η διαφορά στις ενδείξεις των ρολογιών θα είναι:

$$\Delta T = (\Delta T)_\mathrm{E} + (\Delta T)_\Gamma = \int_0^{T_0} \frac{gh}{c^2} dt - \int_0^{T_0} \frac{\upsilon V}{c^2} T_0 \left(1 + \frac{\upsilon}{2V}\right)\cos^2\lambda dt$$

Τα αποτελέσματα του πειράματος των Hafele και Keating

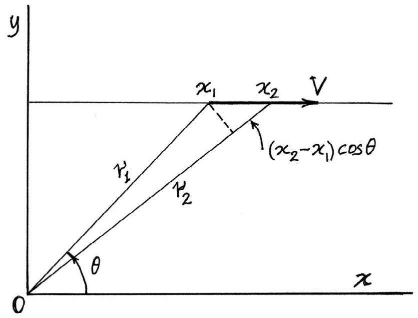
		Χρόνος κατά τον οποίο τα ιπτάμενα ρολόγια προηγούνται αυτών που έμειναν στη γη (ns)	
		Πτήση προς τη Δύση (διάρκεια 49 h)	Πτήση προς την Ανατολή (διάρκεια 41 h)
Θεωρητική πρόβλεψη:	Λόγω της κίνησης (Ε.Θ.Σ.)	96 ± 10	-184 ± 18
	Λόγω της βαρύτητας (Γ.Θ.Σ.)	179 ± 18	144 ± 14
Συνολική θεωρητικά προβλεπόμενη διαφορά χρόνου		275 ± 21	-40 ± 23
Διαφορά χρόνου που μετρήθηκε		273 ± 7	-59 ± 10
|Διαφορά θεωρίας-πειράματος|		2 ± 22	19 ± 25

Η συμφωνία ανάμεσα στις θεωρητικές προβλέψεις και τις πειραματικές μετρήσεις είναι πολύ καλή.

Το φαινόμενο Ντόπλερ

Πηγή που εκπέμπει παλμούς φωτός με περίοδο T_0 βρίσκεται, ως προς έναν παρατηρητή στο σημείο Ο του συστήματος S, σε μια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x και κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$.

Στο σύστημα S, τη χρονική στιγμή t_1, όταν η πηγή βρίσκεται στη θέση x_1, εκπέμπει έναν παλμό.



Μετά από χρόνο T_0, στο σύστημα της πηγής, η πηγή εκπέμπει τον επόμενο παλμό, από τη θέση x_2 στο S. Λόγω της διαστολής του χρόνου είναι $t_2 - t_1 = \gamma T_0$, όπου $\gamma = 1 / \sqrt{1 - (V^2 / c^2)^2}$.

Οι παλμοί έχουν να ταξιδέψουν, αντιστοίχως, αποστάσεις r_1 και r_2 για να φτάσουν στον παρατηρητή στο Ο. Η διαφορά στους χρόνους άφιξης των δύο παλμών στο Ο θα είναι, επομένως,

$$T = \left(t_2 + \frac{r_2}{c}\right) - \left(t_1 + \frac{r_1}{c}\right) = \left(t_2 - t_1\right) + \frac{r_2 - r_1}{c} = \gamma T_0 + \frac{r_2 - r_1}{c}$$

Για $\left|x_2 - x_1\right| \ll r_1, r_2$, είναι $r_2 - r_1 \approx (x_2 - x_1)\cos\theta = \gamma T_0 V \cos\theta$

και επομένως $T = \gamma T_0 + \gamma T_0 (V/c)\cos\theta = \gamma T_0 [1 + (V/c)\cos\theta]$

Τελικα $T = T_0 \dfrac{1 + \beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, όπου $\beta = \dfrac{V}{c}$.

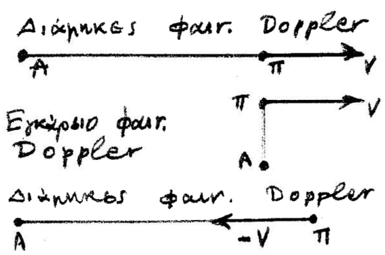
Για τις συχνότητες ισχύει η σχέση $f = f_0 \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\cos\theta}$

<u>Διερεύνηση</u>

Για $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, και

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

διάμηκες φαινόμενο Ντόπλερ με την πηγή να απομακρύνεται από τον παρατηρητή.



Για $\theta = 90^\circ$, $\cos\theta = 0$, και έχουμε το **εγκάρσιο φαινόμενο Ντόπλερ**, Ένα καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο λόγω της διαστολής του χρόνου

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{1-\beta^2}$$

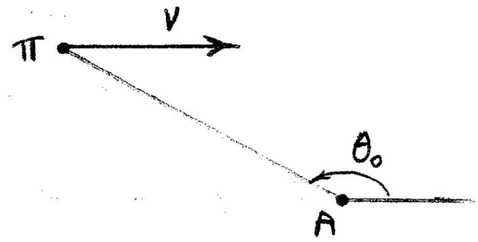
Για $\theta = 180^\circ$, $\cos\theta = -1$, και $\dfrac{f}{f_0} = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

δηλαδή το **διάμηκες φαινόμενο Ντόπλερ**, με την πηγή να κινείται προς τον παρατηρητή.

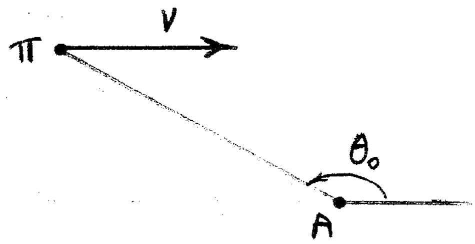
Υπάρχει μια τιμή της γωνίας $\theta = \theta_0$, για την οποία είναι $f = f_0$.

Αυτό συμβαίνει όταν είναι $1+\beta \cos\theta_0 = \sqrt{1-\beta^2}$ ή

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right), \qquad (90^{\mathrm{o}} < \theta_0 < 180^{\mathrm{o}})$$



Γιατί συμβαίνει αυτό;



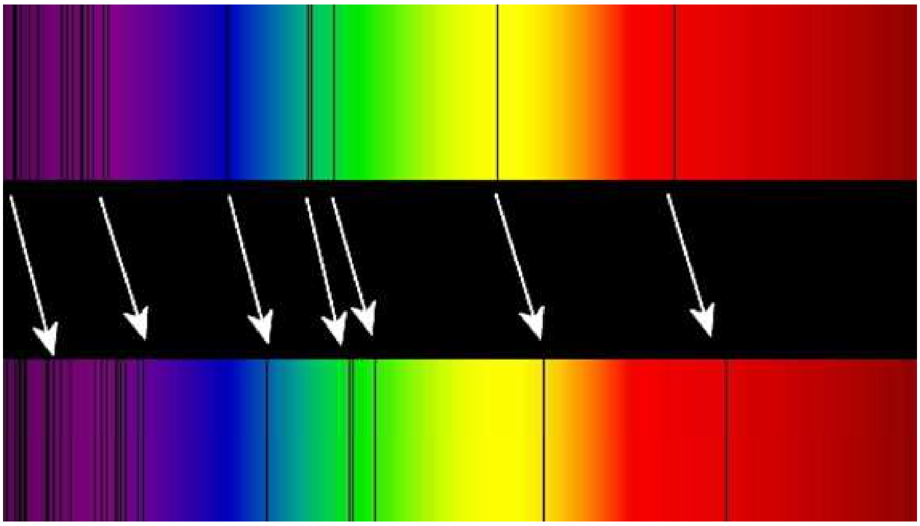
Για $\theta \geq 90^{\mathrm{o}}$ έχουμε δύο φαινόμενα που αλληλοαναιρούνται:

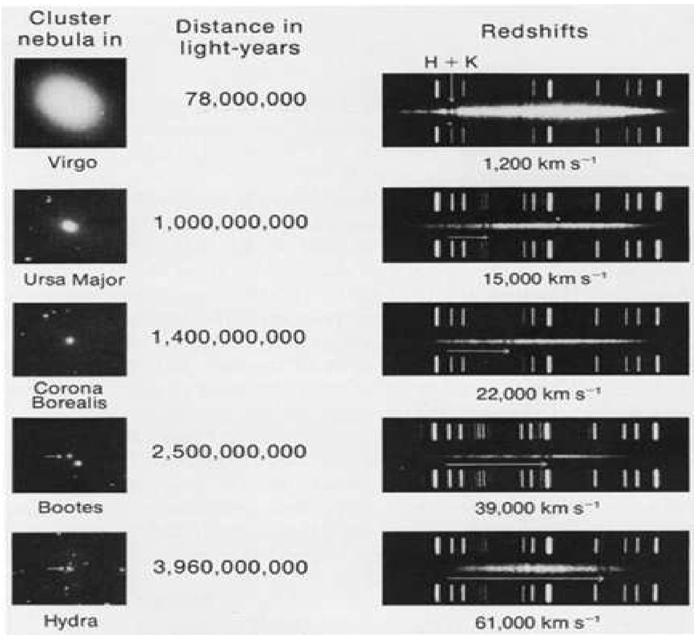
1. Τη σχετικιστική μείωση της συχνότητας που οφείλεται στη διαστολή του χρόνου (εγκάρσιο φαινόμενο Ντόπλερ), και
2. Την αύξηση της συχνότητας που οφείλεται στην ακτινική ταχύτητα προσέγγισης της πηγής στον παρατηρητή.

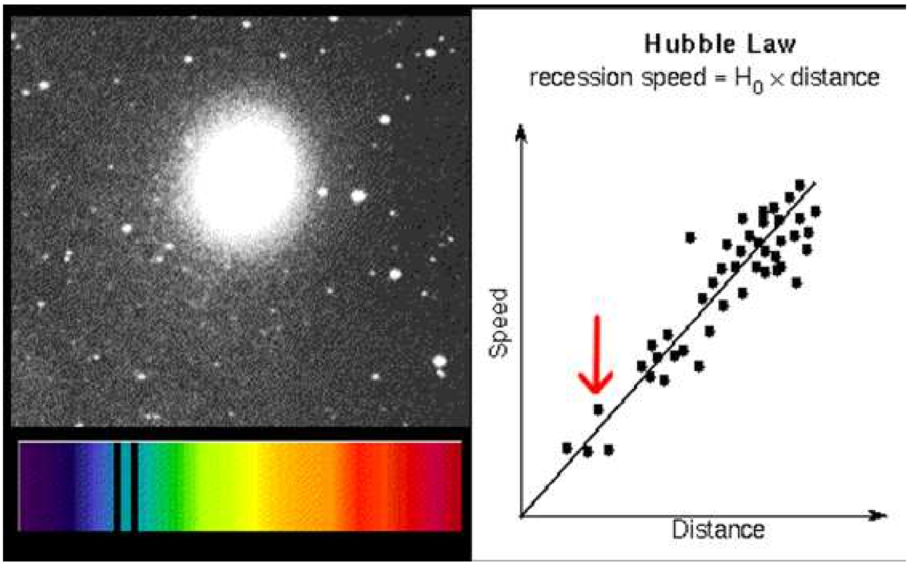
Για $\theta = \theta_0$ τα δύο φαινόμενα αλληλοαναιρούνται πλήρως.

Υπάρχει μια τιμή $90^{\mathrm{o}} \leq \theta_0 \leq 180^{\mathrm{o}}$ για κάθε τιμή του $\beta \leq 1$:

β	0	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999	1
θ_0	90^{o}	$92,9^{\mathrm{o}}$	$105,5^{\mathrm{o}}$	$128,8^{\mathrm{o}}$	$150,2^{\mathrm{o}}$	163^{o}	180^{o}

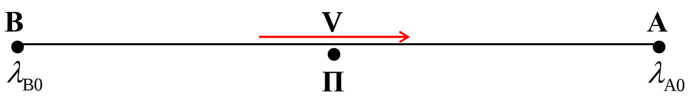



Cluster nebula in
Distance in light-years
Redshifts
H + K
78,000,000
Virgo
1,200 km s⁻¹
1,000,000,000
Ursa Major
15,000 km s⁻¹
1,400,000,000
Corona Borealis
22,000 km s⁻¹
2,500,000,000
Bootes
39,000 km s⁻¹
3,960,000,000
Hydra
61,000 km s⁻¹



Άσκηση. Το φαινόμενο Ντόπλερ

Ένα διαστημόπλοιο μεγάλου μήκους κινείται με ταχύτητα V ως προς παρατηρητή Π. Στα δύο άκρα του διαστημοπλοίου, Α και Β, υπάρχουν δύο πηγές φωτός που εκπέμπουν φως με μήκη κύματος, στο σύστημα του διαστημοποίου, $\lambda_{\mathrm{A0}} = 400\ \mathrm{nm}$ και $\lambda_{\mathrm{B0}} = 700\ \mathrm{nm}$, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στα δύο άκρα του ορατού φάσματος του φωτός. Σε κάποια στιγμή, ο παρατηρητής βρίσκεται ανάμεσα στα άκρα Α και Β (και πολύ κοντά στην ευθεία ΑΒ) με το Α να απομακρύνεται από αυτόν και το Β να τον πλησιάζει. Για ποια ταχύτητα του διαστημοπλοίου, $V_0 = c\beta_0$, ο παρατηρητής θα δει το φως από τα δύο άκρα να έχει το ίδιο μήκος κύματος, λ_{O}, και ποια είναι η τιμή του λ_{O};



Αφού η πηγή Α απομακρύνεται από τον Π, το μήκος κύματος του φωτός από την πηγή Α, όπως το βλέπει ο Π, θα είναι $\lambda_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{A0}}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ όπου $\beta = V/c$. Η πηγή πλησιάζει τον Π και το μήκος κύματος του φωτός από την πηγή Β, όπως το βλέπει ο Π, θα είναι $\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{B0}}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$

Για $\lambda_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{B}}$, πρέπει να είναι: $\lambda_{\mathrm{A0}}\sqrt{\dfrac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} = \lambda_{\mathrm{B0}}\sqrt{\dfrac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}$

Επομένως, $\dfrac{1+\beta_0}{1-\beta_0} = \dfrac{\lambda_{\mathrm{B0}}}{\lambda_{\mathrm{A0}}}$ και $\beta_0 = \dfrac{\lambda_{\mathrm{B0}} - \lambda_{\mathrm{A0}}}{\lambda_{\mathrm{B0}} + \lambda_{\mathrm{A0}}}$

Για αυτή την τιμή του β, είναι

$$\lambda_0 = \lambda_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{A0}}\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\lambda_{\mathrm{B0}}-\lambda_{\mathrm{A0}}}{\lambda_{\mathrm{B0}}+\lambda_{\mathrm{A0}}}}{1-\dfrac{\lambda_{\mathrm{B0}}-\lambda_{\mathrm{A0}}}{\lambda_{\mathrm{B0}}+\lambda_{\mathrm{A0}}}}} = \lambda_{\mathrm{A0}}\sqrt{\dfrac{\lambda_{\mathrm{B0}}}{\lambda_{\mathrm{A0}}}} = \sqrt{\lambda_{\mathrm{A0}}\lambda_{\mathrm{B0}}}$$

Βρήκαμε $\beta_0 = \dfrac{\lambda_{\mathrm{B0}} - \lambda_{\mathrm{A0}}}{\lambda_{\mathrm{B0}} + \lambda_{\mathrm{A0}}}$ και $\lambda_0 = \lambda_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{B}} = \sqrt{\lambda_{\mathrm{A0}}\lambda_{\mathrm{B0}}}$.

Αντικαθιστώντας $\lambda_{\mathrm{A0}} = 400\ \mathrm{nm}$ και $\lambda_{\mathrm{B0}} = 700\ \mathrm{nm}$, βρίσκουμε

$$\beta_0 = \frac{700-400}{700+400} = \frac{3}{11} \quad \text{και}$$

$$\lambda_0 = \lambda_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{B}} = \sqrt{400 \times 700} = 530\ \mathrm{nm}$$

Πειραματική επιβεβαίωση των σχετικιστικών όρων στο φαινόμενο Ντόπλερ

Η εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο Ντόπλερ μπορεί να γραφτεί ως

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1+\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \lambda_0 \left(1+\beta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\beta^2\right)$$

αν ο παρονομαστής αναπτυχθεί μέχρι και το τετράγωνο του β. Η **μετατόπιση Ντόπλερ** στο μήκος κύματος είναι, επομένως,

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \approx \lambda_0 \left(\frac{V}{c}\right)\cos\theta + \frac{\lambda_0}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2$$

Ο πρώτος όρος είναι ο κλασικός όρος ενώ ο δεύτερος προέρχεται από τη σχετικιστική διαστολή του χρόνου. Η σχετικιστική εξίσωση για το φαινόμενο Ντόπλερ μπορεί να ελεγχθεί με ακρίβεια στον δεύτερο όρο.

Οι Ives και Stilwell (1938-41) μέτρησαν την μετατόπιση Ντόπλερ στο φώς που εξέπεμπαν αποδιεγειρόμενα άτομα υδρογόνου στην κατεύθυνση κίνησής τους ($\theta = 0$) και στην αντίθετη κατεύθυνση ($\theta = 180^\circ$).

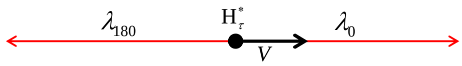
Τα διεγερμένα άτομα του υδρογόνου παρήχθησαν με συγκρούσεις ιονισμένων μορίων υδρογόνου, H_2^+ και H_3^+, τα οποία είχαν επιταχυνθεί σε μια γεννήτρια van-de-Graaf, με άτομα αερίου νέου σε χαμηλή πίεση (της τάξης του 10^{-3} Torr). Μέσω των αντιδράσεων

$$\mathrm{H}_2^+ + \mathrm{Ne} \to \mathrm{H}_\tau^* + [\mathrm{H}^+ + \mathrm{Ne}] \qquad \text{και} \qquad \mathrm{H}_3^+ + \mathrm{Ne} \to \mathrm{H}_\tau^* + [\mathrm{H}_2^+ + \mathrm{Ne}]$$

παράγονται τα ταχέα και διεγερμένα άτομα του υδρογόνου, H_τ^*.
Επιτεύχθησαν έτσι δέσμες ταχέων ατόμων υδρογόνου με ενέργειες που αντιστοιχούσαν σε τιμές του V/c μέχρι και 0,005 .

Για το φως που εκπέμπεται από τα αποδιεγειρόμενα άτομα του υδρογόνου στις κατευθύνσεις με $\theta = 0$ και $\theta = 180^\circ$ ισχύει, αντιστοίχως,

$$\Delta\lambda_0 \approx \lambda_0 \left(\frac{V}{c}\right) + \frac{\lambda_0}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2 \qquad \text{και} \qquad \Delta\lambda_{180} \approx -\lambda_0 \left(\frac{V}{c}\right) + \frac{\lambda_0}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2$$



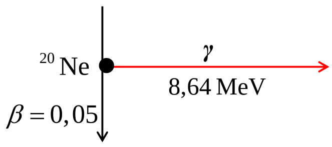
Αν μετρηθούν οι δύο μετατοπίσεις, το ημιάθροισμά τους δίνει τον καθαρά σχετικιστικό όρο

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda_0 + \Delta\lambda_{180}}{2} \approx \frac{\lambda_0}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2$$

Για τη γραμμή H_α του υδρογόνου, με μήκος κύματος 656,3 nm, μετρήθηκαν, αναλόγως της τιμής του V/c, τιμές του σχετικιστικού για το $\Delta\lambda$ που μεταβάλλονταν από 0,0011 nm (με θεωρητική τιμή 0,00109 nm) μέχρι 0,0047 nm (με θεωρητική τιμή 0,00469 nm). Η συμφωνία του πειράματος με τη θεωρία ήταν πολύ καλη.

Παρόμοια πειράματα από τους Mandelberg και Witten έδωσαν αντί της θεωρητικής τιμής 1/2 του αριθμητικού συντελεστή στην εξίσωση για το $\Delta\lambda$ την πειραματική τιμή του $0,498 \pm 0,025 = 1/(2,01 \pm 0,10)$.

Οι Olin, Alaxander, Häuser και McDonald έκαναν παρόμοιες μετρήσεις, όχι όμως με ορατό φως αλλά με φωτόνια ενέργειας 8,64 MeV που εκπέμπονται κατά την αποδιέγερση του πυρήνα του $^{20}\mathrm{Ne}$.



Στενή δέσμη διεγερμένων ιόντων του $^{20}\mathrm{Ne}$ παράγεται μέσω των αντιδράσεων

$$^{16}_{8}\mathrm{O}\left(^{4}_{2}\mathrm{He},\gamma\right)^{20}_{10}\mathrm{Ne} \qquad \text{και} \qquad ^{4}_{2}\mathrm{He}\left(^{16}_{8}\mathrm{O},\gamma\right)^{20}_{10}\mathrm{Ne}\,.$$

Αφού μέτρησαν μια εγκάρσια μετατόπιση Ντόπλερ ίση, σε ενέργεια, με $10,09 \pm 0,41$ keV, βρήκαν μια συμφωνία με τη θεωρία στο επίπεδο των 3,5% για ταχύτητες που αντιστοιχούν σε $\beta = 0,05$.

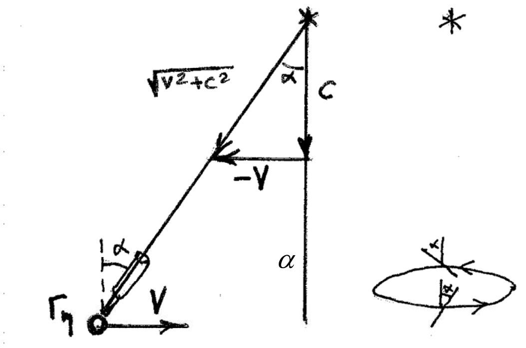
Ο αριθμητικός συντελεστής 1/2 στην εξίσωση για τη σχετικιστική μετατόπιση $\Delta\lambda$ βρέθηκε από το πείραμα ίσος με

$$0,491 \pm 0,017 = 1/(2,037 \pm 0,070)\,.$$

Ο όρος για τη σχετικιστική μετατόπιση Ντόπλερ έχει επομένως επιβεβαιωθεί πειραματικά με ικανοποιητική ακρίβεια.

Η αποπλάνηση του φωτός

(α) ***<u>Μη σχετικιστική ανάλυση</u>***



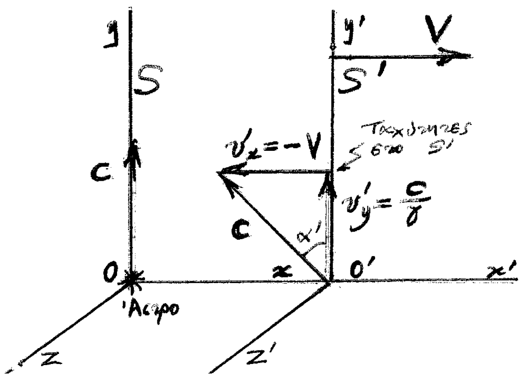
Αν η Γη κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V}$ και το φως με ταχύτητα c ως προς τον αιθέρα, η ταχύτητα του φωτός ως προς τη Γη θα έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{c^2+V^2}$ και θα κινείται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία ως προς την κάθετη στην $\mathbf{V}$, όπου $\tan\alpha = V/c$.

Επομένως, $\tan\alpha = \dfrac{V}{c} = \beta$ και $\alpha = \arctan\dfrac{V}{c} = \arctan\beta$

(β) ***<u>Σχετικιστική ανάλυση</u>***

Το άστρο εκπέμπει φως στην κατεύθυνση του άξονα των y στο σύστημά του, το S . Επομένως, οι συνιστώσες της ταχύτητάς του στο αυτό θα είναι

$\upsilon_x = 0, \quad \upsilon_y = c, \quad \upsilon_z = 0$.



Στο σύστημα S΄ του παρατηρητή, που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S, θα είναι:

$\upsilon'_x = -V, \quad \upsilon'_y = c/\gamma, \quad \upsilon'_z = 0$

Επομένως, $\alpha' = \arctan\left|\upsilon'_x/\upsilon'_y\right| = \arctan\beta\gamma$. Επειδή $\tan\alpha' = \beta\gamma = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

έπεται ότι είναι $\sin\alpha' = \beta$ ή $\alpha' = \arcsin\beta$

Η διαφορά ανάμεσα στην κλασική και τη σχετικιστική τιμή

Η κλασική σχέση δίνει $\alpha_{\mathrm{K}} = \arctan\beta = \beta - \dfrac{\beta^3}{3} + \dfrac{\beta^5}{5} - \dots$

Η σχετικιστική σχέση δίνει $\alpha_{\Sigma} = \arcsin\beta = \beta + \dfrac{\beta^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3\beta^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \dots$

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο τιμές είναι $\alpha_{\Sigma} - \alpha_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}\beta^3$

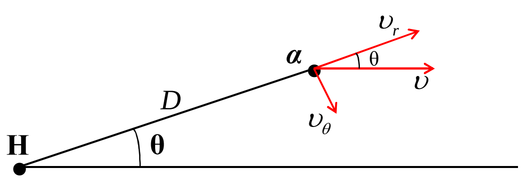
Για την ταχύτητα της Γης στην τροχιά της, $V = 30$ km/s , $\beta = 10^{-4}$ και

$$\alpha_{\Sigma} - \alpha_{\mathrm{K}} = \tfrac{1}{2}\beta^3 = 5\times 10^{-13}\ \mathrm{rad} = (10^{-7})''$$

Η ποσοστιαία διαφορά είναι $\dfrac{\alpha_{\Sigma} - \alpha_{\mathrm{K}}}{\alpha_{\Sigma}} = \frac{1}{2}\beta^2 = 5\times 10^{-9}$

Η διαφορά αυτή δεν είναι φυσικά μετρήσιμη ακόμη και με τα σημερινά όργανα.

Άσκηση 4.7* Το άστρο *α* του Κενταύρου απέχει από τον Ήλιο 4,4 έτη φωτός και έχει *ιδίαν κίνηση* (γωνιακή μετατόπιση στον ουράνιο θόλο) ίση με $3{,}68''\ \mathrm{y}^{-1}$. Η φασματική γραμμή του ασβεστίου, η οποία στο εργαστήριο έχει μήκος κύματος $\lambda_0 = 396{,}820$ nm, φαίνεται στο φάσμα του άστρου μετατοπισμένη κατά $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = -0{,}029$ nm. Υπολογίστε την ταχύτητα του άστρου (μέτρο και κατεύθυνση) ως προς τον Ήλιο.

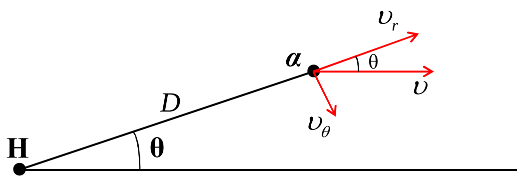


Στην κίνησή του στον ουράνιο θόλο, το άστρο έχει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = 3{,}68''\ \mathrm{y}^{-1} = 5{,}65\times 10^{-13}\ \mathrm{rad/s}$$

---

* Στις Σημειώσεις, η λύση που δίνεται είναι προσεγγιστική και υπάρχει λάθος στο πρόσημο της υ_θ.



Δεδομένου ότι βρίσκεται στην απόσταση $D = 4,4\ \text{l.y.} = 4,16\times10^{16}\ \text{m}$
η εγκάρσιά του ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_\theta = \omega D = 5,65\times10^{-13}\ \text{rad/s}\times 4,16\times10^{16}\ \text{m} = 23,5\ \text{km/s}$$

και $\beta_\theta \equiv \upsilon_\theta / c = 7,83\times10^{-5}$

Η σχέση για τα μήκη κύματος είναι $\lambda = \lambda_0 \dfrac{1+\beta_r}{\sqrt{1-\beta^2}}$

όπου $\beta_r = \beta\cos\theta = \upsilon_r / c$ είναι η ανηγμένη ακτινική ταχύτητα.

Είναι $\upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2$ ή $\beta^2 = \beta_r^2 + \beta_\theta^2$ και επομένως

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1+\beta_r}{\sqrt{1-\beta_r^2-\beta_\theta^2}} \quad \Rightarrow \quad 1-\beta_r^2-\beta_\theta^2 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 (1+\beta_r)^2$$

$$\left[1+\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2\right]\beta_r^2 + 2\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \beta_r + \beta_\theta^2 - 1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0$$

Αντικαθιστώντας $\beta_\theta = 7,83\times10^{-5}$ και $\lambda_0/\lambda = 1,000073$, έχουμε

$$2,000146\beta_r^2 + 2,000292\beta_r + 0,000146 = 0$$

$$\beta_r^2 + 1,000\,073\,0\,\beta_r + 0,000\,073 = 0$$

Της οποίας οι ρίζες είναι $\beta_{r1} = -1$ και $\beta_{r2} = -7,3\times10^{-5}$

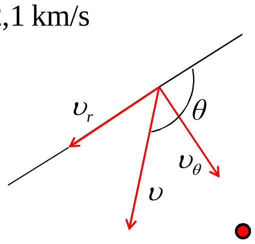
Η ρίζα $\beta_{r1} = -1$ απορρίπτεται γιατί θα έδινε $\beta > 1$.

Για τη ρίζα $\beta_{r2} = -7,3\times10^{-5}$ είναι $\upsilon_r = -21,9\ \text{km/s}$

$$|\beta| = \sqrt{\beta_r^2+\beta_\theta^2} = 1,07\times10^{-4} \qquad |\upsilon| = 32,1\ \text{km/s}$$

Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του άστρου
με την ευθεία που το ενώνει με τον Ήλιο είναι

$$\theta = \arctan\frac{\upsilon_\theta}{\upsilon_r} = \arctan\frac{\pm 23,5}{-21,9} = \arctan(\pm 1,073) = \pm 133°$$

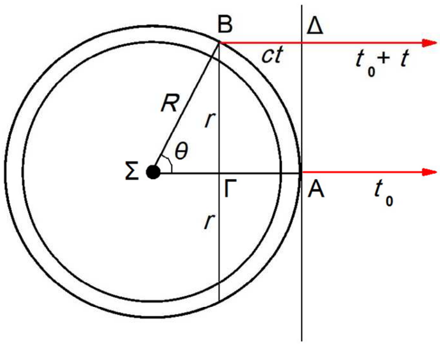


Άσκηση. Ταχύτητα μεγαλύτερη της *c*;

Ένα άστρο, Σ, βρίσκεται στο κέντρο ενός σφαιρικού φλοιού σκόνης, ακτίνας *R*. Το φως που εκπέμπεται από το άστρο απορροφάται και επανεκπέμπεται προς όλες τις κατευθύνσεις από τη σκόνη.

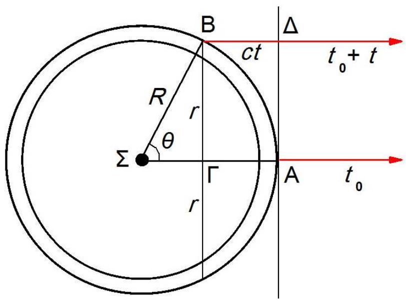
Το άστρο υφίσταται έκρηξη υπερκενοφανούς (supernova) και εκπέμπει προς όλες τις κατευθύνσεις έναν έντονο παλμό φωτός.

Ένας παρατηρητής, σε πολύ μεγάλη απόσταση από το άστρο, βλέπει το φως από την έκρηξη, με το φως που επανεκπέμπεται από το σημείο Α να φτάνει σε αυτόν ενωρίτερα από το φως που εκπέμπεται από ένα άλλο σημείο όπως το Β.



Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο παρατηρητής να βλέπει έναν δακτύλιο με κέντρο το σημείο Α και αυξανόμενη ακτίνα *r*.

Να βρεθεί η ταχύτητα μεταβολής της ακτίνας *r*, συναρτήσει της γωνίας *θ*. Μπορεί να είναι μεγαλύτερη της *c*;



Αν το φως από το σημείο Α φτάνει στον παρατηρητή τη χρονική στιγμη t_0 , το φως από το σημείο Β θα φτάσει τη χρονική στιγμή $t_0 + t$. Είναι

$$R = (\Sigma\Gamma) + ct \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{R^2 - r^2} + ct \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{-\frac{1}{2}2rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} + cdt$$

$$\frac{dr}{dt} = c\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}, \qquad \frac{dr}{dt} = c\frac{(\Sigma\Gamma)}{r} \qquad \text{και τελικά}$$

$$\frac{dr}{dt} = c\cot\theta . \qquad \text{Για } \theta < 45^\circ \text{ είναι } \frac{dr}{dt} > c$$