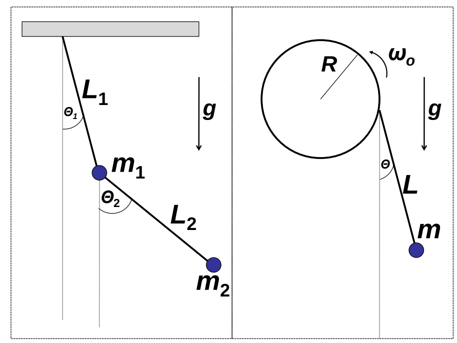
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 8/05/08 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Μηχανική 1. Βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης με τη λαγκραντζιανή μέθοδο της αναλυτικής δυναμικής, για τα ακόλουθα συστήματα:



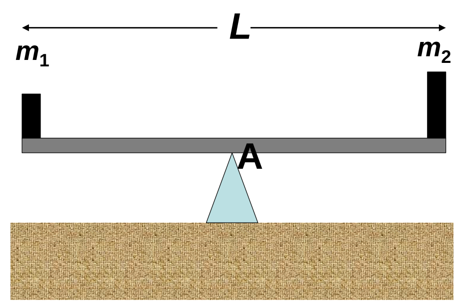
(α) Διπλό εκκρεμές στο επίπεδο όπως στο σχήμα. Το πεδίο βαρύτητας έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Να θεωρήσετε τα μήκη L_1, L_2 και τις μάζες m_1, m_2 γνωστά μεγέθη.

(β) Εκκρεμές στο επίπεδο το οποίο στηρίζεται σε σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_o, όπως στο σχήμα. Να θεωρήσετε γνωστά τα μεγέθη μήκος του εκκρεμούς L, μάζα m, ακτίνα R, μήκος εκκρεμούς, L, και κυκλική συχνότητα ω_o.

Υπενθύμιση:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad L = T - V, \qquad T = \text{Κινητική Ενέργεια}, \qquad V = \text{Δυναμική Ενέργεια},$$

Μηχανική 2. Αβαρής ράβδος μήκους L έχει στα άκρα της δυο μάζες m_1 και m_2 και στηρίζεται στο κέντρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στην αρχή συγκρατούμε τη ράβδο οριζόντια. Κάποια στιγμή την απελευθερώνουμε χωρίς τριβές και χωρίς αρχική ταχύτητα. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί η ράβδος στο σημείο Α τη στιγμή που την απελευθερώνουμε.
Υπόδειξη: Εξετάστε την περιστροφική κίνηση περί το σημείο Α και στη συνέχεια την κίνηση του κέντρου μάζας.



Κβαντομηχανική 1. Προετοιμάζεται ένα σύνολο σωματιδίων με σπιν 1 και $S_z = \hbar$.
(α) Ποιές είναι οι αναμενόμενες τιμές των S_x και S_x^2 για ένα τέτοιο σύνολο;
(β) Ποιά είναι τα δυνατά αποτελέσματα μιάς μέτρησης του S_x και ποιές οι πιθανότητες να προκύψει καθένα απ' αυτά;
(γ) Αν η μέτρηση της S_x δίνει την τιμή $-\hbar$, ποιές είναι οι σχετικές πιθανότητες για τα αποτελέσματα μιας μέτρησης του S_z η οποία γίνεται αμέσως μετά τη μέτρηση του S_x η οποία έδωσε το αποτέλεσμα $-\hbar$;
(δ) Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζεται ένα μαγνητικό πεδίο έντασης B κατά μήκος του άξονα των z. Αν τα σωματίδια έχουν μαγνητική διπολική ροπή $\gamma\vec{S}$, ποιά είναι τα δυνατά αποτελέσματα μιας μέτρησης

του S_x και ποιες οι σχετικές πιθανότητες να προκύψει το καθένα από αυτά μετά την παρέλευση χρονικού διαστήματος t;

Υπενθυμίσεις:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-1} \end{pmatrix}.$$

Κβαντομηχανική 2. Ένας δισδιάστατος ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από τη Χαμιλτωνιανή:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(1 + \delta\ x\ y)(x^2 + y^2), \quad \delta << 1.$$

(α) Να γραφούν οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις τρεις χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες για $\delta = 0$.
(β) Να υπολογιστούν με θεωρία διαταραχών οι διορθώσεις πρώτης τάξης των σταθμών αυτών για $\delta \neq 0$.
Υπενθυμίσεις:

$$\psi_0(q) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{a^2 q^2}{2}\right), \quad \psi_1(q) = \sqrt{\frac{a}{2\sqrt{\pi}}} 2aq \exp\left(-\frac{a^2 q^2}{2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda q^2) \mathrm{d}q = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

Κβαντομηχανική 3. Θεωρήστε σωματίδιο παγιδευμένο μεταξύ δύο ακλόνητων σφαιρικών κελυφών με ακτίνες a και $b > a$.
(α) Να προσδιορίσετε τις κυματοσυναρτήσεις με τις δύο χαμηλότερες τιμές στροφορμής.

Υπενθυμίσεις:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\vec{L}^2.$$

Οι λύσεις της ακτινικής εξίσωσης μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τις δοκιμαστικές εκφράσεις

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r}\left[1 + \frac{A_{1\pm}}{r} + \cdots + \frac{A_{l\pm}}{r^l}\right],$$

και προσδιορίζοντας τους συντελεστές $A_{m\pm}$.
(β) Να γράψετε τις εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές της ενέργειας για κάθε μιά από τις δύο περιπτώσεις. Μπορείτε να επιλύσετε απλά κάποια περίπτωση;

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/2 θέματα Μηχανικής & 2/3 θέματα Κβαντομηχανικής.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

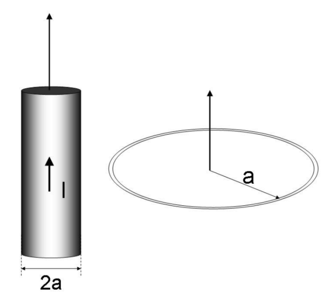
Μέρος ΙΙ - Παρασκευή 9/05/08 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

(α) Θεωρήστε ένα ευθύγραμμο αγωγό με κυκλική διατομή ακτίνας a, ο οποίος αποτελείται από γραμμικό διαπερατό υλικό μαγνητικής διαπερατότητας μ. Ο αγωγός διαρρέεται από σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I. Να υπολογιστεί η μαγνητική επαγωγή, το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική ροπή ανά μονάδα μήκους.

(β) Είναι ο νόμος του Ampere $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ συμβατός με την εξίσωση διατήρησης του φορτίου ($\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$); Τι τροποποίηση πρότεινε ο Maxwell για να κάνει την συγκεκριμένη εξίσωση συμβατή με την εξίσωση διατήρησης του φορτίου.

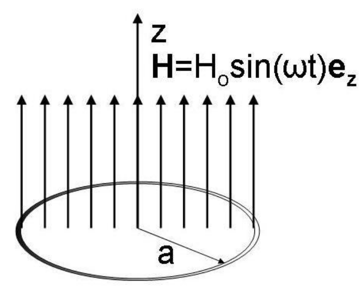
(γ) Δείξετε ότι η μαγνητική ροή ιδανικού ($E = 0$) αγώγιμου δακτυλίου, ακτίνας a παραμένει σταθερή (υπόδειξη χρησιμοποιήστε κατάλληλα το νόμο του Faraday).



(Αριστερά) Διαπερατός ευθύγραμμος αγωγός. (Δεξιά) Δακτύλιος από ιδανικό αγωγό.

ΗΜ 2.

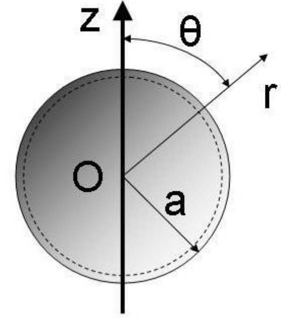
Θεωρήστε ένα κυκλικό δακτύλιο ακτίνας a στο επίπεδο xy, ειδικής αντίστασης ρ και αυτεπαγωγής L ο οποίος βρίσκεται σε ομογενές εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{H}(t) = H_0 \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_z$. Στο πλαίσιο της ημιστατικής προσέγγισης ($a \ll 2\pi c/\omega$) να προσδιοριστεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του ηλεκτρικού ρεύματος. Προσδιορίστε τη μαγνητική ροπή στη μόνιμη κατάσταση.



Αγώγιμος δακτύλιος σε εναλλασσόμενο ομογενές μαγνητικό πεδίο

ΗΜ 3.

Θεωρήστε ένα σφαιρικό φλοιό ακτίνας a απειροστού πάχους στον οποίο έχει κατανεμηθεί ηλεκτρικό φορτίο με επιφανειακή κατανομή φορτίου $\sigma(\theta) = A_0 P_0(\cos\theta) + A_1 P_1(\cos\theta) + A_2 P_2(\cos\theta)$, όπου $P_\ell(\cos\theta)$ είναι πολυώνυμα Legendre. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό σε όλο το χώρο.



Διηλεκτρικός σφαιρικός φλοιός με επιφανειακή κατανομή φορτίου

Τα θέματα μπορούν να λυθούν με πολλούς τρόπους. Όλες οι αιτιολογημένες απαντήσεις θα θεωρηθούν σωστές.
Στο δεύτερο θέμα θεωρούμε ότι ισχύει η ημιστατική προσέγγιση ($a \ll 2\pi c/\omega$) στα πλαίσια της οποίας τα χρονομεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία υπολογίζονται από το νόμο του Biot-Savart. Για το τον υπολογισμό του ηλεκτρικού ρεύματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \cos(ax)\exp(bx)\mathrm{d}x = \frac{\exp(bx)(b\cos(ax) + a\sin(ax))}{a^2+b^2}.$$

Για τη λύση του 3ου θέματος παρέχονται τα ακόλουθα δεδομένα:
Ο τελεστής κλίσης σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Laplace παρουσία αζιμουθιακής συμμετρίας δίνεται από τη σχέση

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-(\ell+1)}] P_\ell(\cos\theta).$$

Τα πολυώνυμα Legendre

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \cdots$$

και η σχέση ορθοκανονικότητας τους

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x) P_\ell(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell'\ell}.$$

Στατιστική Μηχανική 1.

Θεωρήστε σύστημα σε θερμοδυναμική ισορροπία (ΘΙ) μέσα σε θερμοδοχείο θερμοκρασίας T. Στιγμιαίο εξωτερικό αίτιο προκαλεί στο σύστημα μια απειροστή θερμοδυναμική διακύμανση (ΘΔ) μεταβάλλοντας απειροστά τις θερμοδυναμικές πιθανότητες $\{p_i(T)\}$ των μικροκαταστάσεων (i) του συστήματος (δηλαδή $p_i \to p_i + \mathrm{d}p_i$).
Ζητούνται:
(α) Να εκφράσετε τις πιθανότητες $\{p_i(T)\}$ του συστήματος στη ΘΙ, συναρτήσει της T και των ιδιοενεργειών $\{\epsilon_i\}$ αυτού.
(β) Να εκφράσετε την μέση ενέργεια $\bar{E}$ και την εντροπία S του συστήματος όταν η θερμοδυναμική του κατάσταση χαρακτηρίζεται από πιθανότητες $\{p_i\}$, συναρτήσει αυτών των $\{p_i\}$ και των ιδιοενεργειών $\{\epsilon_i\}$ αυτού.
(γ) Αν η ΘΔ προκάλεσε απειροστές μεταβολές $\mathrm{d}E$ και $\mathrm{d}S$ στα E και S του συστήματος, να εκφράσετε τα $\mathrm{d}E$ και $\mathrm{d}S$ συναρτήσει των $\{p_i, \epsilon_i, \mathrm{d}p_i\}$ και να δείξετε ότι $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S$.

Στατιστική Μηχανική 2.

(α) Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο πανομοιότυπα (μη διαχωρίσιμα) σωματίδια. Υπάρχουν τρεις διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες, με αντίστοιχες ενέργειες $\epsilon_n = n\epsilon$, όπου $n = 0, 1, 2$ και $\epsilon > 0$. Η βασική ενεργειακή κατάσταση, $\epsilon_0 = 0$, είναι διπλά εκφυλισμένη. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία στη θερμοκρασία T. Να απαριθμήσετε τις καταστάσεις του συστήματος, να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού και τη μέση ενέργεια για τις περιπτώσεις που

(i) τα σωματίδια ακολουθούν στατιστική Fermi - Dirac,

(ii) τα σωματίδια ακολουθούν τη στατιστική Bose - Einstein,

(iii) τα σωματίδια, που δεν είναι πλέον πανομοιότυπα, ακολουθούν τη στατιστική Boltzmann

(β) Ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν ώστε να μπορούμε να χειριστούμε τα φερμιόνια και τα μποζόνια ως σωματίδια με τη στατιστική Boltzmann;

Στατιστική Μηχανική 3.

Δίνεται το ενεργειακό φάσμα

$$\epsilon_p = \left[(pc)2 + m_o^2 c^4\right]^{1/2} \to pc \ \text{ στο όριο } \ p \to \infty$$

(α) Να δείξετε ότι το υπερσχετικιστικό ιδανικό αέριο φερμιονίων ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση $pV = E/3$, όπου E είναι η ολική ενέργεια.

(β) Να δείξετε ότι η εντροπία ενός ιδανικού κβαντικού αερίου δίνεται από τη σχέση

$$S = -k \sum_i \left[n_i \ln n_i + (1 - n_i) \ln(1 - n_i)\right] \quad \text{για τα φερμιόνια}$$

και

$$S = -k \sum_i \left[n_i \ln n_i - (1 + n_i) \ln(1 + n_i)\right] \quad \text{για τα μποζόνια.}$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/3 θέματα Στατιστικής & 2/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού ή 2/3 θέματα Στατιστικής & 1/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού

Καλή επιτυχία.