ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

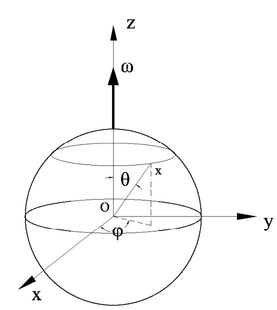
Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 18/10/07 10:00, Διάρκεια 2 1/2 ώρες

Θέμα 1. **(α)** Να γραφτούν οι ιδιοτιμές ενέργειας του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις για τη θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη στάθμη Ποιός είναι ο εκφυλισμός της πρώτης διεγερμένης στάθμης και ποιές είναι οι δυνατές τιμές του L_z για την κάθε ιδιοκατάσταση; Χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες.
(β) Θεωρήστε μια κατάσταση, η οποία κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι γραμμικός συνδυασμός της θεμελιώδους κατάστασης και της πρώτης διεγερμένης με $L_z = 0$ του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, έτσι ώστε η κάθε μία από αυτές τις καταστάσεις να συμμετέχει εξ ίσου. Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του τελεστή θέσης z στην κατάσταση αυτή ως συνάρτηση του χρόνου; Οι ορθογώνιες συντεταγμένες είναι πιο εύχρηστες σ' αυτό το ερώτημα.
Υπόδειξη: Ιδιοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}\ \exp\left(-\frac{a^2x^2}{2}\right), \quad \psi_1(x) = \sqrt{\frac{a}{2\sqrt{\pi}}}2ax\ \exp\left(-\frac{a^2x^2}{2}\right), \quad a \equiv \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

Θέμα 2. Θεωρήστε μία διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας R και απειροστού πάχους, στην οποία έχει κατανεμηθεί ηλεκτρικό φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = A\cos\theta$, όπου A σταθερά.



(α) Γράψετε τη χωρική πυκνότητα φορτίου της διηλεκτρικής σφαίρας σε σφαιρικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δέλτα του Dirac.

(β) Υπολογίστε τη σταθερά A έτσι ώστε η ηλεκτρική διπολική ροπή της κατανομής φορτίου να ισούται με p.

(γ) Προσδιορίστε το ηλεκτρικό δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο. Πώς ερμηνεύεται το ηλεκτρικό πεδίο που προσδιορίσατε;

(δ) Αν η διηλεκτρική σφαίρα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega} = \omega\widehat{\mathbf{z}}$, υπολογίστε την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος και το μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{B}$, στο εσωτερικό της σφαίρας.

Συμπληρωματικές πληροφορίες
Το θέμα μπορεί να απαντηθεί με πολλούς τρόπους. Όλες οι αιτιολογημένες απαντήσεις θα θεωρηθούν σωστές.
Για διευκόλυνση παρέχονται τα ακόλουθα δεδομένα:
Η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Laplace παρουσία αζιμουθιακής συμμετρίας είναι

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}[a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-(\ell+1)}]P_\ell(\cos\theta)$$
$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_2(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \cdots$$
$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x)P_\ell(x)dx = \tfrac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell'\ell}$$

$$1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} Y^*_{\ell m}(\theta',\phi') Y_{\ell m}(\theta,\phi) \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}$$

Σφαιρικές αρμονικές

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \tfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_{11} &= -\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \\
Y_{10} &= \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \cos\theta \\
Y_{22} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi} \\
Y_{21} &= -\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \\
Y_{20} &= \sqrt{\tfrac{5}{4\pi}} \left(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Σειρά Fourier με σφαιρικές αρμονικές

$$\begin{aligned}
&g(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi) \\
&A_{\ell m} = \int d\Omega Y^*_{\ell m}(\theta,\phi) g(\theta,\phi) \\
&\int d\Omega Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}
\end{aligned}$$

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \hat{\mathbf{e}}_\theta \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right] + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

Θέμα 3.

(α) Υλικό σημείο μάζας m κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a χωρίς τριβή (σφαιρικό εκκρεμές). Βρείτε τις εξισώσεις του Hamilton για τις γνωστές σφαιρικές συντεταγμένες (θ,ϕ) με τον $z-$άξονα κατακόρυφο και με θετική φορά προς τα κάτω. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\theta,\ \ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$ όπου υπεισέρχονται και διάφορες σταθερές. Να λάβετε υπόψην σας τη βαρύτητα.

(β) Με χρήση της θεωρίας των Hamilton-Jacobi, βρείτε την κίνηση μηχανικού συστήματος που έχει χαμιλτονιανή την

$$H = p^2 - q$$

Υπενθύμιση: Η εξίσωση των Hamilton-Jacobi για ένα δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη χαμιλτονιανή $H(q,p,t)$, είναι:

$$H\left[q, \frac{\partial S(q,t)}{\partial q}\right] + \frac{\partial S(q,t)}{\partial t} = 0$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα 3 θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Πέμπτη 18/10/07 14:00, Διάρκεια 2 1/2 ώρες

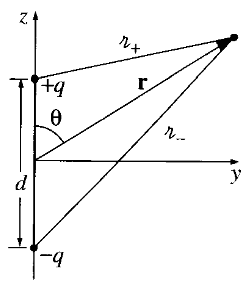
Θέμα 1. Η Χαμιλτονιανή ενός συμπαγούς περιστροφέα μέσα σε μαγνητικό πεδίο κάθετο στον άξονα των x έχει τη μορφή $AL^2 + BL_z + CL_y$. (Έχουμε παραλείψει έναν όρο που περιλαμβάνει το τετράγωνο του πεδίου).
(α) Να υπολογιστούν οι ακριβείς ιδιοτιμές της ενέργειας γι' αυτή τη Χαμιλτονιανή.
(β) Υποθέστε τώρα ότι $B >> C$ και χρησιμοποιήστε θεωρία διαταραχών δεύτερης τάξης για να βρείτε προσεγγιστικές ιδιοτιμές της ενέργειας. Συγκρίνετε με το ακριβές αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος.

Υπόδειξη:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|<\psi_m^0|H'|\psi_n^0>|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

$$L^2|l,m>= l(l+1)\hbar^2|l,m>, \quad L_z|l,m>= m\hbar|l,m>, \quad L_\pm|l,m>= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}|l,m\pm 1>$$

Θέμα 2. Το ηλεκτρικό δίπολο του σχήματος αποτελείται από 2 μικροσκοπικές σφαίρες με φορτία $q(t) = \pm q_0\cos(\omega t)$ σε απόσταση d, που συνδέονται με αγώγιμο σύρμα.
(α) Επιβεβαιώστε ότι τα καθυστερημένα δυναμικά (βαθμωτό και διανυσματικό) σε μεγάλη απόσταση από το ταλαντούμενο αυτό δίπολο (στη ζώνη ακτινοβολίας) δίδονται από τις σχέσεις



$$V(r,\theta,t) = -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\left[\omega(t-r/c)\right]$$

και

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\left[\omega(t-r/c)\right]\hat{\boldsymbol{z}}$$

(β) Να αποδείξετε ότι τα πεδία ακτινοβολίας $(d << \lambda << r)$ αυτού του δίπολου δίδονται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega(t-r/c)\right]\hat{\theta}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega(t-r/c)\right]\hat{\phi}$$

(γ) Να βρείτε τη σχέση για την ακτινοβολούμενη ισχύ αυτού του δίπολου και να εξηγήσετε γιατί το χρώμα του ουρανού την ημέρα είναι γαλάζιο. Σχολιάστε την πόλωση αυτής της γαλάζιας ακτινοβολίας.

Δίδονται: $p_0 = dq_0$,

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \hat{\mathbf{e}}_\theta\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right] + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial\theta}\right]$$

Θέμα 3. Δίνονται δυο κλειστά συστήματα A_1, A_2 αποτελούμενα από N ανεξάρτητα σωμάτια έκαστο. Τα σωμάτια στο A_1 μπορούν να καταλάβουν μια από τις δυο μη εκφυλισμένες κβαντικές στάθμες $(-\epsilon,\ \epsilon)$ έκαστο. Τα σωμάτια στο A_2 είναι αρμονικοί ταλαντωτές με $h\nu = 2\epsilon$.
Δίνονται: $E_{1a} = N\epsilon/2$ και $E_{2a} = cNh\nu$, με $c >> 1$, δεδομένο.

(α) Ζητούνται οι θερμοκρασίες T_{1a}, T_{2a} των συστημάτων A_1, A_2 για τις δεδομένες αρχικές ενέργειες E_{1a} και E_{2a}.

(β) Στη συνέχεια φέρνουμε τα A_1, A_2 σε θερμική αλληλεπίδραση και ζητούνται:

(β1) Η θερμοκρασία T του συστήματος A_{12} των θερμικά πλέον αλληλεπιδρώντων συστημάτων A_1, A_2, όταν επέλθει η θερμοδυναμική ισορροπία. Επίσης να συγκρίνετε την T με την T_{2a}. (Ποια είναι μεγαλύτερη;).

(β2) Η ενέργεια $\bar{E}$ που ανταλλάξανε τελικά τα θερμικά αλληλεπιδρώντα A_1, A_2. Επίσης να προσδιορίσετε τη μορφή και τη φορά ροής μεταξύ των A_1, A_2 της ενέργειας αυτής.

Δίνονται οι σχεσεις T vs E για τα A_1, A_2:

$$\text{Συστημα 1:}\quad kT_1 = 2\epsilon\left\{\ln\left[\frac{N\epsilon - E_1}{N\epsilon + E_1}\right]\right\}^{-1}$$

$$\text{Συστημα 2:}\quad kT_2 = h\nu\left\{\ln\left[\frac{E_2 + h\nu N/2}{E_2 - h\nu N/2}\right]\right\}^{-1}$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να αξιοποιήσετε το $c >> 1$ για απλοποίηση των πράξεων.

Η εξέταση πραγματοποιειται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα 3 θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος III - Παρασκευή 19/10/07 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Απαντήστε σε 3 από τα 6 θέματα

Θέμα 1. Ξεκινώντας από την εξίσωση Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0$$

δείξτε ότι κάθε μια από τις 4 συνιστώσες του ψ υπακούουν την εξίσωση Klein-Gordon

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

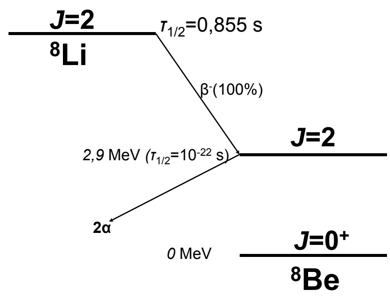
(Υπόδειξη: πολλαπλασιάστε με $\gamma^\nu \partial_\nu$)

Θέμα 2. Ξεκινώντας από την εξίσωση Klein-Gordon $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$, δείξτε ότι αν ορίσουμε ως

$$\rho = i(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}), \qquad \text{και} \quad \mathbf{j} = -i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$$

τότε τα ρ και $\mathbf{j}$ πληρούν την εξίσωση συνέχειας $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.
Βρείτε τη μορφή των ρ και $\mathbf{j}$ για την περίπτωση ελεύθερου σωματιδίου με ενέργεια E και ορμή $\mathbf{p}$.

Θέμα 3. Ο πυρήνας ^{8}Li αποδιεγείρεται με εκπομπή e^- προς την πρώτη διεγερμένη κατάσταση ($E = 2,9$ MeV) του ^{8}Be με χρόνο ημιζωής $\tau_{1/2} = 0,85$ s. Στη συνέχεια η διεγερμένη κατάσταση του ^{8}Be αποδιεγείρεται σε δυο σωματίδια-α με χρόνο ημιζωής $\tau_{1/2} = 10^{-22}$ s (βλέπε σχήμα).



(α) Ποια είναι η ομοτιμία της διεγερμένης κατάστασης στα $2,9$ MeV του ^{8}Be. (Το σωμάτιο-α έχει $J^\pi = 0^+$).

(β) Υπολογίστε την ενέργεια διαχωρισμού S_n της διάσπασης $^8\text{Li} \rightarrow ^7\text{Li} + \text{n}$. Δίνονται: $M(^8\text{Li}) = 8,025018u$, $M(^7\text{Li}) = 7,018223u$, $M(n) = 1,008920u$ και $u = 931,49$ MeV.

(γ) Γιατί ο χρόνος ημιζωής της στάθμης στα $2,9$ MeV είναι τόσο πολύ μικρότερος από το χρόνο ημιζωής της θεμελιώδους κατάστασης του ^{8}Li;

Θέμα 4. Ακτίνες X με μήκος κύματος λ προσπίπτουν σε κρύσταλλο με εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα (fcc) με κατεύθυνση $[\,\bar{1}\ \ \bar{1}\ \ 0\,]$ και υφίστανται έντονη σκέδαση Bragg (συμβολή πρώτης τάξης) στην κατεύθυνση $[\,\bar{1}\ \ 1\ \ 0\,]$. Οι δείκτες Miller δίνονται ως προς το απλό κυβικό πλέγμα (sc)

(α) Από ποια οικογένεια επιπέδων γίνεται η σκέδαση; Να βρείτε τους δείκτες Miller αυτών των επιπέδων ως προς το απλό κυβικό πλέγμα (sc) και ως προς το εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα (fcc). Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο επίπεδο.

(β) Ποια είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων που βρήκατε στο (α);

(γ) Ποια είναι η απόσταση μεταξύ δύο πλησιέστερων γειτόνων στον κρύσταλλο αυτόν (ως συνάρτηση του λ);

Θέμα 5. Ξεκινώντας από τη σχέση διασποράς για τη μονατομική γραμμική αλυσίδα, να δείξετε ότι η πυκνότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης $D(\omega)$ είναι ανάλογη του $(\omega_{max}^2 - \omega^2)^{1/2}$. Πώς διαμορφώνεται αυτό το αποτέλεσμα στις τρεις διαστάσεις;

Θέμα 6. **(α)** Ο συντελεστής απολαβής (ενίσχυσης) ασθενούς σήματος ενός ενισχυτή Laser Ρουμπινιού 15 cm μήκους είναι $\beta = 12$. Θεωρώντας αμελητέο τον κορεσμό της απολαβής (ενίσχυσης), υπολογίστε τον αντίστοιχο συντελεστή για μήκος κρυστάλλου $L = 20$ cm (40 ΜΟΝΑΔΕΣ).

(β) Αυξάνοντας την απόσταση μεταξύ των δυο κατόπτρων ενός MODE LOCKED LASER (LASER με ΕΓΚΛΕΙΔΩΣΗ ΡΥΘΜΩΝ (ΤΡΟΠΩΝ)) τι θα συμβεί στις ποσότητες; (i) Διάρκεια παλμού, (ii) Χρονική απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών παλμών, (iii) Μέση ένταση της ακτινοβολίας κάθε παλμού και (iv) Διαφορά συχνότητας μεταξύ δυο γειτονικών ρυθμών (τρόπων). Εξηγήστε-αποδείξτε τις απαντήσεις σας (60 ΜΟΝΑΔΕΣ).

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ - ΣΤΑΘΕΡΕΣ:

$$\beta = \exp[\sigma(N_j - N_i)L],\ G = R_1R_2\exp\left[2(\beta - \alpha)L\right]$$

Σταθερά Planck $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js, ταχύτητα του φωτός στο $c = 3,00 \times 10^8$ m/s.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα 6 θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία