

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 01/12/2011 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Στατιστική Μηχανική 1.

Όταν ένα σωματίδιο με σπιν $1/2$ τοποθετείται σε μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} , η ενεργειακή του στάθμη διαχωρίζεται σε $-\mu B$ και $+\mu B$ με αντίστοιχες τιμές της μαγνητικής ροπής $+\mu$ (μαγνητική ροπή παράλληλη στο \mathbf{B}) και $-\mu$ (μαγνητική ροπή αντιπαράλληλη στο \mathbf{B}). Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από N τέτοια σωματίδια, με αμελητέες αλληλεπιδράσεις, σε μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία σε θερμοκρασία T .

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση επιμερισμού είναι αρκετή για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της μαγνήτισης.

(β) Να βρείτε τη μέση μαγνήτιση $\langle M \rangle$ του συστήματος των N σωματιδίων.

(γ) Να βρείτε τη διακύμανση της μαγνήτισης $\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle$.

Στατιστική Μηχανική 2.

(I) Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο πανομοιότυπα σωματίδια παγιδευμένα. Κάθε ένα από τα σωματίδια στην παγίδα μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις τέσσερις κβαντικές καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = \epsilon$, $\epsilon_3 = 2\epsilon$, $\epsilon_4 = 2\epsilon$ και ($\epsilon > 0$). (Έχουμε, δηλαδή, τρεις ενεργειακές στάθμες. Η Τρίτη ενεργειακή στάθμη είναι διπλά εκφυλισμένη.) Το σύστημα βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T .

Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις (i), (ii) και (iii):

(α) να απαριθμήσετε τις καταστάσεις του συστήματος, **(β)** να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος, **(γ)** τη μέση ενέργεια του συστήματος, καθώς και τις οριακές τιμές της για $T \rightarrow 0\text{ K}$ και $T \rightarrow \infty$

(i) Τα σωματίδια ακολουθούν στατιστική Fermi - Dirac

(ii) Τα σωματίδια ακολουθούν στατιστική Bose - Einstein

(iii) Τα σωματίδια είναι διακριτά

(II) Θεωρούμε ότι η παγίδα του προηγούμενου ερωτήματος είναι σε επαφή και με μια δεξαμενή σωματιδίων χημικού δυναμικού μ . Μπορεί να παγιδεύσει το πολύ μέχρι 2 σωματίδια. Να βρείτε τις αντίστοιχες συναρτήσεις επιμερισμού στην περίπτωση των ερωτημάτων (i), (ii), (iii).

Κβαντομηχανική 1.

Η κατάσταση ενός σωματιδίου με σπιν $S = 1/2$ περιγράφεται εν γένει από ένα διάνυσμα $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε τις πιθανότητες P_+ και P_- για την κατάσταση X να μετρηθούν οι τιμές $S_z = 1/2$ και $S_z = -1/2$, αντίστοιχα. Αν πολλές μετρήσεις του S_z δίνουν μέση τιμή $\langle S_z \rangle$, ποιες είναι οι πιθανότητες P_+ και P_- συναρτήσει του $\langle S_z \rangle$.

(β) Δείξτε ότι η γνώση του μέσου διανύσματος $\langle \mathbf{S} \rangle = (\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle)$ αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό του διανύσματος X . Δίνεται ότι

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Κβαντομηχανική 2.

Η κατάσταση ενός ελεύθερου σωματιδίου μάζας M που κινείται πάνω σε επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a περιγράφεται σε μια ορισμένη χρονική στιγμή $t = 0$ από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\theta, \phi) = N(1 + \cos \theta)$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες).

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στο "βόρειο" ημισφαίριο;

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ενέργειας του σωματιδίου για $t = 0$ και ποια η πιθανότητα εμφάνισης της καθεμιάς;

(γ) Ποια θα είναι η μορφή της κυματοσυνάρτησης μετά από χρόνο t ;

Χρήσιμες Σχέσεις:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}, \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}, \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα.

Καλή επιτυχία.

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

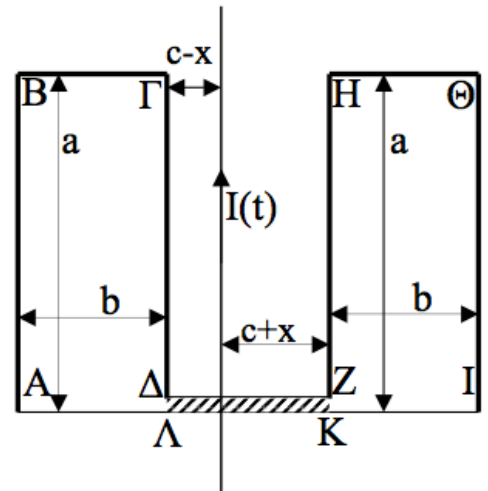
Μέρος ΙΙ - Παρασκευή 02/12/11 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

Δίδεται ευθύγραμμος αγωγός άπειρου μήκους που διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα $I(t)$, με $(dI/dt) > 0$. Σε ένα επίπεδο, που περιέχει τον αγωγό, βρίσκεται το κύκλωμα ΑΒΓΔΖΗΘΙΚΛΑ (θεωρήστε ότι είναι ακλόνητο στο χώρο) του οποίου οι πλευρές ΑΒ, ΓΔ, ΖΗ, ΘΙ, είναι παράλληλες στον αγωγό, οι πλευρές ΒΓ, ΗΘ, ΔΖ και ΑΙ κάθετες στον αγωγό και οι διαστάσεις του κυκλώματος όπως στο σχήμα. Τα σημεία Δ και Λ καθώς και τα σημεία Ζ και Κ βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο έτσι ώστε η μαγνητική ροή που περνάει από το διαγραμμισμένο τμήμα του κυκλώματος ΔΖΚΛΔ είναι αμελητέα.

(α) Να υπολογίσετε την ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα τμήματα ΑΒΓΔΑ και ΖΗΘΙΖ του κυκλώματος (κατά μέτρο και φορά) [θεωρήστε $\Delta \cong \Lambda$ και $Z \cong K$].

(β) Να υπολογίσετε την ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο συνολικό κύκλωμα ΑΒΓΔΖΗΘΙΚΛΑ (κατά μέτρο και φορά), να δείξετε ότι στην περίπτωση $x \ll c$, η ΗΕΔ είναι ανάλογη του x και να υπολογίσετε τον συντελεστή αναλογίας.



ΗΜ 2.

Ένα φύλλο ρεύματος εκτείνεται πάνω στο επίπεδο $(y - z)$ με επιφανειακή πυκνότητα $\mathbf{K} = K(t)\hat{z}$, όπου

$$K(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0, \\ K_o & \text{για } t \geq 0 \end{cases}, \quad K_o = \text{σταθερό}$$

Θεωρήστε ότι το φορτίο είναι παντού μηδέν.

(α) Να υπολογίσετε τα χρονικώς καθυστερημένα δυναμικά (A, V) και από τις δύο πλευρές του επιπέδου $(y - z)$.

(β) Να υπολογίσετε τα πεδία (\mathbf{E}, \mathbf{B}) και το διάνυσμα Poynting, και από τις δύο πλευρές του επιπέδου.

Μηχανική 1.

Για κάποιο δυναμικό σύστημα η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι αντίστοιχα

$$T = \frac{1}{2} \left[(1 + 2k)\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2 \right], \quad V = \frac{1}{2}\eta^2 \left[(1 + k)\theta^2 + \phi^2 \right]$$

όπου θ και ϕ είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος και η , k είναι θετικές σταθερές.

(α) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Lagrange για την κίνηση, να δείξετε ότι ισχύει

$$\ddot{\theta} - \ddot{\phi} + \eta^2 \left(\frac{1+k}{k} \right) (\theta - \phi) = 0$$

(β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση να αποδείξετε ότι αν $\theta = \phi$ και $\dot{\theta} = \dot{\phi}$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε $\theta = \phi$ σε κάθε χρονική στιγμή.

Μηχανική 2.

Ομογενής τροχαλία-δίσκος έχει ακτίνα R και μάζα M . Η τροχαλία είναι στερεωμένη σε σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της και μπορεί να περιστρέφεται περί αυτόν χωρίς τριβή. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολύ λεπτό άμαζο νήμα. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος είναι δεμένο υλικό σημείο μάζας m . Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης g (απόλυτη τιμή). Το νήμα να θεωρηθεί ότι κατά την κίνηση του συστήματος είναι πάντα τεντωμένο, είναι κατακόρυφο, δεν υφίσταται επιμήκυνση και κατά το ξετύλιγμά του δεν υπάρχει ολίσθηση στην τροχαλία.

(α) Το σύστημα είναι σύστημα με ολόνομους δεσμούς οπότε διαλέξτε μια (γνήσια) γενικευμένη συντεταγμένη θέσης και με τη μέθοδο των εξισώσεων του Λαγκράντζ να βρείτε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης και τη λύση της αν η αρχική γενικευμένη ταχύτητα του συστήματος είναι μηδέν.

(β) Με τις μεθόδους της αναλυτικής δυναμικής βρείτε τις γενικευμένες συνιστώσες της δύναμης του δεσμού ο οποίος κάνει το σύστημα να κινείται χωρίς ολίσθηση του νήματος στην τροχαλία.

Στερεά Κατάσταση 1.

Θεωρήστε γνωστό ότι η συγκέντρωση ατόμων πυριτίου, σε έναν καθαρό κρύσταλλο πυριτίου είναι $5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, η πυκνότητα ενδογενών φορέων σε θερμοκρασία δωματίου $n_i = 1.45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, ενώ οι κινητικότητες ηλεκτρονίων και οπών είναι $\mu_e = 1350 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ και $\mu_h = 450 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, αντίστοιχα.

(α) Δείξτε ότι, τόσο στην περίπτωση προσμίξεων τύπου n, (με συγκέντρωση N_D), όσο και (ανεξάρτητα) στην περίπτωση προσμίξεων τύπου p, (με συγκέντρωση N_A), μπορεί να προσδιορισθεί κατάλληλη συγκέντρωση προσμείξεων, ($N_{D,\text{κρίσιμη}} = ;$, ή $N_{A,\text{κρίσιμη}} = ;$, αντίστοιχα), για την οποία το υλικό παρουσιάζει ελάχιστη αγωγιμότητα. Ποια είναι η τιμή της ελάχιστης αγωγιμότητας στις δύο περιπτώσεις;

(β) Να υπολογιστεί η αντίσταση ενός κύβου $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$ πυριτίου σε θερμοκρασία δωματίου όταν είναι: β_1) απολύτως καθαρός, β_2) όταν έχει προσμίξεις αρσενικού (As: της στήλης V του περιοδικού συστήματος) σε αναλογία ατόμων $1/10^9$, β_3) όταν έχει προσμίξεις βορίου (B: της στήλης III του περιοδικού συστήματος) στην ίδια αναλογία ατόμων $1/10^9$, ως προς το πυρίτιο. [Σε όλους τους υπολογισμούς να θεωρηθεί ότι έχουμε ολικό ιοντισμό των προσμείξεων]

Στερεά Κατάσταση 2.

Η δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με τις μετατοπίσεις \mathbf{s}_i των ατόμων σε ένα σώμα δίνεται από την σχέση:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} [(k_r - k_\theta) ((\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2 + k_\theta |\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i|^2]$$

όπου \mathbf{r}_i είναι οι θέσεις ισορροπίας των ατόμων ($\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$) και k_r, k_θ είναι οι σταθερές "ελατηρίων" που περιγράφουν την αλλαγή μήκους δεσμών (bond stretching) και την αλλαγή γωνίας μεταξύ δεσμών (bond bending).

(α) Βρείτε το δυναμικό πίνακα

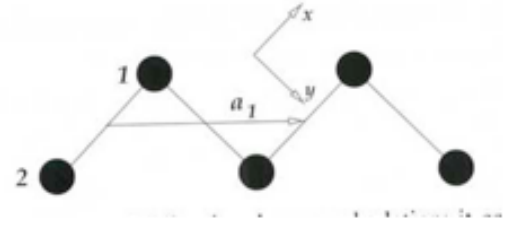
$$D_{i\alpha, j\beta} = \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \frac{\partial^2 V}{\partial s_{Ri\alpha} \partial s_{0j\beta}}$$

για τη διδιάστατη αλυσίδα του σχήματος. Η αλυσίδα έχει σταθερά πλέγματος a_1 και βάση δύο ατόμων (1 και 2).

(β) Βρείτε τις σχέσεις διασποράς των φωνονίων.

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα των σχέσεων διασποράς των φωνονίων.

(δ) Δώστε τις ιδιοσυχνότητες ω στο σημείο Γ και στο άκρο της πρώτης ζώνης Brillouin.



Λέξηερ & Οπτοηλεκτρονική 1.

A) Θεωρήστε μια οπτική κοιλότητα laser που αποτελείται από ένα κυρτό κάτοπτρο (ακτίνα καμπυλότητας $r_1 < 0$) και ένα κοίλο κάτοπτρο (ακτίνα καμπυλότητας $r_2 > 0$) που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L . Προσδιορίστε τις τιμές του L για τις οποίες η οπτική κοιλότητα παραμένει σταθερή (θεωρήστε και τις δυο περιπτώσεις $|r_1| > |r_2|$ και $|r_1| < |r_2|$).

B) Μια οπτική κοιλότητα laser αποτελείται από δυο κάτοπτρα, ένα κυρτό με ακτίνα καμπυλότητας $r_1 = -1$ m και ένα κοίλο με ακτίνα καμπυλότητας $r_2 = 1,5$ m. ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση των κατόπτρων, για την οποία η οπτική κοιλότητα laser παραμένει σταθερή;

Ενδεχόμενα Χρήσιμες σχέσεις για τα θέματα Μηχανικής

$$L = T - V, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^M \lambda_j(t) A_{ji}(q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n A_{ji}(q, t) \dot{q}_i + A_j(q, t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad M < n$$

Ενδεχόμενα Χρήσιμες σχέσεις για τα θέματα ΗΜ

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}', t_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS$$

Βασικές Σχέσεις Φυσικής των Ημιαγωγών

$$p = 2 \left(\frac{m_{h,DoS}^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_V - E_F}{kT}\right), \quad n = 2 \left(\frac{m_{e,DoS}^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right)$$

$$N_D^+ = N_D - N_D^0 = N_D - \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)} = \frac{N_D}{1 + 2 \exp\left(-\frac{E_D - E_F}{kT}\right)}$$

$$N_A^- = N_A - N_A^0 = N_A - \frac{N_A}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_F - E_A}{kT}\right)} = \frac{N_A}{1 + 2 \exp\left(-\frac{E_F - E_A}{kT}\right)}$$

Φορτίο ηλεκτρονίου: $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$,

Μάζα ηλεκτρονίου: $m_0 = 0,91 \times 10^{-30} \text{ kg}$

Σταθερά Boltzmann: $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$,

Σταθερά Planck: $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ Js}$

$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 23 \text{ kcal/mol}$,

$E(\text{eV}) \cdot \lambda (\mu\text{m}) = 1,24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}$

$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$, $kT(300\text{K}) \approx 25 \text{ meV}$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε τρία θέματα

Καλή επιτυχία.