ΒΙΒΛΙΟΝ III.

Ὁρισμοί.

1. Ἴσοι κύκλοι εἶναι ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι ἢ ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι.

2. Εὐθεῖα λέγεται ὅτι ἐφάπτεται κύκλου ἐκείνη, ἡ ὁποία ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ προεκβαλλομένη δὲν τέμνει τὸν κύκλον.

3. Κύκλοι λέγονται ὅτι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἁπτόμενοι μεταξύ των δὲν τέμνονται.

4. Εὐθεῖαι εἰς κύκλον λέγονται ὅτι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὰς κάθετοι εἶναι ἴσαι.

5. Μεγαλύτερον δὲ λέγεται ὅτι ἀπέχει ἐκείνη, ἐπὶ τῆς ὁποίας πίπτει ἡ μεγαλυτέρα κάθετος.

6. Τμῆμα κύκλου εἶναι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ τόξου κύκλου.

7. Γωνία δὲ τμήματος εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ εὐθείας καὶ τόξου κύκλου.

8. Γωνία δὲ εἶναι εἰς τμῆμα, ὅταν ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθοῦν εὐθεῖαι μέχρι τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι βάσις τοῦ τμήματος, ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων περιεχομένη γωνία.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀποκόπτουν τόξον τι κύκλου, λέγεται, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου βαίνει ἡ γωνία.

10. Τομεὺς δὲ κύκλου εἶναι, ὅταν κατασκευασθῇ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν καὶ τοῦ τόξου τοῦ κύκλου τοῦ ἀποκοπτομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων.

11. Ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

1.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα αὐτόν, ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΔΓ (I.11) καὶ ἂς προεκταθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΓΕ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι τοῦτο, ἀλλ' εἰ δυνατὸν νὰ εἶναι ἄλλο, ἔστω τὸ Η, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΗ, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΗΔ, ΔΒ καὶ ἡ βάσις ΗΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΒ· διότι εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΒ (I.8). Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀγομένη ἔκ τινος σημείου εὐθείας, σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μεταξύ των, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή (I. ὁρ. 10)· ἄρα ἡ γωνία ΗΔΒ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΔΒ ὀρθή· ἄρα ἡ ΖΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔΒ, ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ Η δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲν ἄλλο σημεῖον πλὴν τοῦ Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις τέμνῃ εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τεμνούσης· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου. (Εἰς τὸ σχῆμα λείπει τὸ Γ)

Διότι, ἔστω, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἂς πέσῃ ἐκτός, ὅπως ἡ ΑΕΒ καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 1), καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΔΑ, ΔΒ καὶ ἡ ΔΖΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΕ (I. 5)· καὶ ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΔΑΕ μία πλευρὰ ἔχει προεκβληθῆ, ἡ ΑΕΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΑΕ (I.16). Εἶναι δὲ ἡ ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΔΒΕ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΒΕ. Ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά (I.19)· ἄρα ἡ ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΖ. Ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ, ἤτοι ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα δὲν θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ οὐδ' ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἄρα θὰ πέσῃ ἐντός.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ εἰς τὸ μέσον εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, θὰ εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν· καὶ ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν θὰ τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ εἰς αὐτὸν εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ, τέμνουσα εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον, κατὰ τὸ σημεῖον Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.1) ἔστω τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, ἡ δὲ ΖΕ κοινή, ὑπάρχουν δύο πλευραὶ ἴσαι πρὸς δυὸ πλευρὰς ἀντιστοίχως· καὶ ἡ βάσις ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΖΕ (I.8). Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ σημείου εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας (I, ὁρ. 10), ἑκάστη τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι ὀρθή· ἄρα ἑκάστη τῶν ΑΖΕ, ΒΖΕ εἶναι ὀρθή. Ἄρα ἡ ΓΔ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνουσα τὴν ΑΒ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, εἰς τὸ μέσον, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Ἂς εἶναι τώρα ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον, ὅτι δηλ. ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΕΑΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΒΖ (I.5). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ἡ ΑΖΕ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν τὴν ΒΖΕ· ἄρα ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ὡς κοινήν, τὴν ΕΖ, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως (I.26)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου εἰς τὸ μέσον, εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν· καὶ ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, θὰ τὴν τέμνῃ εἰς τὸ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, δὲν τέμνονται εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αὐτοῦ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἂς τέμνωνται μεταξύ των κατὰ τὸ Ε, νὰ μὴ διέρχωνται ὅμως διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι δὲν τέμνονται εἰς τὸ μέσον.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἂς τέμνωνται μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι εἰς τὸ μέσον, ὥστε ἡ μὲν ΑΕ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ (III.1) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην τὴν ΑΓ, ἕπεται, ὅτι εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν (III. 3)· ἄρα ἡ γωνία ΖΕΑ εἶναι ὀρθή· πάλιν, ἐπειδὴ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ, τέμνει εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ εἰς τὸ μέσον, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν· ἄρα ἡ γωνία ΖΕΒ εἶναι ὀρθή. Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ἡ ΖΕΑ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΖΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕΒ, δηλ. ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου τέμνωνται μεταξύ των, δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωνται μεταξύ των δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἂς τέμνωνται μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΗ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ. Λέγω, ὅτι οὗτοι δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖΗ, ὡς ἔτυχεν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΗ, ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ· ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ, ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ σημεῖον Ε δὲν εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΗ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωνται μεταξύ των, δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ καὶ ἂς διαχθῇ, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΖΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΕ, ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα καὶ ἡ ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, ἤτοι ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ δὲν εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των, δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Ζ, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἂς εἶναι δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τὸ Ζ ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς τρίτης (I.20), ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΒ, ΕΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΒΕ [ἄρα αἱ ΒΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ΑΖ]· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΖΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΕ, ΕΖ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΕ, ΕΖ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΒΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΓΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΓΖ (I,24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΗ (I.20), ἡ δὲ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα ἡ κοινὴ ΕΖ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΖΔ. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἄγονται πρὸς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓΔ κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΖΔ. Διότι, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου αὐτῆς Ε (ὡς κορυφῆς) ἡ γωνία ΖΕΘ ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ (I. 23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἡ δὲ ΕΖ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΕ, ΕΖ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ. Λέγω, ὅτι ἄλλη ἴση (ἐκτὸς τῆς ΖΘ) πρὸς τὴν ΖΗ δὲν ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἄγεται ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, δηλ. ἡ ἐγγύτερον πρὸς τὸ κέντρον ἴση μὲ τὴν μακρύτερον· ὅπερ ἀδύνατον (κατὰ τὸ α′ μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Ζ δὲν ἄγεται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἄλλη ἴση πρὸς τὴν ΗΖ· ἄρα μία μόνη.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ κεῖται τὸ κέντρον. ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν, θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἐκτὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου διαχθοῦν πρὸς τὸν κύκλον εὐθεῖαί τινες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἄλλαι δὲ ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον τῆς περιφερείας, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτοῦ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτῆς, δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι θὰ προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ καὶ ἂς διαχθοῦν ἐκ τοῦ σημείου τούτου μερικαὶ εὐθεῖαι, ὅπως αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ καὶ ἂς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ. Λέγω, ὅτι τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον μέρος τῆς περιφερείας τὸ ΑΕΖΓ, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη ἡ ΔΑ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας τὸ ΘΛΚΗ ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΗ, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, πάντοτε δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ΔΗ εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης ἀπώτερον,ἡ μὲνΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 1) καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΜ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας ἡ ΜΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΕΜ, ΜΔ. Ἀλλὰ αἱ ΕΜ, ΜΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ (I. 20)· ἄρα καὶ ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΜΕ εἶναι ἴση πρὸς ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΜ, ΜΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΖΜ, ΜΔ· καὶ ἡ γωνία ΕΜΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΜΔ. Ἄρα ἡ βάσις ΕΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΔ (I.24). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ· ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΑ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΜΚ, ΚΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΜΔ (Ι.20), ἡ δὲ ΜΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΚ, ἕπεται, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ΚΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΔ· ὥστε ἡ ΗΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΚΔ· καὶ ἐπειδὴ ἐκ σημείου ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΜΛΔ ἐπὶ τὰ ἄκρα μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῆς ΜΔ ἤχθησαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΜΚ, ΚΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΜΚ, ΚΔ εἶναι μικρότεραι τῶν ΜΛ, ΛΔ (Ι.21)· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΜΛ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΔΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπολοίπου ΔΛ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΘ· ἄρα εἶναι ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, μικροτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Δ θὰ προσπέσουν εἰς τὸν κύκλον μόνον δύο ἴσαι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΔΗ· ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΔ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ (ὡ κορυφῆς) ἡ γωνία ΔΜΒ ἴση πὸς τὴν ΚΜΔ (Ι.23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΜΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΜΚ, ΜΔ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΜ, ΜΔ· καὶ ἡ γωνία ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΜΔ· ἄρα ἡ βάσις ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΒ (Ι.4). Λέγω, ὅτι ἄλλη εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν ΔΚ δὲν θὰ προσπέσῃ εἰς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ σημείου Δ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσπέσῃ καὶ ἄλλη, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΝ, ἀλλὰ ἡ ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΝ, δηλ. ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπώτερον κειμένην· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (κατὰ τὸ α' μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα δὲν θὰ προσπέσουν ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ, περισσότεραι τῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΔΗ.

Ἐὰν ἄρα ἐκτὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου διαχθοῦν πρὸς τὸν κύκλον εὐθεῖαί τινες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἄλλαι δὲ ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον τῆς περιφερείας, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτοῦ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας, ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτῆς, δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι θὰ προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν ἐντὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ σημείου δὲ προσπέσουν εἰς τὴν περιφέρειαν περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἂς προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓ περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς τμηθοῦν εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΕΔ, ΖΔ, ἂς διαχθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Η, Κ, Θ, Λ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, ἡ δὲ ΕΔ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΒΕ, ΕΔ· καὶ ἡ βάσις ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΕΔ (I.8)· ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΕΔ, ΒΕΔ εἶναι ὀρθή (I. ὁρ. 10)· ἄρα ἡ ΗΚ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις τέμνῃ εὐθεῖάν τινα εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τεμνούσης, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται ἐπὶ τῆς ΗΚ (πόρ. III. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ. Αἱ εὐθεῖαι ὅμως ΗΚ, ΘΛ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Δ· ἄρα τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐντὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπέσουν εἰς τὴν περιφέρειαν περισσότεραι τῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τέμνῃ ὁ κύκλος ΑΒΓ τὸν κύκλον ΔΕΖ εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα, τὰ Β, Η, Ζ, Θ καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΒΘ, ΒΗ ἂς τμηθοῦν εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ· καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Λ αἱ ΚΓ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΘ, ΒΗ, ἂς ἀχθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Α, Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ τέμνει εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ (πόρ. III. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ τέμνει εἰς τὸ μέσον εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΝΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΝΞ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Ο· ἄρα τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τοῦ κύκλου ΔΕΖ κέντρον εἶναι τὸ Ο· ἄρα ὅταν δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ τέμνωνται μεταξύ των, ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, τὸ Ο· ὅπερ ἀδύνατον (III. 5).

Ἄρα κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντὸς καὶ ληφθοῦν τὰ κέντρα αὐτῶν, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν προεκτεινομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν κύκλων.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντὸς οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η (III. 1)· λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Η πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη εὐθεῖα προεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν διέρχεται, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς κεῖται, ὅπως ἡ ΖΗΘ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΖΑ (I. 20), δηλ. τῆς ΖΘ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ταύτας ἡ κοινὴ ΖΗ· ἄρα, ἡ ὑπόλοιπος ΑΗ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΘ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα καὶ ἡ ΗΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΘ, δηλ. ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ Ζ μὲ τὸ Η δὲν θὰ πέσῃ ἐκτός· ἄρα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντός [καὶ ληφθοῦν τὰ κέντρα αὐτῶν], ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα [καὶ προεκβαλλομένη] θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτός, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτὸς κατὰ τὸ σημεῖον Α οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η (III 1)· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Η εὐθεῖα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Διότι, ἔστω ὅτι δὲν θὰ διέλθῃ, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἀκολουθῇ τὴν διαδρομὴν ΖΓΔΗ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΔΕ, ἡ ΗΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· ἄρα αἱ ΖΑ, ΑΗ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΖΓ, ΗΔ· ὥστε ὁλόκληρος ἡ ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ΖΑ, ΑΗ· αὐτὴ ὅμως εἶναι καὶ μικροτέρα (I.20)· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ εἰς τὸ Η ἀγομένη εὐθεῖα δὲν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α· ἄρα θὰ διέλθῃ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτός, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Κύκλος δὲν ἐφάπτεται κύκλου εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτεται.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἐφάπτεται ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρῶτον τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ κύκλου ΕΒΖΔ, εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Δ, Β.

Καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓΔ κέντρον τὸ Η, τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ·

Ἡ ἀγομένη ἄρα ἀπὸ τὸ Η πρὸς τὸ Θ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Β, Δ (III. 11). Ἄς εἶναι δὲ αὕτη, ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΔ· ἄρα, κατὰ μείζονα λόγον ἡ ΒΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΔ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΕΒΖΔ, ἡ ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΔ· ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ πολὺ μεγαλυτέρα αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα κύκλος δὲν ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου ἐντός, εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω ἐπίσης, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἐκτός.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἐφάπτεται ἐκτὸς ὁ κύκλος ΑΓΚ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εἰς περισσότερα ἢ ἓν σημεῖα, τὰ Α, Γ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχουν ληφθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκάστου τῶν κύκλων ΑΒΓΔ, ΑΓΚ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ πέσῃ ἐντὸς ἑκάστου τῶν κύκλων τούτων (III. 2)· ἀλλὰ εἰς μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἔπεσεν ἐντός, εἰς δὲ τὸν κύκλον ΑΓΚ ἔπεσεν ἐκτός (ὁρ. III. 3)· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα κύκλος δὲν ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου ἐκτὸς εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα δὲν ἐφάπτεται κύκλου εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, εἴτε ἐντὸς ἐφάπτεται εἴτε ἐκτός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Εἰς κύκλον αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ καὶ ἐντὸς αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (III.1) καὶ ἔστω τοῦτο τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΕΗ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ, τέμνει καθέτως εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ, τέμνει αὐτὴν καὶ εἰς τὸ μέσον (III. 3). Ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΑΖ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΗ· καὶ εἶναι ἴση ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΖ, ΕΖ (I.47)· διότι ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθή· πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ· διότι ἡ πρὸς τὸ Η γωνία εἶναι ὀρθή· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΖ, ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΗΕ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΗ· διότι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τετράγωνον τὸ τῆς ΖΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Εἰς κύκλον δὲ λέγονται εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπ' αὐτὰς εἶναι ἴσαι (ὁρ. III. 4)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλ' ἂς ἀπέχουν τώρα ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ἤτοι ἡ ΕΖ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ διπλασία τῆς ΓΗ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ· ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΖ, ΖΑ (I.47), πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ. Ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΖ, ΖΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ· ἐξ ὧν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ· διότι ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ· ἄρα καὶ τὸ ἀπομένον τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ· καὶ εἶναι τῆς μὲν ΑΖ διπλασία ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλασία ἡ ΓΔ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ.

Εἰς κύκλον ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Εἰς κύκλον μεγίστη μὲν εὐθεῖα εἶναι ἡ διάμετρος, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον τούτου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ πλησιέστερον μὲν τῆς διαμέτρου ΑΔ ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΑΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ε ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ, αἱ κάθετοι ΕΘ, ΕΚ· Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΕΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΘ (ὁρ. III. 5). Ἂς ληφθῇ ἡ ΕΛ ἴση πρὸς τὴν ΕΘ καὶ διὰ τοῦ Λ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΛΜ ἐπὶ τὴν ΕΚ ἂς προεκταθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ν, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ, ΕΗ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΛ, εἶναι ἴση καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΜΝ (III. 14). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΝ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΜΕ, ΕΝ. Ἀλλ' αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΜΝ (I.20) [καὶ ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΝ], εἶναι δὲ ἴση ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο πλευραὶ ΜΕ, ΕΝ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἡ γωνία ΜΕΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΕΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΜΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΗ (I.24). Ἀλλὰ ἡ ΜΝ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΓ [καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ]. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διάμετρος, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Εἰς κύκλον ἄρα μεγίστη μὲν εὐθεῖα εἶναι ἡ διάμετρος, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον τούτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν τόπον τὸν μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τῆς περιφερείας δὲν δύναται νὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα, καὶ ἡ μὲν γωνία τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας, ἡ δὲ ὑπόλοιπος εἶναι μικροτέρα.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α, τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου, ἀγομένη κάθετος θὰ πέσῃ ἐκτὸς κύκλου.

Διότι, ἔστω ὅτι δὲν πίπτει ἐκτός, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς πέσῃ ἐντὸς ὅπως ἡ ΓΑ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΔ (I. 5). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ γωνία ΔΑΓ· ἄρα καὶ ἡ ΑΓΔ εἶναι ὀρθή· εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ΔΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον (I.17). Ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΒΑ κάθετος δὲν θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ πέσῃ· ἄρα θὰ πέσῃ ἐκτός.

Ἂς πέσῃ αὕτη ὅπως ἡ ΑΕ· λέγω τώρα, ὅτι εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τῆς εὐθείας ΑΕ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς παρεμπέσῃ ἄλλη, ὅπως ἡ ΖΑ καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΗΔ εἶναι ὀρθή, μικροτέρα δὲ τῆς ὀρθῆς ἡ ΔΑΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ (I.19). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΘ· ἄρα ἡ ΔΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ, ἡ μικροτέρα τῆς μεγαλυτέρας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ τόξου δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ μὲν γωνία τοῦ ἡμικυκλίου ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας, ἡ δὲ ὑπόλοιπος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ εἶναι μικροτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας.

Διότι, ἐὰν ὑπάρχῃ γωνία τις εὐθύγραμμος μεγαλυτέρα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, μικροτέρα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, θὰ παρεμπέσῃ εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ σχηματίσῃ γωνίαν περιεχομένην ὑπὸ εὐθειῶν, μεγαλυτέραν μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, μικροτέραν δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ. Ἀλλὰ δὲν παρεμπίπτει τοιαύτη εὐθεῖα (κατὰ τ' ἀνωτέρω)· ἄρα δὲν θὰ ὑπάρχῃ μεγαλυτέρα ὀξεῖα γωνία περιεχομένη ὑπὸ εὐθειῶν ἀπὸ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, οὐδὲ μικροτέρα τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα ἐφάπτεται κύκλου μόνον εἰς ἓν σημεῖον, διότι ἐδείχθη, ὅτι ἡ ἔχουσα μετ' αὐτοῦ δυὸ κοινὰ σημεῖα πίπτει ἐντὸς αὐτοῦ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· πρέπει ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου ΒΓΔ ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Ε ἀκτῖνα δὲ τὴν ΕΑ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΕΑ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου ΒΓΔ ἔχει ἀχθῆ ἐφαπτομένη ἡ ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΒΓΔ, ΑΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ μὲν ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΒ· εἶναι λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΒ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΖΕ, ΕΔ· καὶ περιέχουν αὗται τὴν κοινὴν γωνίαν Ε· ἄρα ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΑ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς τοῦ ἄλλου (Ι.4)· ἄρα ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΕΔΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΒΑ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἡ ΕΒ ἔχει ἀχθῆ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (III. 16 πόρ)· ἄρα ἡ ΑΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΒΓΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἔχει ἀχθῆ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαπτομένη ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

18.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖά τις, μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Διότι, ἄς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄς ἀχθῇ εἰς τὸ Γ ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΖΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΖΗΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓΗ εἶναι ὀξεῖα (I.17)· κεῖται δὲ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ἡ μεγαλυτέρα πλευρά (I.19)· ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα καὶ ἡ ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ, ἡ μικροτέρα, τῆς μεγαλυτέρας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΖΗ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ὑπάρχει πλὴν τῆς ΖΓ· ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖά τις μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀχθείσης.

Διότι, ἄς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ, κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἄς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΓΑ· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ζ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΖ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῇ ἡ ΖΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ (III. 18)· ἄρα ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΓΕ ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ, ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ Ζ δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι ὑπάρχει, πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀχθείσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Εἰς κύκλον ἡ γωνία ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῆς ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν καὶ αἱ δύο γωνίαι ἔχουν ὡς βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐπίκεντρος μὲν γωνία, ἔστω ἡ ΒΕΓ, ἐγγεγραμμένη δὲ ἡ ΒΑΓ, ἃς ἔχουν δὲ τὸ αὐτὸ τόξον ὡς βάσιν, τὸ ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΓ.

Διότι, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΕ, ἃς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, καὶ ἡ γωνία ΕΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ· ἄρα αἱ γωνίαι ΕΑΒ, ΕΒΑ εἶναι διπλάσιαι τῆς ΕΑΒ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΕΖ ἴση πρὸς τὰς ΕΑΒ, ΕΒΑ (Ι.32)· ἄρα καὶ ἡ ΒΕΖ εἶναι διπλασία τῆς ΕΑΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΖΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΑΓ. Ἄρα ὅλη ἡ ΒΕΓ εἶναι διπλασία ὅλης τῆς ΒΑΓ.

Ἂς φέρωμεν πάλιν μίαν τεθλασμένην γραμμὴν καὶ ἔστω ἄλλη γωνία ἡ ΒΔΓ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΕ, ἃς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Η. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ γωνία ΗΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔΓ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΗΕΒ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔΒ· ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΒΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΒΔΓ.

Εἰς κύκλον ἄρα ἡ γωνία ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον εἶναι διπλασία τῆς ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν [αἱ γωνίαι] ἔχουν τὸ αὐτὸ τόξον ὡς βάσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Εἰς κύκλον, αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΒΑΕΔ ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΕΔ εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Διότι, ἃς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἃς ἀχθοῦν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία ΒΖΔ εἶναι ἐπίκεντρος, ἡ δὲ ΒΑΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἔχουν ὡς βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον τὸ ΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΔ (ΙΙΙ. 20). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΒΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΒΕΔ· ἄρα ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΕΔ.

Εἰς κύκλον ἄρα αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν εἰς κύκλον τετραπλεύρων ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθὰς (I.32), ἕπεται, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΓΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΒΔΓ· διότι αὗται εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΒΑΔΓ (III. 21), ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ· διότι εὑρίκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΑΔΓΒ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ἂς προστεθῇ ἡ κοινὴ ΑΒΓ· ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΑΒΓ, ΑΔΓ. Ἀλλὰ αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Ἄρα καὶ αἱ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΔΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἄρα τῶν εἰς τοὺς κύκλους τετραπλεύρων, αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς δὲν δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς κατασκευασθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, τὰ ΑΓΒ ΑΔΒ καὶ ἂς διαχθῇ ἡ ΑΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα ΑΓΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΑΔΒ, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων εἶναι τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας (ὁρ. III. 11), ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ, ἤτοι ἡ ἐκτὸς ἴση πρὸς τὴν ἐντός· ὅπερ ἀδύνατον (I.16). Ἄρα δὲν δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Διότι, ἔστωσαν ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΕΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΖΔ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τμῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖΔ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· ὅταν δὲ ἡ ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ τὸ τμῆμα ΑΕΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖΔ. Διότι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, τὸ δὲ τμῆμα ΑΕΒ δὲν ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΖΔ, τοῦτο ἢ θὰ πέσῃ ἐντὸς αὐτοῦ ἢ ἐκτὸς ἢ θὰ παραλλάξῃ ὅπως τὸ ΓΗΔ, ὁπότε κύκλος τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα ἢ δύο σημεῖα· ὅπερ ἀδύνατον (III. 10). Ὄχι λοιπόν, ἐὰν ἐφαρμόσῃ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς ΓΔ, δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ τμῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ ΓΖΔ· ἄρα θὰ ἐφαρμόσῃ, καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό.

Ἄρα τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δοθῇ τμῆμα κύκλου, νὰ γραφῇ ἐπ' αὐτοῦ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα.

Ἔστωσαν τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· πρέπει νὰ γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα ΑΒΓ.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ΒΑΔ.

Ἔστω πρῶτον, ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΔ (I.23) καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΔΒ μέχρι τοῦ σημείου Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΔΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΕ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας ΓΔ, ΔΕ· καὶ ἡ γωνία ΑΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΕ· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ βάσις ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΕ (I. 4). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΕ· ἄρα καὶ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἐπομένως ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα (III. 9). Ἄρα δοθέντος τμήματος κύκλου ἔχει γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τοῦτο. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒΓ εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου, διότι τὸ κέντρον Ε εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Ὁμοίως δέ, καὶ ἂν ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ, ἀφοῦ ἡ ΑΔ ληφθῇ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (I. 6) καὶ θὰ εἶναι τὸ Δ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΑΔ, καὶ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ μὲ κορυφὴν τὸ Α γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΑΒΔ (I. 23), τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΒΓ καὶ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΔΒ, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΑΒΓ μεγαλύτερον ἡμικυκλίου.

Ἄρα δοθέντος τμήματος κύκλου ἔχει γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τοῦτο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

26.

Εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἴτε ἐπίκεντροι εἶναι αὗται, εἴτε ἐγγεγραμμέναι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ εἰς αὐτοὺς ἔστωσαν ἴσαι γωνίαι ἐπίκεντροι μὲν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι τὸ τόξον ΒΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΛΖ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσοι, αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΗ, ΗΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΕΘ, ΘΖ· καὶ ἡ γωνία Η εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Θ· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ, ἕπεται, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΔΖ (ὁρισ. III. 11)· καὶ εἶναι ταῦτα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ], τὰ δὲ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, εἶναι μεταξύ των ἴσα (III. 24)· ἄρα τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΔΖ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος ΑΒΓ ἴσος πρὸς ὅλον τὸν κύκλον ΔΕΖ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΒΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΛΖ.

Εἰς ἴσους ἄρα κύκλους, αἱ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι μεταξύ των ἴσαι, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι.

Διότι, εἰς τοὺς ἴσους κύκλους ΑΒΓ, ΔΕΖ ἂς βαίνουν ἐπὶ τῶν ἴσων τόξων ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τὰ κέντρα Η, Θ (ἐπίκεντροι) αἱ γωνίαι ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΒΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘΖ, ἡ δὲ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΗΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΕΘΖ, μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω ἡ ΒΗΓ μεγαλυτέρα, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΗ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Η, γωνία ἴση πρὸς τὴν ΕΘΖ ἡ ΒΗΚ (I. 23)· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ὅταν εἶναι ἐπίκεντροι, βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (III. 26)· ἄρα τὸ τόξον ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΖ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ, τὸ μικρότερον, ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισος ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Καὶ εἶναι ἡ μὲν (ἐγγεγραμμένη) ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ Α, τὸ ἥμισυ τῆς ΒΗΓ, ἡ δὲ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ Δ τὸ ἥμισυ τῆς ΕΘΖ (III. 20). Ἄρα καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη ἡ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ.

Εἰς τοὺς ἴσους ἄρα κύκλους αἱ γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι μεταξύ των ἴσαι, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι (χορδαὶ) χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ εἰς τοὺς κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, νὰ χωρίζουν μεγαλύτερα μὲν τόξα τὰ ΑΓΒ, ΔΖΕ, μικρότερα δὲ τὰ ΑΗΒ, ΔΘΕ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν μεγαλύτερον τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τόξον ΔΖΕ, τὸ δὲ μικρότερον τόξον ΑΗΒ πρὸς τὸ μικρότερον ΔΘΕ.

Διότι, ἂς ληφθοῦν τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀκτῖνες (ὁρισ. III. I)· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΚ, ΚΒ ἴσαι πρὸς δύο, τὰς ΔΛ, ΛΕ· καὶ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΕ· ἄρα ἡ γωνία ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΛΕ (I. 8). Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, ὅταν εἶναι ἐπίκεντροι (III. 26)· ἄρα τὸ τόξον ΑΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΘΕ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος ΑΒΓ ἴσος πρὸς ὅλον τὸν κύκλον ΔΕΖ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΔΖΕ (κ. ἔν. 3).

Εἰς τοὺς ἴσους ἄρα κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουν ἴσαι εὐθεῖαι (εἰς τὰ ἴσα τόξα, ἴσων κύκλων, ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί).

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθοῦν εἰς αὐτοὺς τὰ ἴσα τόξα ΒΗΓ, ΕΘΖ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι, ἂς ληφθοῦν τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω ταῦτα τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΘΖ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΒΚΓ πρὸς τὴν ΕΛΖ (III. 27). Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσοι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀκτῖνες (ὁρ. III. 1)· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΚ, ΚΒ ἴσαι πρὸς δύο, τὰς ΕΛ, ΛΖ· καὶ περιέχουν αὗται γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (I. 4).

Ἄρα εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουν ἴσαι εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Τό δοθὲν τόξον νὰ διχοτομηθῇ.

Ἔστω τὸ δοθὲν τόξον τὸ ΑΔΒ· πρέπει τὸ τόξον ΑΔΒ νὰ διχοτομηθῇ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ (Ι.10), καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΓΔ, ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ (Ι.4). Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον (ΙΙΙ. 28)· καὶ εἶναι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΔ, ΔΒ μικρότερον ἡμικυκλίου· ἄρα τὸ τόξον ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΒ.

Ἄρα τὸ δοθὲν τόξον ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

31.

Εἰς κύκλον ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς μικρότερον τμῆμα εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ ἀκόμη, ἡ μὲν γωνία τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία τοῦ μικροτέρου τμήματος μικροτέρα ὀρθῆς.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν εἰς τὸ ΒΑΓ ἡμικύκλιον γωνία, ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου, γωνία ἡ ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς τὸ μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου τμῆμα τὸ ΑΔΓ γωνία ἡ ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΑ μέχρι τοῦ Ζ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ (Ι.5). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΕ· ἄρα ὅλη ἡ γωνία ΒΑΓ ἰσοῦται πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΖΑΓ, ἡ ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἴση πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΓΒ (Ι.32)· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΑΓ· ἄρα ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή (Ι ὁρισ. 10)· ἄρα ἡ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΒΑΓ γωνία, ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Καὶ ἐπειδὴ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν (Ι.17), ἡ δὲ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· καὶ εὑρίσκεται αὕτη εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου.

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τετράπλευρον εἰς κύκλον, τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ εἰς κύκλον τετραπλεύρων αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (III. 22), [ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΔΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς], καὶ εἶναι ἡ ΑΒΓ μικροτέρα ὀρθῆς· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος, ἡ ΑΔΓ γωνία, εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ εὑρίσκεται αὕτη εἰς τὸ τμῆμα ΑΔΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΔΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς. Καὶ εἶναι τοῦτο φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΖ γωνία εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΑ καὶ τοῦ τόξου ΑΔΓ, εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς.

Εἰς κύκλον ἄρα, ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εὑρισκομένη εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ ἀκόμη ἡ μὲν γωνία τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία τοῦ μικροτέρου τμήματος μικροτέρα ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας δύο, ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἴση πρὸς ταύτην καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὰς ἄλλας (ἐντὸς) δύο· ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, εἶναι ὀρθαί].

32.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖά τις τέμνουσα τὸν κύκλον, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας εἰς τὰ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματα.

Διότι, ἂς ἐφάπτετα τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. Λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΕΖ, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς εἰς τὰ ἐναλλὰξ τμήματα τοῦ κύκλου γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΖΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΔ κατασκευαζομένην γωνίαν (δηλ. τὴν ἐγγεγραμμένην, τὴν ἔχουσαν τὴν κορυφὴν εἰς τὸ τόξον ΒΑΔ καὶ βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ), ἡ δὲ γωνία ΕΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΔΓΒ κατασκευαζομένην γωνίαν.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΑ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ, τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον

Β καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῆ ἡ ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΑ (III. 19). Ἄρα ἡ ΒΑ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ἡ γωνία ἄρα ΑΔΒ εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή (III. 31). Αἱ λοιπαὶ ἄρα γωνίαι (τοῦ τριγώνου) αἱ ΒΑΔ, ΑΒΔ ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν (I. 32). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒΖ ὀρθή· ἄρα ἡ ΑΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΒΑΔ, ΑΒΔ. Ἃς ἀφαιρεθῇ (ἀπὸ τὰς δύο ὀρθὰς) ἡ κοινὴ ΑΒΔ· ἄρα ἡ ἀπομένουσα γωνία ΔΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου ἀπομένουσαν γωνίαν ΒΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει εἰς τὸν κύκλον (ἐγγεγραμμ.) τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (III. 22). Εἶναι δὲ καὶ αἱ ΔΒΖ, ΔΒΕ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (I. 13)· ἄρα, αἱ ΔΒΖ, ΔΒΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΑΔ, ΒΓΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΒΑΔ ἐδείχθη ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΖ· ἄρα (ἀφαιρουμένων τῶν ἴσων) ἡ ἀπομένουσα ΔΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν γωνίαν ΔΓΒ, τὴν εὑρισκομένην εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου, τὸ ΔΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖά τις τέμνουσα τὸν κύκλον, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας εἰς τὰ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Γ· πρέπει ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ, νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ.

Ἡ γωνία Γ θὰ εἶναι ἢ ὀξεῖα ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον, ὅτι εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, ἃς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία ἴση πρὸς τὴν Γ ἡ ΒΑΔ (I. 23)· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ὀξεῖα. Ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ, καὶ ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΗ ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΖ, ΖΗ· καὶ ἡ γωνία ΑΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΖΗ· ἄρα καὶ ἡ βάσις ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ (I. 4). Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ τὴν ΗΑ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β. Ἃς γραφῇ οὗτος καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΕ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΕ (III. 16 πόρ.)· ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΕ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις ἡ ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α ἔχει διαχθῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΕ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου γωνίαν τὴν ΑΕΒ (III. 32). Ἀλλὰ ἡ ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ· ἄρα καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἔχει γραφῆ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον τὴν γωνίαν ΑΕΒ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ.

Ἀλλ' ἔστω τώρα, ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή· καὶ ὅτι πρέπει πάλιν νὰ γραφῆ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν Γ. Ἄς κατασκευασθῆ πάλιν γωνία, ἡ ΒΑΔ, ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν Γ, ὅπως εἶναι εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἄς τμηθῆ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ καὶ μὲ κέντρον τὸ Ζ, ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ἄς γραφῆ κύκλος ὁ ΑΕΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἐφάπτεται ἄρα τοῦ κύκλου ΑΒΕ, διότι ἡ παρὰ το Α γωνία εἶναι ὀρθή (πόρ. III. 16). Καὶ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ· διότι καὶ αὕτη εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή (III. 31). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἄρα ἔχει γραφῆ πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ.

Ἀλλ' ἀκόμη ἔστω ἡ γωνία Γ ἀμβλεῖα· καὶ ἄς κατασκευασθῆ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΑΔ, ὅπως εἶναι εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, καὶ ἄς ἀχθῆ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, καὶ ἄς τμηθῆ πάλιν ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἄς ἀχθῆ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἄς ἀχθῆ ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἡ Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΗ ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΖ, ΖΗ καὶ ἡ γωνία ΑΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΖΗ· ἄρα ἡ βάσις ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ (I.4)· ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ τὴν ΗΛ θὰ διέλθη καὶ διὰ τοῦ Β. Ἄς διέρχεται δέ, ὅπως ὁ ΑΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΕ ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΕΒ (πόρ. III. 16). Καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α ἔχει ἀχθῆ ἡ ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα ΑΘΒ τοῦ κύκλου κατεσκευασμένην γωνίαν (III. 32). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΑΘΒ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἔχει γραφῆ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

34.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου ν' ἀφαιρεθῇ τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ·

πρέπει ἀπὸ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ν' ἀφαιρεθῇ τμῆμα τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν Δ.

Ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἄς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Β γωνία ἴση πρὸς τὴν Δ ἡ ΖΒΓ (Ι.23).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Β ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῇ ἡ ΒΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα ΒΑΓ κατασκευασθεῖσαν γωνίαν (ΙΙΙ. 32). Ἀλλὰ ἡ ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΓ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ, ἔχει ἀφαιρεθῇ τὸ τμῆμα ΒΑΓ, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

35.

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης.

Διότι, ἄς τέμνωνται μεταξύ των εἰς κύκλον τὸν ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΓ, ΒΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἐὰν μὲν αἱ ΑΓ, ΒΔ διέρχωνται διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε τὸ Ε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἄς μὴ διέρχωνται τώρα διὰ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄς ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΔΒ αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἄς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ τέμνει καθέτως εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον (ΙΙΙ. 3)· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΓ (ΙΙ. 5)· ἄς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν ΗΕ, ΗΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΓΖ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ, πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ (Ι.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ (I.47). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· τὸ ἀπομένον ἄρα ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, καὶ προσπίπτουν ἀπ᾽ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας μέρους αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης.

Διότι, ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἂς προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ ἂς τέμνῃ τὸν κύκλον ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἂς ἐφάπτεται· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ.

Ἡ ΔΓΑ ἢ θὰ διέρχεται ἢ δὲν θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Ἔστω πρότερον, ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω Ζ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ· ἄρα ἡ ΖΒΔ εἶναι ὀρθή (III. 28). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ (II. 6). Εἶναι δὲ ἡ ΖΓ ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ. Πρὸς τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ΖΔ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΔ (I. 47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ΔΒ.

Ἀλλ᾽ ἀκόμη ἔστω, ὅτι ἡ ΔΓΑ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ἄρα ἡ ΕΒΔ εἶναι ὀρθή (III. 28). Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ΕΖ, τέμνει καθέτως εὐθεῖάν τινα τὴν ΑΓ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον (III. 3)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα ἡ ΑΓ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ (II. 6). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν ΓΖ, ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΔ, ΖΕ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΓΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΕΖΓ εἶναι ὀρθή· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΔΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΒ, ΒΔ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΕΒΔ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΕΒ, ΒΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ.

Ἐὰν ἄρα ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, καὶ προσπίπτουν ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας μέρους αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ λαμβανόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Διότι, ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Δ κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς προσπίπτουν πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ ἂς τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἂς προσπίπτῃ, ἔστω δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.27), καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. Ἄρα ἡ ΖΕΔ εἶναι ὀρθή (III. 28). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ κύλου ΑΒΓ, ἡ δὲ ΔΓΑ τέμνει τὸν κύκλον, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ (III. 36). Ἦτο δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΕΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΒ, ΒΖ· καὶ βάσις αὐτῶν (τῶν τριγώνων) εἶναι ἡ κοινὴ ΖΔ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΒΖ (I. 8). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΔΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΔΒΖ εἶναι ὀρθή. Καὶ εἶναι ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος (ἀρχίζουσα ἀπὸ τὸ Β, διερχομένη διὰ τοῦ Ζ καὶ προεκτεινομένη)· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ὁποία ἄγεται κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (πόρ. III. 16)· ἄρα ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θ' ἀποδειχθῇ, καὶ ἂν τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ λαμβανόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.