

Άσκηση 7

Νόμος των Wiedemann-Franz

7.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι η μέτρηση της σταθεράς Lorentz σε δύο διαφορετικά μέταλλα, οι ιδιότητες των οποίων διαφέρουν σημαντικά. Η σταθερά του Lorentz θα μετρηθεί μέσω μέτρησης του λόγου της θερμικής αγωγιμότητας προς την αντίστοιχη ηλεκτρική. Οι μετρήσεις θα γίνουν στο χαλκό, που αντιπροσωπεύει τους καλούς αγωγούς θερμότητας και ηλεκτρικού ρεύματος, όπως και στο νικέλιο, που αντιπροσωπεύει τους κακούς αγωγούς.

7.2. Γενικά

Είναι γνωστό ότι η θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων είναι εκατοντάδες φορές μεγαλύτερη των διηλεκτρικών υλικών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που είναι υπεύθυνα για την ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων είναι υπεύθυνα και για τη θερμική τους αγωγιμότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου, τόσο μεγαλύτερη είναι και η θερμική του αγωγιμότητα. Στα μέταλλα, η ομοιότητα στους μηχανισμούς διάδοσης του ηλεκτρικού φορτίου και της θερμότητας βρίσκει την έκφρασή της στον αρχικά πειραματικά διαπιστωμένο νόμο των Wiedemann-Franz (1853), σύμφωνα με τον οποίο, σε θερμοκρασία δωματίου (σωστότερα, σε θερμοκρασίες άνω της θερμοκρασίας Debye), στα μέταλλα, η θερμική αγωγιμότητά (λ) είναι ανάλογη προς την αντίστοιχη ηλεκτρική (σ). Δηλαδή, $\lambda \sim \sigma$ ή $\lambda/\sigma = \text{σταθ.}$ Παρατηρήθηκε ακόμη ότι ο λόγος λ/σ εξαρτάται από τη θερμοκρασία και η εξάρτηση αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{\lambda}{\sigma} = LT, \quad (7.1)$$

όπου T ($T > T_{\text{Debye}}$) είναι η απόλυτη θερμοκρασία του μετάλλου και L είναι ένας σταθερός αριθμός, ίδιος για όλα τα μέταλλα και ονομάζεται σταθερά Lorentz. Συνεπώς στα μέταλλα, ο λόγος $\lambda/\sigma T$ αναμένεται να είναι σταθερός.

Στον Πίνακα 7.1 δίνονται οι τιμές της ηλεκτρικής (σ) και θερμικής (λ) αγωγιμότητας μερικών μετάλλων στους 293 K ($T = T_{\text{δομ}}$), όπως και η πειραματική τιμή του αριθμού Lorentz στα μέταλλα αυτά.

Πίνακας 7.1

Μέταλλο	σ ($10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$)	λ ($\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$)	L ($10^{-8} \text{ W } \Omega \text{ K}^{-2}$)
Ag	6,15	423	2,45
Cu	5,82	387	2,27
Al	3,55	210	2,02
Na	2,1	135	2,18
Cd	1,3	102	2,64
Fe	1,00	67	2,31
Ni	1,46	91,5	2,14
Pb	0,45	34	2,56

7.2.1. Η σταθερά Lorentz σε κλασική και κβαντομηχανική προσέγγιση

Ο νόμος των Wiedemann-Franz έπαιξε μεγάλο ρόλο στη διαμόρφωση της θεωρίας των μετάλλων, καθώς αποτέλεσε την πειραματική βάση και στήριγμα της υπόθεσης περί του “αερίου των ελεύθερων ηλεκτρονίων στα υλικά”. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, τα ηλεκτρόνια στα οποία οφείλεται η ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων, παρά το ότι είναι εγκλωβισμένα εντός του στερεού, είναι ελεύθερα στις κινήσεις και έχουν ιδιότητες όμοιες με αυτές που έχει το ιδανικό αέριο. Στο μοντέλο αυτό η ηλεκτρική και η θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων αποδίδονται σε φαινόμενα μεταφοράς όταν, για κάποιο λόγο, στο ιδιόμορφο αυτό “αέριο ηλεκτρονίων” δημιουργείται βαθμίδα θερμοκρασίας ή βαθμίδα ηλεκτρικού δυναμικού.

Σε κλασική προσέγγιση, για το λόγο λ/σ η σχετική ανάλυση δίνει τη σχέση

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k^2}{e^2} T, \quad (7.3)$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzmann και e είναι του φορτίο του ηλεκτρονίου. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι στην κλασική προσέγγιση η σταθερά Lorentz είναι

$$L = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k^2}{e^2} = 1,9 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}, \quad (7.4)$$

που είναι σχετικά κοντά στις πειραματικές τιμές (Πίνακας 1).

Στην κβαντομηχανική προσέγγιση, για το λόγο λ/σ προκύπτει η σχέση

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{k^2}{e^2} T, \quad (7.5)$$

από την οποία η σταθερά Lorentz προκύπτει να είναι λίγο μεγαλύτερη,

$$L = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2}{e^2} = 2,45 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}, \quad (7.6)$$

που ωστόσο είναι πιο κοντά στις πειραματικές τιμές.

Στο μοντέλο “αέριο ηλεκτρονίων” η διάδοση της θερμότητας αποδίδεται εξολοκλήρου στο “αέριο των ηλεκτρονίων”. Ο ρόλος του κρυσταλλικού πλέγματος αγνοείται, καθώς στα μέταλλα η πλεγματική συνιστώσα της θερμικής αγωγιμότητας είναι περίπου 1% της ολικής. Επιπλέον, αγνοούνται οι ενεργειακές ζώνες και θεωρείται ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι ίση με αυτή στο κενό.

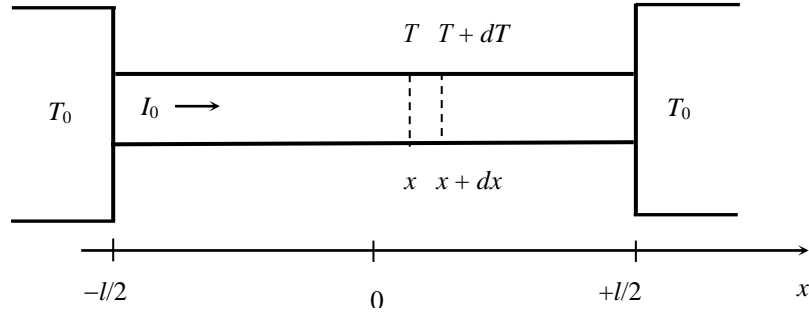
Είναι άξιο προσοχής το γεγονός ότι για τη σταθερά Lorentz η κλασική ($8k^2/\pi e^2$) και η κβαντομηχανική προσέγγιση ($\pi^2 k^2/3e^2$) δίνουν σχεδόν την ίδια τιμή.

7.3. Μέθοδος μέτρησης του λόγου λ/σ

Λόγω της διαφορετικής φύσεως των μεγεθών λ και σ , οι τεχνικές μέτρησης των μεγεθών αυτών διαφέρουν και η μέτρησή τους γίνεται συνήθως σε δύο ξεχωριστά πειράματα. Στη μέθοδο που θα περιγράψουμε θα παρακαμφτεί αυτή η διαδικασία και η μέτρηση του λόγου λ/σ θα γίνει άμεσα σε ένα ενιαίο πείραμα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία μεταλλική ράβδο η οποία διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I_0 , ενώ τα δύο της άκρα με κάποιον τρόπο διατηρούνται σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος T_0 (Σχ. 7.1). Η ανάλυση θα απλοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό αν θεωρήσουμε ότι η θερμότητα που εκλύεται εντός της ράβδου άγεται μόνο προς τα ψυχρά της άκρα. Δηλαδή θεωρήσουμε αμελητέες τις απώλειες της θερμότητας από την πλευρική της επιφάνεια. Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι να βρεθεί η μόνιμη κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο και, ακολούθως, η θερμοκρασία στο κέντρο της, συναρτήσει των μεγεθών I_0 , λ και σ .

Η διατύπωση της μαθηματικής σχέσης που καθορίζει την αγωγή της θερμότητας στη ράβδο θα γίνει με τη βοήθεια ενός μικρού της τμήματος ή λεπτής φέτας, πάχους dx , οι βάσεις της οποίας βρίσκονται στα σημεία x

και $x + dx$. Το σημείο $x = 0$ επιλέγεται στο κέντρο της ράβδου. Το εμβαδόν της διατομής της ράβδου είναι s , και το μήκος της l .



Σχήμα 7.1

Η διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος I_0 , το οποίο είναι σταθερό στο χρόνο, προκαλεί έκλυση θερμότητας εντός της ράβδου. Αν το ρεύμα I_0 εφαρμοστεί τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε τη χρονική στιγμή t , στη θέση x , η θερμοκρασία της ράβδου θα είναι $T(x,t)$, δηλαδή η αναζητούμενη συνάρτηση είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Ευκολότερα μπορεί να βρεθεί η συνάρτηση $T(x)$ της κατανομής της θερμοκρασίας σε μόνιμη κατάσταση, δηλαδή μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων στη ράβδο. Σε μόνιμες καταστάσεις η θερμική ενέργεια άγεται μόνο προς τις ψυχρότερες περιοχές και δεν απορροφάτε από το υλικό της ράβδου, γεγονός που απλοποιεί τους σχετικούς υπολογισμούς.

Σε μόνιμη κατάσταση, σε χρόνο dt , η εκλυόμενη θερμότητα εντός της λεπτής φέτας είναι

$$dQ = I_0^2 dR dt = I_0^2 \rho \frac{dx}{s} dt, \quad (7.7)$$

όπου dR είναι η ηλεκτρική αντίσταση της φέτας, ενώ ρ είναι η ειδική αντίσταση του υλικού της ράβδου, η οποία συνδέεται με την ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα μέσω της σχέσης $\rho = 1/\sigma$.

Στη λεπτή φέτα, η θερμική ενέργεια που άγεται από τη μία βάση (βρίσκεται στο σημείο x) προς την άλλη (βρίσκεται στο σημείο $x + dx$) ισούται με τη διαφορά θερμικών ενεργειών που διαπερνούν τις δύο βάσεις

$$dQ = dt \lambda s \frac{dT(x)}{dx} - dt \lambda s \frac{dT(x+dx)}{dx} = -\lambda s dt \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} dx. \quad (7.8)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (7.7) και (7.8) θα λάβουμε τη διαφορική εξίσωση του προβλήματός

$$I_0^2 \frac{\rho}{s} = -\lambda s \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2}. \quad (7.9)$$

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης (7.9), είναι προτιμότερο αυτή να γραφτεί σε μορφή

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = -A, \quad \text{όπου} \quad A = I_0^2 \frac{\rho}{\lambda s^2} = \text{σταθερά}. \quad (7.10\alpha, \beta)$$

Η πρώτη γενική λύση της εξίσωσης (7.10α) είναι της μορφής

$$\frac{dT(x)}{dx} = -Ax + B. \quad (7.11)$$

Καθώς η υψηλότερη θερμοκρασία αναμένεται να βρίσκεται στο κέντρο της ράβδου ($x = 0$), στο σημείο αυτό

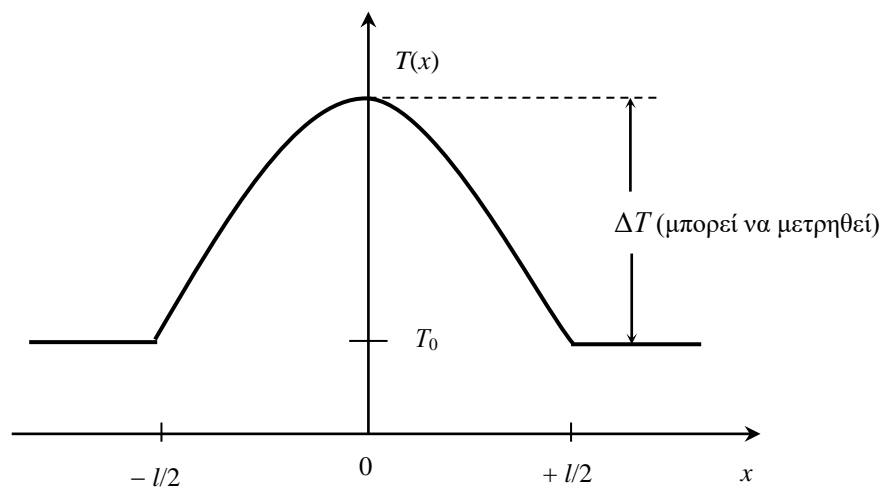
$$\frac{dT(x)}{dx} = 0.$$

Συνεπώς στη διαφορική εξίσωση (7.11), η σταθερά $B = 0$. Τελικά, η λύση της εξίσωσης (7.11) είναι

$$T(x) = -A \frac{x^2}{2} + C, \quad (7.12)$$

όπου η σταθερά C υπολογίζεται από την οριακή συνθήκη $T(x = l/2) = T_0$. Έχουμε τελικά:

$$T(x) = T_0 + \frac{A}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right). \quad (7.13)$$



Σχήμα 7.2

Κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου σε μόνιμη κατάσταση.

Από τη σχέση (7.13) προκύπτει ότι το κέντρο της ράβδου ($x = 0$) είναι θερμότερο των άκρων κατά

$$\Delta T = \frac{Al^2}{8} \quad \text{ή} \quad \Delta T = \frac{I_0^2 \rho l^2}{8\lambda s^2}. \quad (7.14\alpha, \beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\rho^2 l^2}{s^2} = R^2,$$

όπου R είναι η συνολική αντίσταση της ράβδου και, επίσης ότι $\sigma = 1/\rho$, η σχέση (7.14β) μπορεί να γραφτεί σε μορφή

$$\Delta T = \frac{1}{8\lambda} \times \frac{\Delta U^2}{\sigma} = b \Delta U^2, \quad (7.15)$$

όπου $\Delta U = I_0 R$ είναι η πτώση τάσης που δημιουργεί το ρεύμα I_0 σε όλο το μήκος της ράβδου.

Η προτεινόμενη μέθοδος μέτρησης του λόγου λ/σ στηρίζεται στη σχέση (7.15), συμφωνά με την οποία για να μετρηθεί ο λόγος λ/σ , αρκεί να μετρηθεί η διαφορά θερμοκρασιών κέντρο-άκρα, συναρτήσει της

διαφοράς δυναμικού ΔU που το ηλεκτρικό ρεύμα I_0 δημιουργεί στα άκρα της ράβδου. Το ρεύμα I_0 δεν εμφανίζεται στην τελική σχέση και για το λόγο αυτό η μέτρησή του δεν είναι απαραίτητη.

Βλέπουμε ότι ο λόγος λ/σ μπορεί να μετρηθεί από τη κλίση της πειραματικής ευθείας $\Delta T_i = bU_i^2$, ενώ η σταθερά Lorentz δίνεται να υπολογιστεί από τη σχέση

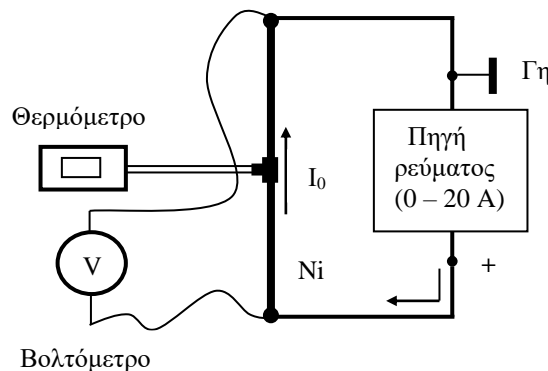
$$L = \frac{\lambda}{\sigma T} = \frac{1}{8bT}. \quad (7.16)$$

Στη σταθερά Lorentz συμμετέχει και η θερμοκρασία του υλικού, σε μονάδες Kelvin, η οποία κατά τη διάρκεια του πειράματος μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου αλλά και συναρτήσει χρόνου. Ωστόσο, στο βαθμό που η διαφορά των θερμοκρασιών κέντρο-άκρα είναι πολύ μικρή, της τάξης 1 - 3 K, αλλά μικρή είναι και η χρονική ολίσθηση της αρχικής θερμοκρασίας, για T μπορεί να σημειωθεί η μέση τιμή των αρχικών θερμοκρασιών της πρώτης και τελευταίας μέτρησης της σειράς των πειραματικών τιμών, ενώ για σφάλμα της T (αβεβαιότητα) μπορεί να σημειωθεί το μισό της διαφοράς αυτών των δύο θερμοκρασιών.

Τέλος, η κλίση της πειραματικής ευθείας $\Delta T_i = bU_i^2$ μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Σημειώνουμε ότι στη θεωρία της μεθόδου, στη γραμμική σχέση $y = bx$ δεν είναι αδιάφορο ποια από τις δύο μεταβλητές (ΔT_i , ΔU_i) θα επιλεγεί ως η μεταβλητή x . Στην πειραματική πρακτική, για x επιλέγεται η μεταβλητή η οποία μετρήθηκε με μεγαλύτερη ακρίβεια και δεν υφίστανται τυχαίες διακυμάνσεις, δηλαδή τηρείται ο όρος $\sigma_x = 0$. Στην περίπτωση μας, η μεταβλητή αυτή είναι η ΔU_i .

7.4. Πειραματική διάταξη

Για τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται δυο ράβδοι (σωστότερα σύρματα), από χαλκό και από νικέλιο. Η διάμετρος και το μήκος τους είναι 2,00 και 80,0 mm, αντίστοιχα, ενώ τα σφάλματά αυτών των δύο τιμών θεωρούνται αμελητέα.



Σχήμα 7.3

Στην πειραματική διάταξη περιλαμβάνεται μία ρυθμιζόμενη πηγή συνεχούς ρεύματος ($I_0 = 0-20A$), δυο θερμόμετρα και ένα μιλivolτόμετρο, για τη μέτρηση της τάσης που δημιουργείται στα άκρα της ράβδου. Η θερμοκρασία θα μετρηθεί στο κέντρο της ράβδου, όπου βρίσκεται ένα λεπτό μεταλλικό “ταυ”, προορισμός του οποίου είναι να διασφαλιστεί καλή θερμική επαφή της ράβδου με τον αισθητήρα του θερμόμετρου. Στο Σχ. 7.3 δίνεται μόνο το μισό μέρος της πειραματικής διάταξης, στην οποία γίνονται περάματα με το νικέλιο. Όμοιο κύκλωμα συναρμολογείται για τις μετρήσεις στο χαλκό.

Στις μετρήσεις χρησιμοποιούνται 2 ψηφιακοί μετρητές, της θερμοκρασίας και της τάσης, με παραμέτρους ακρίβειας:

Accuracy: 0,3 % + 1x0,1 ($^{\circ}C$) – του μετρητή θερμοκρασίας

Accuracy: 0,4 % + 2x0,1 (mV) – του μετρητή τάσης, στην κλίμακα 200 mV.

Βιβλιογραφία

1. M.A. Omar. *Elementary Solid State Physics: Principle and Applications*. (Addison – Wesley, London 1975).
2. C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics, 7th Edn.* (J. Wiley, N.York 1995).
3. Ε.Ν. Οικονόμου. *Φυσική Στερεάς Κατάστασης*. (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1977).
4. Σ.Κ. Παπαδόπουλος. *Εισαγωγή στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης*. (Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα 1990).

7.5. Εκτέλεση

Το πρώτο πείραμα γίνεται στο νικέλιο. Για το σκοπό αυτό. Συναρμολογήστε το κυκλώματα του νικελίου που βλέπετε στο Σχ. 7.3.

1. Βεβαιωθείτε πρώτα ότι η πηγή του ρεύματος είναι ρυθμισμένη στο μηδέν. Θέσατε σε λειτουργία την πηγή ρεύματος και το ψηφιακό βολτόμετρο και περιμένετε 5 λεπτά προκειμένου να σταθεροποιηθούν οι λειτουργίες τους.
2. Με το ρεύμα της πηγής να είναι μηδέν ($I_0 = 0$), σημειώστε την αρχική θερμοκρασία $T_{αρ}$ στο κέντρο της ράβδου νικελίου, η οποία συμπίπτει με τη θερμοκρασία των ψυχρών άκρων. Στο νικέλιο, η μετάβαση στη μόνιμη κατάσταση διαρκεί 2 λεπτά (120 s).
3. Αυξήστε το ρεύμα της πηγής προκειμένου η πτώση τάσης στα άκρα της ράβδου να γίνει 5,0 mV. Περιμένετε δύο λεπτά για να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία και κατόπιν σημειώστε την τελική (αυξημένη) θερμοκρασία $T_{τελ}$. Μηδενίστε το ρεύμα της πηγής και περιμένετε άλλα 2 λεπτά προκειμένου η ράβδος νικελίου να ψυχθεί.
4. Επαναλάβετε το βήμα 3 για τις τιμές τάσεις (σε mV) 7,1 – 8,7 – 10,0 – 11,2 και 12,3, σημειώνοντας την αρχική ($T_{αρ}$) και τελική ($T_{τελική}$) θερμοκρασίες κάθε φορά. Συμπληρώστε τον Πίνακα 1.
5. Ρυθμίστε την πηγή ρεύματος στο μηδέν και συναρμολογήστε το κύκλωμα του χαλκού. Σημειώστε την αρχική θερμοκρασία ($T_{αρ}$) στο κέντρο της χάλκινης ράβδου όταν αυτή δε διαρρέεται από το ηλεκτρικό ρεύμα. Στο χαλκό, η μετάβαση στη μόνιμη κατάσταση διαρκεί 1 λεπτό (60 s).
6. Αυξήστε το ρεύμα στο κύκλωμα προκειμένου στα άκρα της χάλκινης ράβδου να δημιουργηθεί πτώση τάσης 3,3 mV. Περιμένετε ένα λεπτό και κατόπιν σημειώστε τη θερμοκρασία που δημιουργείται στο κέντρο της ράβδου. Μηδενίστε το ρεύμα της πηγής και περιμένετε άλλο 1 λεπτό προκειμένου η ράβδος χαλκού να ψυχθεί.
7. Επαναλάβετε το βήμα 6 για τις τιμές τάσεις (σε mV) 4,0 – 4,6 – 5,2 – 5,7 και 6,1, σημειώνοντας την αρχική ($T_{αρ}$) και τελική ($T_{τελική}$) θερμοκρασίες κάθε φορά. Συμπληρώστε τον Πίνακα 2.
8. Ρυθμίστε την πηγή ρεύματος στο μηδέν και κλείστε όλα τα όργανα.

Πίνακας 1 (Ni)

Τάση στη ράβδο Ni: U_i (mV)	5,0	7,1	8,7	10,0	11,2	12,3
$T(\text{ράβδου}) (^{\circ}\text{C})$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$
$\Delta T (^{\circ}\text{C})$						

Πίνακας 2 (Cu)

Τάση στη ράβδο Cu: U_i (mV)	3,3	4,0	4,6	5,2	5,7	6,1
$T(\text{ράβδου}) (^{\circ}\text{C})$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$	$T_{αρ}$ $T_{τελ}$
$\Delta T (^{\circ}\text{C})$						

7.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Από τις τιμές του Πίνακα 1 (N_i), υπολογίστε τις τιμές ΔT_i και U_i^2 .
2. Με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων υπολογίστε την κλίση της πειραματικής ευθείας $\Delta T_i = b_{Ni}U_i^2$ στο νικέλιο. Σχεδιάστε σε γραφική παράσταση τα πειραματικά σημεία και τη βέλτιστη πειραματική ευθεία.
3. Από τη σχέση 7.16, υπολογίστε την πειραματική τιμή της σταθεράς Lorentz στο νικέλιο. Υπολογίστε επίσης και το σφάλμα της σταθεράς.
4. Από τις τιμές του Πίνακα 2 (Cu), υπολογίστε τις τιμές ΔT_i και U_i^2 .
5. Με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων υπολογίστε την κλίση της πειραματικής ευθείας $\Delta T_i = b_{Cu}U_i^2$ στο χαλκό. Σχεδιάστε σε γραφική παράσταση τα πειραματικά σημεία και τη βέλτιστη πειραματική ευθεία.
6. Από τη σχέση 7.16, υπολογίστε την πειραματική τιμή της σταθεράς Lorentz στο χαλκό, όπως και το σφάλμα της.

Ποιοι είναι οι κυριότεροι παράγοντες που θα μπορούσαν να προκαλέσουν αλλαγή στις μετρούμενες τιμές της σταθεράς Lorentz; Αιτιολογήστε την απάντησή.

Σημείωση.

Στη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, σε συναρτήσεις τύπου $y = bx$, όπου η διασπορά των τιμών x είναι μηδέν ($\sigma_x = 0$), η κλίση της βέλτιστης ευθείας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

ενώ η τυπική απόκλιση της κλίσης, δηλαδή ο τυχαίος όρος του σφάλματος της κλίσης υπολογίζεται από τον τύπο

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

όπου

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)}.$$

Σημειώνουμε ακόμη ότι στο σφάλμα της κλίσης συμβάλουν και τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 ψηφιακών οργάνων, γ_y και γ_x

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b(\gamma_y + \gamma_x) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-1)\sum x_i^2}} \quad P \geq 99,7 \%,$$

όπου $t_{n,p}$ είναι ο συντελεστής Student για $n = 6$ και πιθανότητα 99,73 %.

Παράρτημα 1

7.2.1. Σταθερά Lorentz. Κλασική προσέγγιση

7.2.1.1. Ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων

Το μοντέλο του Drude (1890) απετέλεσε την πρώτη ανάλυση και περιγραφή της κίνησης των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας στα μέταλλα. Στο μοντέλο αυτό τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας θεωρούνται ότι αποτελούν ένα αέριο N σωματιδίων σε όγκο V . Καθένα από αυτά κινείται τυχαία και όταν στο μέταλλο δεν εφαρμόζεται ηλεκτρικό πεδίο, η μέση ταχύτητά τους είναι μηδέν. Η εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} προκαλεί μία κίνηση των ηλεκτρονίων προς την κατεύθυνση του πεδίου με ταχύτητα \mathbf{u} , που είναι πολύ μικρότερη της θερμικής. Η μέση τιμή αυτής της ταχύτητας, δηλαδή η $\bar{\mathbf{u}}$, δημιουργεί ένα ηλεκτρικό ρεύμα, η πυκνότητα του οποίου είναι

$$\mathbf{J} = n_0 e \bar{\mathbf{u}}, \quad (7.17)$$

όπου e είναι το ηλεκτρικό φορτίο των ηλεκτρονίων, ενώ n_0 είναι ο αριθμός τους ανά μονάδα όγκου.

Επιπλέον, στο μοντέλο αυτό θεωρείται ότι το ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί επιτάχυνση των ηλεκτρονίων όπως στο κενό

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (7.18)$$

ενώ η μικρή τιμή της $\bar{\mathbf{u}}$ ερμηνεύεται ως αποτέλεσμα σκέδασης των ηλεκτρονίων από τα ιόντα του πλέγματος. Ακόμη θεωρείται ότι μετά τη σύγκρουση των ηλεκτρονίων με τα ιόντα του πλέγματος η ταχύτητά τους μηδενίζεται. Συνεπώς, σε μόνιμη κατάσταση, η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{e\tau}{2m} \mathbf{E}, \quad (7.19)$$

όπου τ είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ των σκεδάσεων.

Από τις σχέσεις (7.17) και (7.19) προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{j} = n_0 e^2 \frac{\tau}{2m} \mathbf{E}. \quad (7.20)$$

Λαμβάνοντάς υπόψη τη διαφορική μορφή του νόμου του $\Omega\mu$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7.21)$$

βλέπουμε ότι στο μοντέλο Drude η ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων είναι

$$\sigma = n_0 e^2 \frac{\tau}{2m}. \quad (7.22)$$

7.2.1.2. Θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων

Σύμφωνα με το μοντέλο Drude, η θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων, όπως αυτή προκύπτει από την κινητική θεωρία είναι

$$\lambda = \frac{1}{3} n_0 C_e \bar{l} \bar{v}, \quad (7.23)$$

όπου \bar{v} και \bar{l} είναι η μέση ταχύτητα και η μέση ελευθέρα διαδρομή των ηλεκτρονίων αντίστοιχα, ενώ C_e είναι η θερμοχωρητικότητα που αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρόνιο του “αερίου”. Στην κλασική Φυσική, η τιμή της C_e είναι

$$C_e = \frac{3}{2} k, \quad (7.24)$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzmann. Συνεπώς, η σχέση (7.23) γίνεται

$$\lambda = \frac{1}{2} n_0 k \bar{v} \bar{l}. \quad (7.25)$$

Επομένως στα μέταλλα, ο λόγος λ προς σ είναι

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{n_0 k \bar{l} \bar{v}}{2n_0 e^2 \tau / 2m} = \frac{mk \bar{v} \cdot \bar{v}}{e^2} = \frac{8}{\pi} \frac{k^2}{e^2} T, \quad (7.26)$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $\bar{l} = \bar{v} \tau$, όπως επίσης και τη γνωστή από την κινητική θεωρία σχέση

$$(\bar{v})^2 = \frac{8kT}{\pi m}. \quad (7.27)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για τη σταθερά Lorentz η κλασική προσέγγιση δίνει την τιμή

$$L = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k^2}{e^2} = 1,9 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}, \quad (7.28)$$

η οποία είναι σχετικά κοντά στις πειραματικές τιμές (Πίνακας 7.1).

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι στη βιβλιογραφία αναφέρεται συχνά η τιμή

$$L = 3 \frac{k^2}{e^2} = 2,23 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}, \quad (7.29)$$

που είναι πιο κοντά στις πειραματικές τιμές, πλην όμως είναι εσφαλμένη. Η τιμή 3, αντί της $8/\pi$, προκύπτει λόγω αδικαιολόγητης αντικατάστασης της σχέσης (7.27) από τη σωστή κατά τα άλλα σχέση

$$\overline{v^2} = 3kT/m.$$

Παράρτημα 2

Σταθερά Lorentz. Κβαντομηχανική προσέγγιση στο μοντέλο του “αερίου Fermi”

Και στο μοντέλο αυτό, η διάδοση της θερμότητας αποδίδεται εξολοκλήρου στο αέριο των ηλεκτρονίων. Ο ρόλος του κρυσταλλικού πλέγματος αγνοείται, καθώς στα μέταλλα η πλεγματική συνιστώσα της θερμικής αγωγιμότητας είναι περίπου 1% της ολικής. Επιπλέον, αγνοούνται οι ενεργειακές ζώνες και θεωρείται ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι ίση με αυτή στο κενό. Και εδώ, οι τύποι για την ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητα ενός μετάλλου είναι όμοιες με αυτές του μοντέλου Drude και δίνονται από τις σχέσεις (7.22) και (7.25), αλλά εδώ οι τιμές των μεγεθών \bar{v} , \bar{l} , τ , και C_e είναι διαφορετικές. Η θερμοχωρητικότητα του αερίου ανά ηλεκτρόνιο, δηλαδή η C_e είναι

$$C_e = \frac{\pi^2 k^2 T}{2E_F}, \quad (7.30)$$

όπου E_F είναι η ενέργεια Fermi. Εδώ η σχέση για την θερμική αγωγιμότητα παίρνει τη μορφή

$$\lambda = \frac{n_0 \pi^2 k^2 \lambda_F T}{3 p_F}, \quad (7.31)$$

όπου λ_F είναι η μέση ελεύθερα διαδρομή των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες πλησίον της E_F , ενώ p_F είναι η ορμή αυτών των ηλεκτρονίων. Εδώ η σχέση για την ηλεκτρική αγωγιμότητα γίνεται

$$\sigma = \frac{n_0 e^2 \lambda_F}{p_F}. \quad (7.32)$$

Συνεπώς, στην κβαντομηχανική προσέγγιση ο λόγος λ/σ είναι

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{k^2}{e^2} T \quad (7.33)$$

και, επομένως, στην προσέγγιση αυτή η σταθερά Lorentz είναι

$$L = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2}{e^2} = 2,45 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}, \quad (7.34)$$

η οποία είναι πιο κοντά στις πειραματικές τιμές.