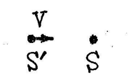
3. ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

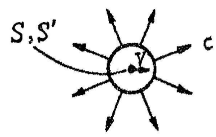
Ο Μετασχηματισμός του Λόρεντς για τις Συντεταγμένες Θέσης Ενός Συμβάντος

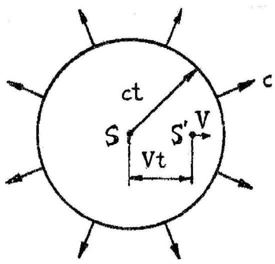
Έστω ένα αδρανειακό σύστημα S, και ένα δεύτερο, S΄, το οποίο κινείται με ταχύτητα *V* ως προς το πρώτο.

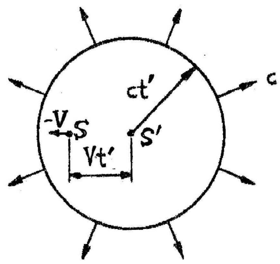
Επιλέγουμε τους άξονες των δύο συστημάτων έτσι ώστε να συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, και η ταχύτητα του S΄ ως προς το S να είναι $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$.

Τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, ένα σφαιρικό μέτωπο φωτός εκπέμπεται από το σημείο όπου βρίσκονται οι αρχές των αξόνων (O, O΄) των δύο συστημάτων.









Σύμφωνα με την αρχή του αναλλοίωτου της ταχύτητας του φωτός στο κενό, και στα δύο συστήματα αναφοράς, τα μέτωπα του κύματος θα είναι σφαίρες με κέντρα τις αρχές των αξόνων τους, (O, O΄), και με ακτίνες που ισούνται, αντίστοιχα, με $r = ct$ και $r' = ct'$.

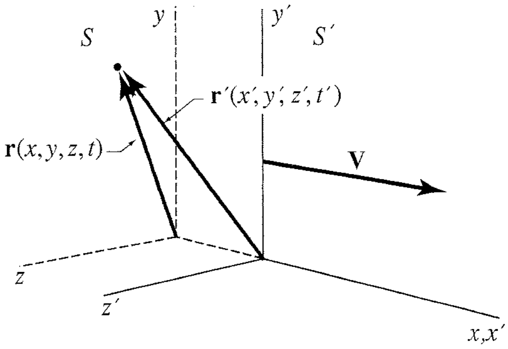
Ποιος μετασηματισμός των συντεταγμένων θέσης κάνει αυτή την απαίτηση δυνατή;

Υποθέτουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $(x, y, z, t) \Leftrightarrow (x', y', z', t')$,

της μορφής: $x' = \alpha x + \varepsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \eta t$,

όπου *α, ε, δ* και *η* είναι οι συντελεστές του μετασχηματισμού, που πρέπει να προσδιοριστούν.

Ο μετασχηματισμός πρέπει να είναι γραμμικός, ούτως ώστε μια ομαλή κίνηση χωρίς επιτάχυνση στο ένα σύστημα αναφοράς να μετασχηματίζεται σε κίνηση χωρίς επιτάχυνση και στο άλλο σύστημα.



Έχουμε ήδη εξηγήσει γιατί πρέπει να είναι $y' = y, \quad z' = z$.

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές *α, ε, δ* και *η* χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα δεδομένα:

1. Το σημείο Ο΄ έχει ταχύτητα *V* στο σύστημα S.

Επομένως, θέτοντας $x' = 0$, πρέπει να είναι $dx/dt = V$.

Επειδή είναι $dx' = \alpha dx + \varepsilon dt$, έχουμε, για $dx' = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\varepsilon}{\alpha} = V$

2. Το σημείο Ο έχει ταχύτητα –*V* στο σύστημα S΄.

Θέτοντας $x = 0$, πρέπει να είναι $dx'/dt' = -V$.

Επειδή είναι $dx' = \alpha dx + \varepsilon dt, \quad dt' = \delta dx + \eta dt$, έχουμε, για $dx = 0$,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\varepsilon}{\eta} = -V$$

Βρήκαμε ότι: $\dfrac{\varepsilon}{\alpha} = -V$, $\dfrac{\varepsilon}{\eta} = -V$ και επομένως και $\alpha = \eta$.

3. Τα μέτωπα του παλμού φωτός στα δύο συστήματα είναι σφαίρες με κέντρα τα Ο και Ο΄, αντίστοιχα, και ακτίνες που αυξάνουν με την ίδια ταχύτητα, *c*.

Επομένως, για σημεία πάνω στα μέτωπα του φωτός πρέπει να είναι:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) για τα x', y', z', t', προκύπτει η σχέση

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\varepsilon xt + \varepsilon^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta^2x^2 + 2\delta\alpha xt + \alpha^2t^2)$$

ή

$$(\alpha^2 - c^2\delta^2)x^2 + (2\alpha\varepsilon - 2c^2\delta\alpha)xt + y^2 + z^2 = (c^2\alpha^2 - \varepsilon^2)t^2$$

Η οποία είναι ταυτόσημη με την (1) για κάθε τιμη των x, y, z, t αν

$$\alpha^2 - c^2\delta^2 = 1, \quad 2\alpha\varepsilon - 2c^2\delta\alpha = 0, \quad c^2\alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2$$

Τελικά,

$$\alpha = \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad \delta = \frac{-V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad \varepsilon = \frac{-V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Ο Μετασχηματισμός του Λόρεντς

Βρήκαμε τον μετασχηματισμό:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

ο οποίος είναι γνωστός ως **μετασχηματισμός του Λόρεντς**.
Ο μετασχηματισμός πράγματι δίνει τη σχέση

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad \text{αν είναι} \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Αν ορίσουμε την **ανηγμένη ταχύτητα** $\beta \equiv \dfrac{V}{c}$

και τον **παράγοντα Λόρεντς** $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

γράφουμε τον μετασχηματισμό του Λόρεντς ως:

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός

Για τον μετασχηματισμό από το σύστημα S στο σύστημα S΄ βρήκαμε:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V / c^2)x}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

Για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, από το σύστημα S΄ στο σύστημα S, αλλάζουμε το πρόσημο της V και αντικαθιστούμε τα τονούμενα σύμβολα με άτονα και αντιστρόφως:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V / c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

Ο Μετασχηματισμός του Γαλιλαίου ως Όριο του Μετασχηματισμού του Λόρεντς

Για ταχύτητες V πολύ μικρές σε σύγκριση με την c, είναι

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

δηλαδή προκύπτει ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου.

Παράδειγμα: Μια εφαρμογή του μετασχηματισμού του Λόρεντς

Ένα συμβάν έχει στο αδρανειακό σύστημα S συντεταγμένες $(x = 1\text{ m},\ y = 2\text{ m},\ z = 2\text{ m},\ t = 1\text{ ns})$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμβάντος στο S΄, το οποίο κινείται ως προς το S με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$, όπου $V = \frac{4}{5}c$. Οι άξονες των δύο συστημάτων συνέπιπταν όταν $t = t' = 0$.

Ισχύει ο μετασχηματισμός του Λόρεντς, με

$$\beta = V / c = \tfrac{4}{5}, \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2 / c^2} = \tfrac{5}{3}$$

Με αυτές τις τιμές και $x = 1\text{ m},\ y = 2\text{ m},\ z = 2\text{ m},\ t = 1\text{ ns}$, οι εξισώσεις του μετασχηματισμού του Λόρεντς δίνουν:

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{4}{5}(3 \times 10^8)(1 \times 10^{-9})\right) = \frac{5}{3}\left(1 - 0,24\right) = 1,27\text{ m}$$

$$y' = y = 2\text{ m}, \qquad z' = z = 2\text{ m}$$

$$t' = \gamma\left(t - (\beta / c)x\right) = \frac{5}{3}\left(1\times10^{-9} - \frac{4}{5}\frac{1}{3\times10^{8}}\right) = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{40}{15}\right)10^{-9} = -2,78 \text{ ns}$$

Ένα συμβάν που έχει συντεταγμένες

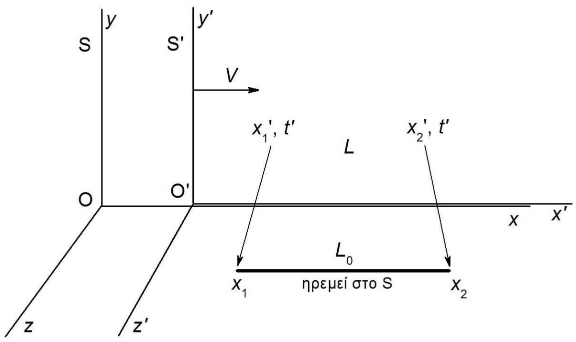
$(x = 1 \text{ m},\ y = 2 \text{ m},\ z = 2 \text{ m},\ t = 1 \text{ ns})$ στο αδρανειακό σύστημα S,

έχει συντεταγμένες

$(x = 1,27 \text{ m},\ y = 2 \text{ m},\ z = 2 \text{ m},\ t = -2,78 \text{ ns})$ στο S΄.

Η Συστολή του Μήκους

Έστω μια ράβδος που είναι ακίνητη στο σύστημα αναφοράς S και είναι παράλληλη προς τον άξονα των *x*. Τα δύο άκρα της ράβδου βρίσκονται στα σημεία x_1 και x_2. Το μήκος της ράβδου στο σύστημα S, το ***μήκος ηρεμίας*** της, είναι $L_0 = x_2 - x_1$.



Στο σύστημα S΄, τη χρονική στιγμή t', τα δύο άκρα της ράβδου βρίσκονται, αντίστοιχα, στα σημεία x_1' και x_2'.
Το μήκος της ράβδου στο σύστημα S΄ είναι ίσο με $L = x_2' - x_1'$.

Ο μετασχηματισμός του Λόρεντς, από το σύστημα S΄ στο σύστημα S, δίνει τις σχέσεις

$$x_1 = \gamma\left(x_1' + Vt'\right) \qquad \text{και} \qquad x_2 = \gamma\left(x_2' + Vt'\right) .$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές εξισώσεις μεταξύ τους βρίσκουμε

$$x_2 - x_1 = L_0 = \gamma\left(x_2' - x_1'\right) = \gamma L$$

Διαπιστώνουμε ότι

$$L = L_0 / \gamma = L_0\sqrt{1 - V^2 / c^2}$$

Δηλαδή ότι το μήκος μιας ράβδου που κινείται είναι μικρότερο από το μήκος ηρεμίας της, κατά έναν παράγοντα γ. Αυτό είναι το φαινόμενο της ***συστολής του μήκους***.

Στο σύστημα S΄, οι μετρήσεις στα σημεία x_1' και x_2' έγιναν και οι δύο τη χρονική στιγμή t' . Οι χρονικές στιγμές στις οποίες έγιναν οι μετρήσεις, όπως τις παρατηρεί ο S, είναι, αντίστοιχα,

$$t_1 = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x_1'\right) \qquad \text{και} \qquad t_2 = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x_2'\right).$$

Βλέπουμε ότι υπάρχει μια χρονική διαφορά ανάμεσα στις δύο μετρήσεις ίση με

$$t_2 - t_1 = \frac{\gamma V}{c^2}(x_2' - x_1') \qquad \text{ή} \qquad t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2}L_0 .$$

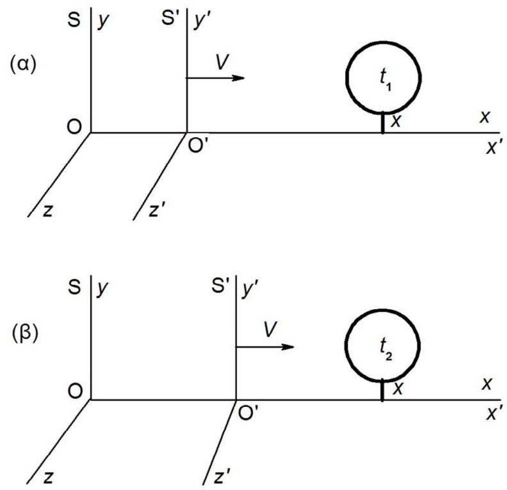
Οι μετρήσεις των θέσεων των δύο άκρων της ράβδου στο σύστημα S, από τον παρατηρητή S΄, που κινείται ως προς τη ράβδο, δεν έγιναν ταυτόχρονα.

Η Διαστολή του Χρόνου

Ένα ρολόι βρίσκεται ακίνητο στο σημείο *x* του αδρανειακού συστήματος αναφοράς S και είναι συγχρονισμένο με τα ρολόγια του συστήματος αυτού.

Θεωρούμε ως δύο συμβάντα τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το ρολόι δείχνει τις ενδείξεις t_1 και t_2, αντιστοίχως. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο συμβάντων είναι

$$\tau = t_2 - t_1$$



στο σύστημα S (ο ***χρόνος ηρεμίας*** ανάμεσα στα δύο συμβάντα).

Για έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε ένα άλλο σύστημα, S΄, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S και το ρολόι, οι χρονικές στιγμές στις οποίες θα παρατηρηθούν τα δύο συμβάντα θα είναι, αντιστοίχως,

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad \text{και} \qquad t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x\right).$$

Η διάρκεια του χρονικού διαστήματος ανάμεσα στα δύο συμβάντα, *T*, όπως τη μετρά ο παρατηρητής στο σύστημα S΄, είναι

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) \qquad \text{ή} \qquad T = \gamma\tau .$$

Αυτό είναι το φαινόμενο της ***διαστολής του χρόνου***.

Τα ρολόγια που κινούνται πηγαίνουν πιο αργά από τα ρολόγια που ηρεμούν ως προς έναν παρατηρητή.

Οι μετασχηματισμοι της ταχύτητας

Ο μετασχηματισμός των συνιστωσών της ταχύτητας

Έστω ότι στο σύστημα αναφοράς S, η θέση ενός σημείου P τη χρονική στιγμή t_1 είναι (x_1, y_1, z_1) και τη χρονική στιγμή t_2 είναι (x_2, y_2, z_2). Τα αντίστοιχα σημεία σε ένα σύστημα S΄, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S, είναι, σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Λόρεντς:

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - \beta c t_1\right), \quad y_1' = y_1, \quad z_1' = z_1, \quad t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right)$$

και

$$x_2' = \gamma\left(x_2 - \beta c t_2\right), \quad y_2' = y_2, \quad z_2' = z_2, \quad t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c}\right)$$

Παίρνοντας τίς διαφορές των αντίστοιχων συντεταγμένων, έχουμε

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[\left(x_2 - x_1\right) - \beta c\left(t_2 - t_1\right)\right], \quad y_2' - y_1' = y_2 - y_1,$$

$$z_2' - z_1' = z_2 - z_1, \quad t_2' - t_1' = \gamma\left[\left(t_2 - t_1\right) - \frac{\beta}{c}\left(x_2 - x_1\right)\right]$$

Θέτοντας $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ κ.ο.κ., έχουμε τις σχέσεις ανάμεσα σε αυτές τις μεταβολές:

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - V\Delta t\right), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)$$

Διαιρώντας τις πρώτες τρεις εξισώσεις δια $\Delta t'$ έχουμε

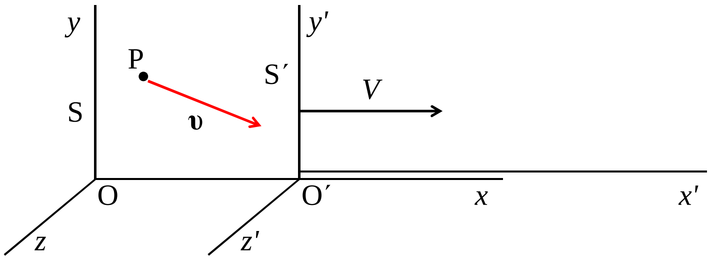
$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}, \quad \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)}, \quad \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)}$$

Παίρνοντας τά όρια καθώς $\Delta t, \Delta t' \to 0$, οπότε

$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{dx}{dt} = \upsilon_x$, $\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} \to \dfrac{dx'}{dt'} = \upsilon_x'$ κ.ο.κ., ...

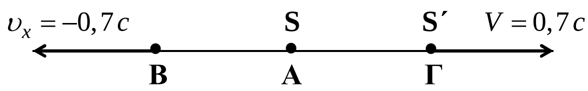
έχουμε τελικά τον μετασχηματισμό για τις συνιστώσες των ταχυτήτων:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}}, \qquad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)}$$



Παράδειγμα 3.11: Σύνθεση ταχυτήτων

Τρεις γαλαξίες, Α, Β και Γ, βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Ως προς τον Α, που βρίσκεται ανάμεσα στους Β και Γ, αυτοί κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσες με $0,7c$. Η ταχύτητα με την οποία οι Β και Γ απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, όπως την μετρά ο Α, είναι επομένως $1,4c$. Πόση είναι η ταχύτητα του Β ως προς τον Γ;



Θεωρώντας τον γαλαξία Α ακίνητο στο σύστημα αναφοράς S και τον Γ στο σύστημα αναφοράς S΄, θα είναι $V = 0,7c$ και ο γαλαξίας Β έχει ταχύτητα $\upsilon_x = -0,7c$ στο σύστημα S. Επομένως, στο σύστημα S΄, ο γαλαξίας Β θα έχει ταχύτητα

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}} = \frac{-0,7c - 0,7c}{1 - \frac{(-0,7c)0,7c}{c^2}} = \frac{-1,4c}{1,49} = -0,94c$$

Ο μετασχηματισμός του μέτρου της ταχύτητας

Στο σύστημα S, το μέτρο της ταχύτητας υ δίνεται από τη σχέση $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$ ενώ για την υ' στο σύστημα S΄ ισχύει η σχέση $\upsilon'^2 = \upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2 + \upsilon_z'^2$. Υψώνοντας τις συνιστώσες της ταχύτητας στο τετράγωνο και προσθέτοντας, έχουμε:

$$\upsilon'^2 = \upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2 + \upsilon_z'^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\left[(\upsilon_x - V)^2 + \upsilon_y^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \upsilon_z^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\left[\upsilon_x^2 - 2V\upsilon_x + V^2 + \upsilon^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \upsilon_x^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\left[\frac{V^2\upsilon_x^2}{c^2} - 2V\upsilon_x + V^2 + \upsilon^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\left[\frac{V^2\upsilon_x^2}{c^4} - 2\frac{V\upsilon_x}{c^2} + 1 - 1 + \frac{V^2}{c^2} + \frac{\upsilon^2}{c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right]$$

Η οποία δίνει,

$$\upsilon'^2 = \frac{c^2}{\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\left[\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right]$$

και τελικά

$$\upsilon'^2 = c^2\left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\right]$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Βρήκαμε τη σχέση
$$\upsilon'^2 = c^2\left[1-\frac{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}\right]$$

Παρατηρούμε ότι, αν είναι $|V|<c$ και $\upsilon<c$, τότε το κλάσμα στην τελευταία σχέση είναι θετικό και επομένως είναι και $\upsilon'<c$.

Για ένα φωτόνιο είναι $\upsilon=c$ και επίσης $\upsilon'=c$.

Για ένα σύστημα που κινείται με ταχύτητα $|V|=c$, είναι $\upsilon'_x=-c$, $\upsilon'_y=0$ και $\upsilon'_z=0$, και επομένως και $\upsilon'=c$.
Ο παρατηρητής S΄ θα βλέπει τα πάντα να κινούνται με ταχύτητα $-c\hat{\mathbf{x}}$.

Για ένα *ταχυόνιο* (αν υπάρχει), είναι $\upsilon>c$ και τότε, για κάθε $|V|<c$, θα είναι επίσης $\upsilon'>c$.

Ο μετασχηματισμός του παράγοντα Λόρεντς, γ

Από τη σχέση

που δίνει το μέτρο υ'_P της ταχύτητας ενός σημείου P στο σύστημα S΄ συναρτήσει της ταχύτητάς του, υ_P, στο σύστημα S,
$$\upsilon_P'^2 = c^2\left[1-\frac{\left(1-\frac{\upsilon_P^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{V\upsilon_{Px}}{c^2}\right)^2}\right]$$

και ορίζοντας του παράγοντες Λόρεντς για το σημείο P,

$$\gamma_P=\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_P^2/c^2}} \qquad \gamma'_P=\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_P'^2/c^2}}\ , \quad \text{και με} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\gamma_P'^2}=\frac{1}{\gamma^2\gamma_P^2\left(1-\frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2} \qquad \text{και, επομένως,} \qquad \gamma'_P=\gamma\gamma_P\left(1-\frac{V\upsilon_x}{c^2}\right)$$