

Φορμαλισμός BSSN στην Αριθμητική Γενική Σχετικότητα

Παρουσίαση Διπλωματικής Εργασίας

Γεώργιος Τακούσης

Τομέας Φυσικής

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

24 Φεβρουαρίου 2025



Περιεχόμενα

- 1 Πρόβλημα Cauchy στη Γενική Σχετικότητα
- 2 Φορμαλισμός 3+1 - Γεωμετρία της διαμέρισης
- 3 Εξισώσεις ADM-York
- 4 Υπερβολικότητα
- 5 Φορμαλισμός BSSN

Εξισώσεις πεδίου του Einstein (EFE)

Definition (Χωρόχρονος)

Χωρόχρονος $(M, \mathbf{g}) =$ τετραδιάστατη (συνεκτική & χρονικά προσανατολίσιμη) διαφορίσιμη πολλαπλότητα M , εφοδιασμένη με Lorentzian μετρική \mathbf{g} .

- **Εξισώσεις Einstein:** Καθορίζουν τη γεωμετρία (μετρική) του χωρόχρονου δεδομένης της ύλης-ενέργειας που περιέχει (τανυστής ενέργειας-ορμής $T_{\alpha\beta}$). Σε $c = G = 1$:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (1)$$

- 10 μη-γραμμικές, συζευγμένες ΜΔΕ 2ης τάξης ως προς $g_{\alpha\beta}$ (implicit in $G_{\alpha\beta}$ & $T_{\alpha\beta}$) → αναλυτική επίλυση μόνο αν η λύση έχει συμμετρίες (εξιδανικευμένες περιπτώσεις)
- **Αριθμητική σχετικότητα (NR):** Αριθμητική επίλυση εξισώσεων του Einstein ⇒ εύρεση των στοιχείων $g_{\alpha\beta}$ της μετρικής του χωρόχρονου (M, \mathbf{g}) υπολογιστικά.
- Προβλήματα συναλλοίωτης μορφής (1):
 - Μη-ξεκάθαρος μαθηματικός χαρακτήρας
 - Δεν υπάρχει σαφής διάκριση ανάμεσα στον χώρο και στον χρόνο (δεν υπάρχει "ροή του χρόνου"). Χρόνος = μία εκ των διαστάσεων, ισότιμη με τις άλλες τρεις.

Μαθηματική δομή των εξισώσεων Einstein

- Δεν περιέχουν όλες οι εξισώσεις Einstein δεύτερες χρονικές παραγώγους της $g_{\alpha\beta}$.
- Contracted Bianchi identities:

$$\nabla_{\beta} G^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \underbrace{\partial_t G^{\alpha 0}}_{\text{μέχρι } \partial_t g} = - \underbrace{\partial_i G^{\alpha i} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} G^{\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma} G^{\alpha\beta}}_{\text{μέχρι } \partial_{tt} g} \quad (2)$$

- $G^{\alpha 0} = 8\pi T^{\alpha 0} \rightarrow$ **4 constraint eqns** (περιορισμοί: ικανοποιούνται σε κάθε χρονική στιγμή από τις $g_{\alpha\beta}, \partial_t g_{\alpha\beta}$)
- $G^{ij} = 8\pi T^{ij} \rightarrow$ **6 dynamical evolution eqns** (δυναμικές εξισώσεις χρονικής εξέλιξης)
- 10 συνιστώσες $g_{\alpha\beta} \neq 6$ εξισ. χρονικής εξέλιξης \rightarrow Αναμενόμενο: Diffeomorphism Invariance/Coordinate freedom \rightarrow 4 συνιστώσες καθορίζονται από **συνθήκες βαθμίδας**
- Συμπεράσματα:
 1. Θεωρητικά: Εξισώσεις Einstein μπορούν να διατυπωθούν ως Πρόβλημα Cauchy
 2. Πρακτικά: Χρειάζεται φορμαλισμός ("φορμαλισμός 3+1") που αποσυζεύγει τον χώρο και τον χρόνο ώστε οι εξισώσεις Einstein (1) να λάβουν δυναμική μορφή, κατάλληλη για αριθμητική ολοκλήρωση \Rightarrow Επίλυση Προβλήματος Cauchy / ΠΑΤ

Πρόβλημα Cauchy για τις εξισώσεις Einstein

Πρόβλημα Cauchy (υπό περιορισμούς) για Εξισώσεις Einstein

1. Προσδιορισμός $g_{\alpha\beta}|_{t_0}$ και $\partial_t g_{\alpha\beta}|_{t_0}$ ώστε να ικανοποιούνται τα 4 constraints.
2. Χρονική εξέλιξη μέσω των 6 δυναμικών εξισώσεων που περιέχουν $\partial_{tt} g_{\alpha\beta}$.
3. Κατασκευή 4D χωρόχρονου.

- **Ερώτηση:** Είναι το ΠΑΤ καλά τοποθετημένο (ύπαρξη & μοναδικότητα λύσης), για κάθε είδους χωρόχρονο;

Αναγκαία και ικανή συνθήκη καλής τοποθέτησης ΠΑΤ

Οι εξισώσεις Einstein επιδέχονται τοπικά ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy ανν ο υπό μελέτη χωρόχρονος (M, g) είναι **καθολικά υπερβολικός (globally hyperbolic)**.

- Χωρόχρονος (αστρο)φυσικού ενδιαφέροντος \rightarrow Καθολικά υπερβολικός \Rightarrow
 - \Rightarrow **Σταθερά αιτιακός:** \exists λεία συνάρτηση καθολικού χρόνου $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το διάνυσμα με συνιστώσες $-\nabla^\mu t$ να είναι παντού μελλοντικά κατευθυνόμενο.
 - \Rightarrow **Ισχυρά αιτιακός:** δεν περιέχει κλειστές και σχεδόν κλειστές αιτιακές καμπύλες.

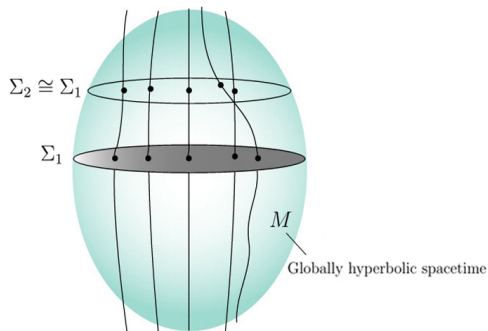
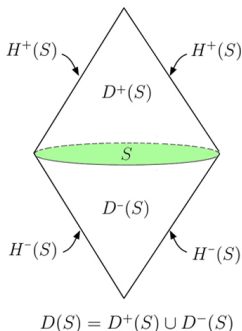
Στοιχεία αιτιακής δομής

Definition (Επιφάνεια Cauchy)

Ένα κλειστό και άχρονο σύνολο $\Sigma \subset M$ λέγεται επιφάνεια Cauchy του χωρόχρονου (M, g) αν **κάθε μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη του M τέμνει τη Σ ακριβώς μια φορά**. Ισοδύναμα, το πεδίο εξάρτησης του Σ είναι ολόκληρος ο χωρόχρονος: $D(\Sigma) = M$.

Definition (Καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος)

Ο χωρόχρονος (M, g) ονομάζεται καθολικά υπερβολικός αν επιδέχεται επιφάνεια Cauchy.



Σχήμα 1: Αριστερά: Μελλοντικό/παρελθοντικό πεδίο εξάρτησης του κλειστού, άχρονου συνόλου S Δεξιά: Καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος με επιφάνειες Cauchy Σ_1, Σ_2 .

Στοιχεία αιτιακής δομής

- Κάθε σημείο του M συνδέεται αιτιακά **αποκλειστικά** με σημεία της επ. Cauchy Σ .
- **Αρχικά δεδομένα** στην επιφάνεια Cauchy $\Sigma \xrightarrow{\text{time ev.}}$ πρόβλεψη της γεωμετρίας του χωρόχρονου με μοναδικό τρόπο (κατά Choquet-Bruhat & Geroch).

Theorem (Geroch: Τοπολογία καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου)

Αν Σ επιφάνεια Cauchy του χωρόχρονου (M, g) τότε M ισομετρικός με τον χώρο $\mathbb{R} \times \Sigma$.

- Θ. Geroch: **"3+1 διαχωρισμός"** του καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου

$$M = \underset{\text{χρόνος}}{\mathbb{R}} \times \underset{\text{χώρος}}{\Sigma} \text{ εισάγοντας διαμέριση (foliation).}$$

- Συνέπεια Θ. Geroch: \exists λεία συνάρτηση καθολικού χρόνου $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ (**Χρόνος**) με $-\nabla^\mu t = -(dt)^\mu$ χρονοειδές, μελλοντικά κατευθυνόμενο και κάθετο στις χωροειδείς ισοσταθμικές υπερεπιφάνειες Σ_t της t (**Χώρος**) όπου $\Sigma_t \cong \Sigma$

Διαχωρισμός σε χώρο και χρόνο (3+1 διαχωρισμός)

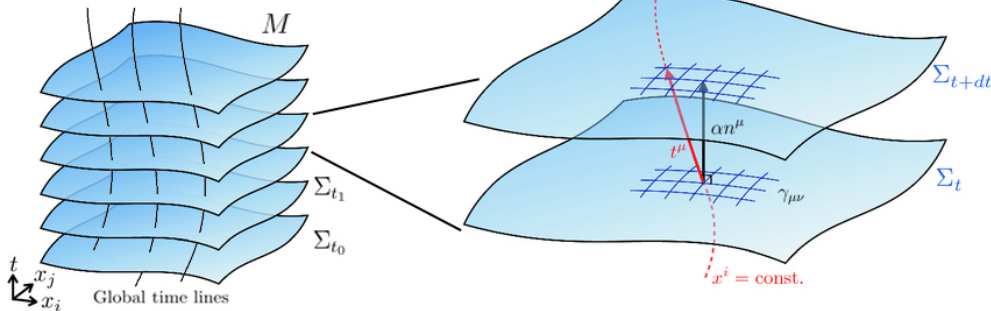
Definition (Διαμέριση - foliation/slicing)

Διαμέριση του $(M, g) = \{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ με Σ_t μη-τεμνόμενες χωροειδείς 3D υπερεπιφάνειες (χωρικές "φέτες") σταθερού καθολικού χρόνου $t = const.$ που ορίζονται:

$$\Sigma_{t_1} = \{p \in M : t(p) = t_1\} \quad \text{με} \quad \Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset \Leftrightarrow t_1 \neq t_2 \quad (3)$$

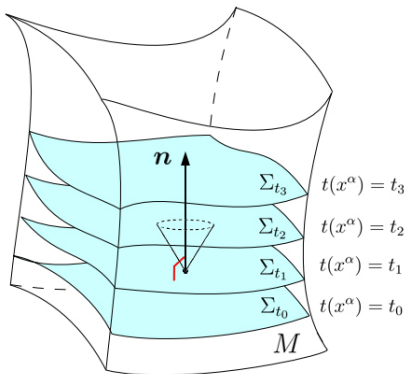
Οι Σ_t ταυτοποιούνται από την t και "υφαίνονται" μαζί κατά τις γραμμές του χρόνου ($x^i = const.$) ώστε να γεμίσουν πλήρως τον χωρόχρονο: $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$.

Family of $t = const.$ spacelike hypersurfaces (foliation/slicing)



- Συντ/νες προσαρμοσμένες στη διαμέριση: $x^\alpha = (t, x^i), i = 1, 2, 3$ Βάση: $\partial_\alpha = (\partial_t, \partial_i)$

Γεωμετρία της 3+1 διαμέρισης: Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα



- $\Omega = \nabla t \Leftrightarrow \Omega_\alpha = \nabla_\alpha t$ κάθετο 1-form στις Σ_t
 \Rightarrow **Χρονοειδές** (κλίση βαθμωτής συνάρτησης t
 \perp ισοσταθμικές επιφάνειες της t)
- $\Rightarrow \|\Omega\|^2 = \|\nabla t\|^2 = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha t \nabla_\beta t \equiv -\frac{1}{\alpha^2}$

Definition (Συνάρτηση μετάβασης - Lapse)

Lapse function (lapse): θετική βαθμωτή συνάρτηση

$$\alpha \equiv (-\|\nabla t\|^2)^{-1/2} = (-g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha t \nabla_\beta t)^{-1/2} \quad (4)$$

Σχήμα 2: Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n στις 3D χωροειδείς $\Sigma_t : t = const.$

Definition (Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα)

$$n^\alpha = -\alpha \Omega^\alpha = -\alpha \nabla^\alpha t \quad (5)$$

- $(-)$ \rightarrow **μελλοντικά κατευθυνόμενο** (αυξανόμενο t)
- $n^\alpha n_\alpha = -1$ (κανονικοποίηση) \Rightarrow 4-ταχύτητα **κάθετων/Eulerian παρατηρητών**

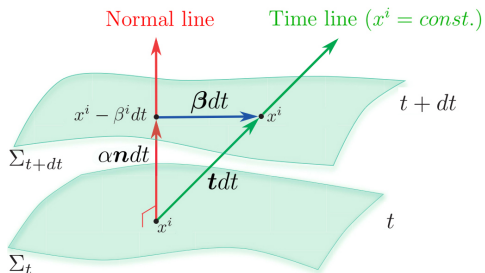
Γεωμετρία της 3+1 διαμέρισης: Διάνυσμα χρόνου

Definition (Διάνυσμα χρόνου - Time vector)

Διάνυσμα χρόνου $t =$ δυικό διάνυσμα στο 1-form $\nabla t: t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$. Ορίζεται:

$$t^\alpha = m^\alpha + \beta^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha \tag{6}$$

- $m = \alpha n$ κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης ($m^\alpha \nabla_\alpha t = 1$). Συνδέει σημεία γειτονικών υπερεπιφανειών κατά την κάθετη διεύθυνση
- $\beta =$ shift vector: χωρικό διάνυσμα ($\beta^\alpha \nabla_\alpha t = 0$) εφαπτόμενο στη Σ_t
- t Lie drag σημείων από μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη κατά μήκος των γραμμών χρόνου ($x^i = const.$) \rightarrow Ορίζει **βέλος του χρόνου**: Χρονική εξέλιξη κατά το t .



Σχήμα 3: Ερμηνεία lapse και shift.

- Ερμηνεία shift: ολίσθηση στις χωρικές συντεταγμένες του κάθετου παρατηρητή: από x^i στην Σ_t σε $x^i - \beta^i dt$ στην Σ_{t+dt}
- Ερμηνεία lapse: $d\tau = \alpha dt$ όπου $d\tau$ **ιδιόχρονος** ως προς κάθετο παρατηρητή.
 $\Rightarrow \alpha, \beta^i$ σχετίζονται με την επιλογή συντ/ων \Rightarrow Συναρτήσεις βαθμίδας (αυθαίρετες)

Επαγόμενη χωρική μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$

- Ανάλυση διανυσμάτων σε \parallel και \perp συνιστώσα στη Σ : $T_p M = T_p \Sigma \oplus \text{Vect}_p(\mathbf{n})$
- Χωρικός (εφαπτόμενος) προβολικός τελεστής: $P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$
 - Χωρική προβολή τανυστή \mathbf{T} τάξης (r, s) :

$$(PT)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = P^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots P^{\alpha_r}_{\mu_r} P^{\nu_1}_{\beta_1} \dots P^{\nu_s}_{\beta_s} T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \quad (7)$$

- Ιδιότητες:

$$P^\mu_\nu n^\nu = 0 \quad \text{και} \quad P^\mu_\nu P^\nu_\sigma = P^\mu_\sigma \quad (\text{idempotence})$$

Definition (Επαγόμενη χωρική μετρική - Πρώτη θεμελιώδης μορφή)

Η **επαγόμενη μετρική** γ μιας χωροειδούς ($\gamma \rightarrow$ Riemannian) υπερεπιφάνειας Σ είναι ο $(0, 2)$ συμμετρικός τανυστής που επάγεται στη Σ από τη \mathbf{g} και περιγράφει την εσωτερική τρισδιάστατη γεωμετρία της Σ . Ορίζεται:

$$\forall \mathbf{V}, \mathbf{W} \in T_p \Sigma, \quad \gamma_p(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \mathbf{g}_p(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \quad (8)$$

Υπό μορφή συνιστωσών:

$$\gamma_{\alpha\beta} = P^\mu_\alpha P^\nu_\beta g_{\mu\nu} \Rightarrow \gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad (9)$$

$$\Rightarrow \gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta = P^\alpha_\beta \quad (10)$$

Σύνδεση Levi-Civita της $\gamma_{\alpha\beta}$ & Εσωτερική Καμπυλότητα

- $\gamma_{\alpha\beta}$: ορίζει μοναδικά μια σύνδεση Levi-Civita D στην Σ . Στην D αντιστοιχεί η **3D χωρική συναλλοίωτη παράγωγος** D_μ με:

$$\boxed{D_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = P^\sigma_\rho P^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots P^{\alpha_r}_{\mu_r} P^{\nu_1}_{\beta_1} \dots P^{\nu_s}_{\beta_s} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}} \quad (11)$$

όπου T χωρικός ταυυστής τάξης (r, s) . Η D_μ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

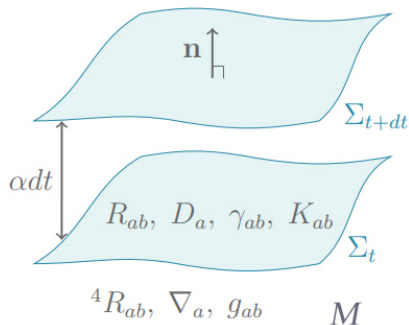
$$(i) [D_\mu, D_\nu]f = 0 \text{ (torsion-free)} \quad (ii) D_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 0 \text{ (metric compatible)} \quad (12)$$

- 3D Σύμβολα Christoffel:** $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \gamma_{\nu\lambda} + \partial_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu})$
- 3D Ταυυστής Riemann** $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \rightarrow$ εσωτερική καμπυλότητα της $\Sigma \rightarrow$ υπολογίζεται από $\gamma_{\alpha\beta}$.
Αν V χωρικό διάνυσμα:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (13)$$

Contractions:

- 3D Ταυυστής Ricci:** $R_{\alpha\beta} = R^\sigma_{\alpha\sigma\beta}$
- 3D Βαθμωτό Ricci:** $R = R^\sigma_\sigma = \gamma^{\sigma\mu} R_{\sigma\mu}$



Εξωτερική Καμπυλότητα

- Περιγράφει πώς η 3D υπερεπιφάνεια Σ "διπλώνεται" μέσα στον περιβάλλοντα 4D χωρόχρονο που είναι εμβαπτισμένη
→ κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} παύει να είναι κάθετο μετά από παράλληλη μεταφορά

Definition (Εξωτερική Καμπυλότητα - Δεύτερη θεμελιώδης μορφή)

Ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας \mathbf{K} της Σ είναι ο $(0, 2)$ τανυστής που δρα στα διανύσματα \mathbf{V}, \mathbf{W} και στο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} ως εξής:

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = -\mathbf{g}(\mathbf{P}\mathbf{W}, \nabla_{\mathbf{P}\mathbf{V}}\mathbf{n}) = -\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta V^\alpha W^\beta \nabla_\mu n_\nu \quad (14)$$

Υπό μορφή συνιστωσών:

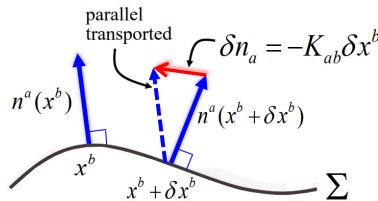
$$K_{\alpha\beta} \equiv -\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu \quad (15)$$

- $K_{\alpha\beta} =$ **συμμετρικός & πλήρως χωρικός** τανυστής

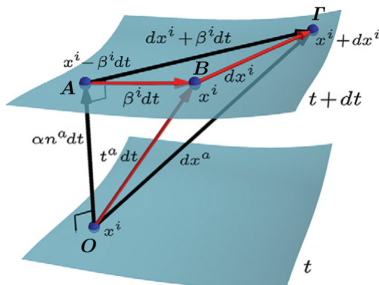
- Ισοδύναμη έκφραση: $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}L_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta}$

- Ίχνος - μέση καμπυλότητα:

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$$



Σύστημα συντ/νων προσαρμοσμένο στη διαμέριση



Σχήμα 4: Στοιχείο μήκους στον 3+1 χωρόχρονο

Η συνθήκη δεικνότητας $t^\alpha \nabla_\alpha t = dt(t) = dx^0(t) = 1$
 \Rightarrow Στο σύστημα (t, x^i) ισχύει $t = \partial_t$

δηλαδή $t^\alpha = (\partial_t)^\alpha = \delta^\alpha_0 \Rightarrow t^\alpha = (1, 0, 0, 0)$

- $n_\alpha = -\alpha \partial_\alpha t \Rightarrow n_\alpha = (-\alpha, 0, 0, 0)$ (16)

$\Rightarrow t$ -συνιστώσα ανταλλοίωτων χωρικών τανυστών = 0
 π.χ. $\beta^0 = 0$

- $n^\alpha = \frac{1}{\alpha}(t^\alpha - \beta^\alpha) \Rightarrow n^\alpha = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}\right)$ (17)

Μετρική με όρους 3+1 μεγεθών

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \hline \beta_i & \gamma_{ij} \end{array} \right) \Leftrightarrow g^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -1/\alpha^2 & \beta^j/\alpha^2 \\ \hline \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{array} \right) \quad (18)$$

Στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (-\alpha^2 + \beta_k \beta^k) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (19)$$

$$= -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (20)$$

Εξισώσεις Gauss(-Codazzi), Codazzi(-Mainardi) & Ricci

- Σχέσεις της διαφορικής γεωμετρίας που συσχετίζουν τις **προβολές** του 4D τανυστή Riemann ${}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ στη χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ και στο \mathbf{n} , με χωρικά μεγέθη.

Proposition (Εξίσωση Gauss / Gauss-Codazzi)

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma} \quad (21)$$

Contractions:

- $\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma^\mu_\alpha n^\rho \gamma^\nu_\beta n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma} K_{\beta\gamma}$
- ${}^{(4)}R + 2n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$ (Theorema Egregium)

Proposition (Εξίσωση Codazzi / Codazzi-Mainardi)

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = D_\beta K_{\alpha\gamma} - D_\alpha K_{\beta\gamma} \quad (22)$$

Contraction:

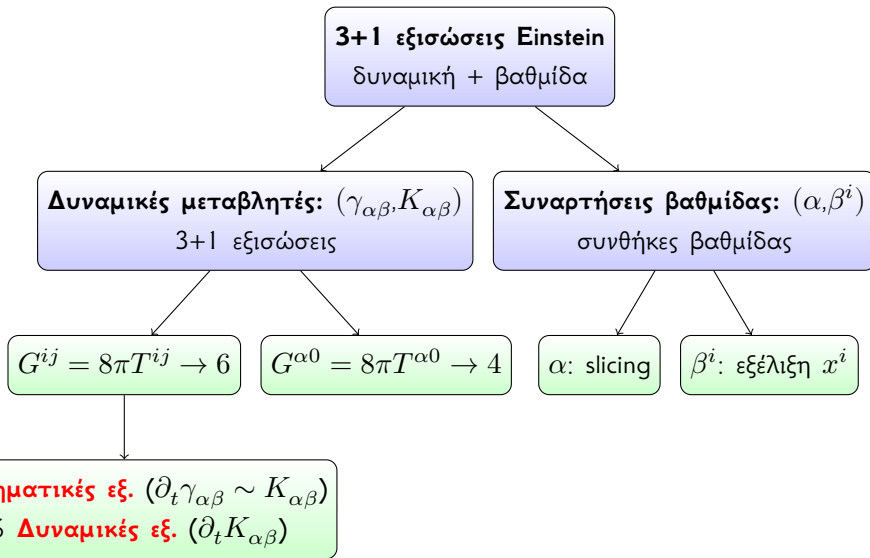
- $\gamma^\mu_\alpha n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha{}^\mu$

Proposition (Εξίσωση Ricci)

$$\gamma^\mu_\alpha n^\rho \gamma^\nu_\beta n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} = L_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha + K_{\beta\rho} K_\alpha{}^\rho \quad (23)$$

3+1 decomposition των εξισώσεων Einstein

- Γεωμετρία 3+1 φορμαλισμού $\checkmark \rightarrow$ Επόμενο βήμα: αναδιαμόρφωση των εξ. Einstein ("3+1 decomposition of EFE") σε δυναμική 3+1 μορφή \rightarrow 3+1 πρόβλημα Cauchy



$$(\gamma_{\alpha\beta}, \alpha, \beta^i) \rightarrow g_{\alpha\beta} \text{ (βλ. σχέση 18)}$$

3+1 decomposition των εξισώσεων Einstein

Proposition (Εξισώσεις Einstein στον 3+1 χωρόχρονο)

Στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) :

- $n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} = 8\pi n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}$ Hamiltonian constraint \rightarrow 1 εξ.
 - $\gamma^\alpha_i n^\beta G_{\alpha\beta} = 8\pi \gamma^\alpha_i n^\beta T_{\alpha\beta}$ Momentum constraints \rightarrow 3 εξ.
 - $\gamma^\alpha_i \gamma^\beta_j G_{\alpha\beta} = 8\pi \gamma^\alpha_i \gamma^\beta_j T_{\alpha\beta}$ Dynamical evolution eq (για το K_{ij}) \rightarrow 6 εξ.
-
- $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} L_{\mathbf{n}} \gamma_{\alpha\beta}$ Kinematical evolution eq (για το γ_{ij}) \rightarrow 6 εξ.

- LHS: Προβολές ταυσιτή Einstein \rightarrow εξ. Gauss, Codazzi, Ricci + contractions
- RHS: Προβολές ταυσιτή ενέργειας-ορμής \rightarrow 3+1 ανάλυση του $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + j_\alpha n_\beta + j_\beta n_\alpha + \rho n_\alpha n_\beta \quad (24)$$

όπου

- $\rho \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$
- $j_\alpha \equiv -\gamma^\mu_\alpha n^\nu T_{\mu\nu}$
- $S_{\alpha\beta} \equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu}$
- Ήχος: $T = S - \rho$

Εξισώσεις 3+1 / Εξισώσεις ADM-York

Εξισώσεις 3+1/ADM-York

1. Εξισώσεις των περιορισμών (constraints):

- (i) Hamiltonian constraint

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \quad (25)$$

- (ii) Momentum constraints

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i \quad (26)$$

Πρόταση: Αν $(\gamma_{ij}, K_{ij})|_{t=t_0}$ ικανοποιούν τους περιορισμούς, οι συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi εγγυώνται ότι θα συνεχίσουν να τους ικανοποιούν για $t \geq t_0$.

2. Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης (evolution equations):

- (i) Εξίσωση χρονικής εξέλιξης της χωρικής μετρικής (κινηματική)

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (27)$$

- (ii) Εξίσωση χρονικής εξέλιξης της εξωτερικής καμπυλότητας (δυναμική)

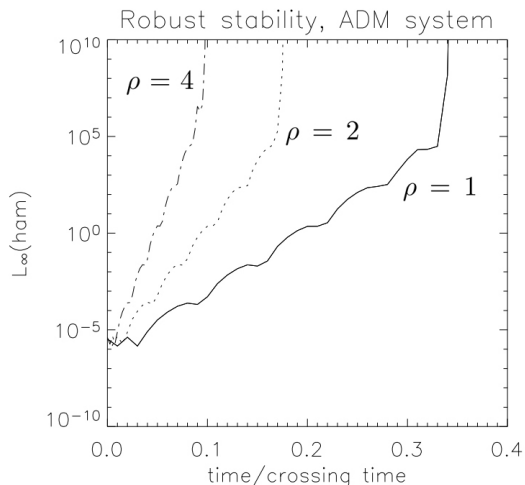
$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik}K^k_j) - 8\pi\alpha \left[S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(S - \rho) \right] \\ & + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k \end{aligned} \quad (28)$$

Contractions: $\partial_t \ln \gamma = -2\alpha K + 2D_i \beta^i$

$$\partial_t K = -D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(S + \rho)] + \beta^k D_k K$$

Αριθμητική αστάθεια εξισώσεων ADM-York

- Θεωρητικά, οι εξισώσεις ADM-York (εξ. 3+1) δύνανται να ολοκληρωθούν αριθμητικά → Χρήση μέχρι mid-1990s
- Στην πράξη: αστάθεια → μικρά σφάλματα στα αρχικά δεδομένα μεγεθύνονται → λύση αποκλίνει (γρηγορότερα από) εκθετικά → code crashes



Σχήμα 5: Έλεγχος ευστάθειας για $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}$, $K_{ij} = 0$ και αρμονική βαθμίδα, με $\varepsilon_{ij} \in (-10^{-10}/\rho^2, 10^{-10}/\rho^2)$. Απεικονίζεται η νόρμα $L_\infty(\mathcal{H})$ συναρτήσεως του χρόνου. [11]

Υπερβολικότητα & Καλή Τοποθέτηση

- Κακή υπολογιστική συμπεριφορά των ADM-York εξισώσεων \rightarrow σχετίζεται με την **υπερβολικότητα** των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης

Theorem

Ένα ισχυρά υπερβολικό σύστημα ΜΔΕ επιδέχεται καλά τοποθετημένο (*well-posed*) πρόβλημα αρχικών τιμών.

Definition (Καλή τοποθέτηση)

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy) καλείται καλά τοποθετημένο αν:

- υπάρχει λύση
- η λύση είναι μοναδική
- η λύση $\vec{u}(t, x)$ εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις αρχικές συνθήκες $\vec{u}(0, x)$, δηλαδή υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ και δύο σταθερές k, α τέτοιες ώστε:

$$\|\vec{u}(t, x)\| \leq ke^{\alpha t} \|\vec{u}(0, x)\| \quad (29)$$

- Σύστημα ADM-York = **ασθενώς υπερβολικό** και άρα μη-καλά τοποθετημένο, για δεδομένο shift vector β^i και για μεγάλο εύρος slicing conditions για το lapse α . Αντιθέτως: σύστημα BSSN = **ισχυρά υπερβολικό** κάτω από τις ίδιες συνθήκες [1].

Δομή δυναμικής εξίσωσης χρονικής εξέλιξης

- Το αίτιο της ασθενούς υπερβολικότητας αναζητείται στη δυναμική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j) - 8\pi\alpha \left[S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho) \right] \\ & + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k \end{aligned} \quad (30)$$

- Στο δεξί μέλος εμφανίζεται R_{ij} :

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \gamma^{kl} (\partial_k \partial_l \gamma_{ij} + \partial_i \partial_j \gamma_{kl} - \partial_k \partial_j \gamma_{il} - \partial_i \partial_l \gamma_{kj}) + \gamma^{kl} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{mkj} - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mkl}) \quad (31)$$

- Η χρονική εξέλιξη της χωρικής μετρικής έχει τη μορφή:

$$\partial_{tt} \gamma_{ij} \sim -2\alpha \partial_t K_{ij} \sim -\alpha^2 \left(\underbrace{\gamma^{kl} \partial_i \partial_l \gamma_{kj} + \gamma^{kl} \partial_k \partial_j \gamma_{il} - \gamma^{kl} \partial_i \partial_j \gamma_{kl}}_{\text{mixed derivatives}} - \underbrace{\gamma^{kl} \partial_k \partial_l \gamma_{ij}}_{\text{Laplacian}} \right) \quad (32)$$

- Παρατήρηση: Οι όροι με μεικτές παραγώγους 2ης τάξης αποτρέπουν τις συνιστώσες $\gamma_{\alpha\beta}$ από το να ικανοποιούν μια εξίσωση όμοια με την κυματική.

Φορμαλισμός BSSN

- **BSSN φορμαλισμός** → Baumgarte-Shapiro (1998), Shibata-Nakamura (1995):
- **Στόχος BSSN:** Αναδιατύπωση εξισώσεων ADM-York ώστε να προκύψει ισχυρά υπερβολικό σύστημα ⇒ καλά τοποθετημένο
- Στοιχεία BSSN φορμαλισμού:
 1. Σύμμορφος μετασχηματισμός γ_{ij}
 2. Σύμμορφη αποδόμηση K_{ij}
 3. **Ορισμός βοηθητικών δυναμικών μεταβλητών $\tilde{\Gamma}^i$**

1. Σύμμορφος μετασχηματισμός:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij} \quad \text{με} \quad \tilde{\gamma} \equiv \det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1 \quad (33)$$

- $\psi = e^\phi \rightarrow$ σύμμορφος παράγοντας, $\phi = \frac{1}{12} \ln \gamma \rightarrow$ σύμμορφος εκθέτης

$$C^i_{jk} \equiv \Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk} = 2(\delta^i_j \partial_k \phi + \delta^i_k \partial_j \phi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{il} \partial_l \phi) \quad (34)$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{D}_k C^k_{ij} - \tilde{D}_i C^k_{kj} + C^k_{ij} C^l_{lk} - C^k_{il} C^l_{kj} = \tilde{R}_{ij} + R^{\phi}_{ij} \quad (35)$$

$$R = e^{-4\phi} \tilde{R} - 8e^{-5\phi} \tilde{D}^2 e^\phi \quad (36)$$

όπου $R^{\phi}_{ij} = -2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \tilde{D}^m \phi + 4\tilde{D}_i \phi \tilde{D}_j \phi - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \phi \tilde{D}^m \phi$

Φορμαλισμός BSSN

2. Σύμμορφη αποδόμηση:

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}K = e^{4\phi}\tilde{A}_{ij} + e^{4\phi}\frac{1}{3}\tilde{\gamma}_{ij}K \quad (37)$$

- όπου $\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi}A_{ij}$ το σύμμορφο άιχνο μέρος της K_{ij} με $\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{A}_{ij} = 0$

3. Νέες δυναμικές μεταβλητές - σύμμορφες μεταβλητές σύνδεσης ("gammas"):

$$\tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{jk}\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\tilde{\gamma}^{-1/2}\partial_j(\tilde{\gamma}^{1/2}\tilde{\gamma}^{ij}) \stackrel{\tilde{\gamma}=1}{=} -\partial_j\tilde{\gamma}^{ij} \quad (38)$$

- Οι ανεπιθύμητες μεικτές παράγωγοι του \tilde{R}_{ij} απορροφούνται στις πρώτες παραγώγους των gammas:

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i}\partial_{j)}\tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k\tilde{\Gamma}_{(ij)k} + \tilde{\gamma}^{lm}(2\tilde{\Gamma}_{l(i}\tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\Gamma}_{im}^k\tilde{\Gamma}_{klj}) \quad (39)$$

Δυναμικές μεταβλητές:

$$\underbrace{(\gamma_{ij}, K_{ij})}_{\text{ADM-York}} \rightarrow \underbrace{(\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}) + \tilde{\Gamma}^i}_{\text{BSSN}}$$

Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης BSSN

- Από $\partial_t \ln \gamma = -2\alpha K + 2D_i \beta^i$:

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6}\alpha K + \frac{1}{6}\partial_i \beta^i + \beta^i \partial_i \phi \quad (40)$$

- Από $\partial_t K = -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(S + \rho)] + \beta^i D_i K$:

$$\partial_t K = -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha + \alpha \left[\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 + 4\pi(S + \rho) \right] + \beta^i \partial_i K \quad (41)$$

- Από $\partial_t \phi$ και $\partial_t \gamma_{ij}$ (ADM-York):

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k + \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k \quad (42)$$

- Από $\partial_t \phi$, $\partial_t K$ και $\partial_t \gamma_{ij}$, $\partial_t K_{ij}$ (ADM-York):

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} [-D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - 8\pi S_{ij})]^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{im} \tilde{A}^m_j) \\ - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \partial_k \beta^k + \beta^k \partial_k \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k \end{aligned} \quad (43)$$

- Από $\partial_t \tilde{\gamma}^{ij} = -\tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \partial_t \tilde{\gamma}_{kl}$ και τους περιορισμούς ορμής:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i = -2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}^i_{jk} \tilde{A}^{kj} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{\gamma}^{ik} j_k + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi \right) \\ + \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ki} \partial_k \partial_j \beta^j + \tilde{\gamma}^{kj} \partial_j \partial_k \beta^i \end{aligned} \quad (44)$$

Εξισώσεις των περιορισμών BSSN

Για να ολοκληρώσουμε τον BSSN φορμαλισμό → αναδιατύπωση περιορισμών ADM-York με όρους $(\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij})$ και \tilde{D}_i

- Χαμιλτονιανός περιορισμός

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \Rightarrow \tilde{D}^2 e^\phi - \frac{1}{8}e^\phi \tilde{R} + \frac{1}{8}e^{5\phi} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{1}{12}e^{5\phi} K^2 + 2\pi e^{5\phi} \rho = 0 \quad (45)$$

- όπου $\tilde{D}^2 e^\phi \equiv \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j e^\phi$

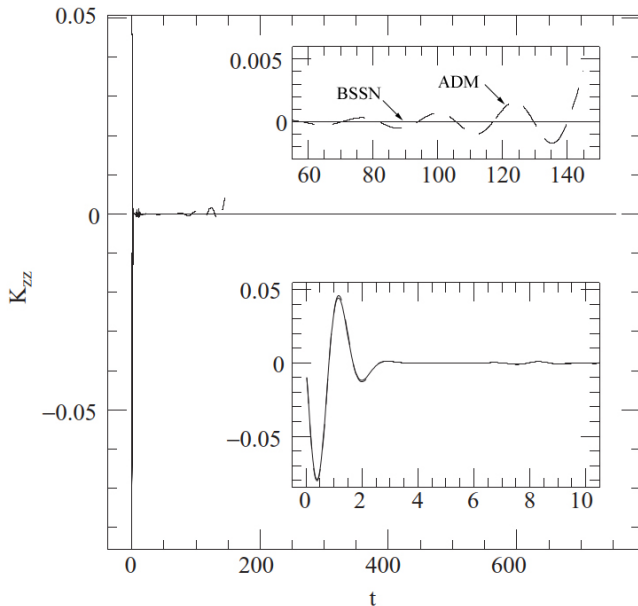
- Περιορισμοί ορμής:

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i \Rightarrow \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{\gamma}^{ik} j_k = 0 \quad (46)$$

- Σύμμορφη αποδόμηση + ορισμός των gammas: εισάγουν τρεις επιπρόσθετους αλγεβρικούς περιορισμούς

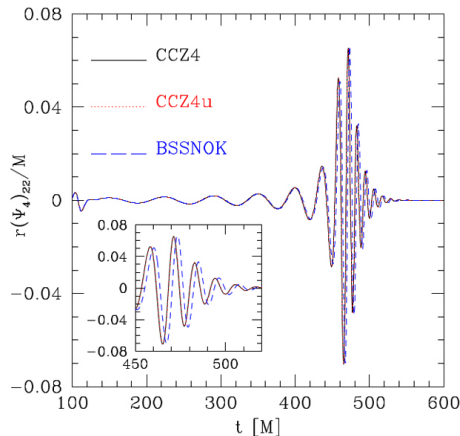
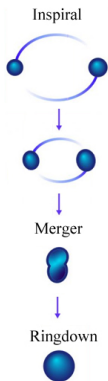
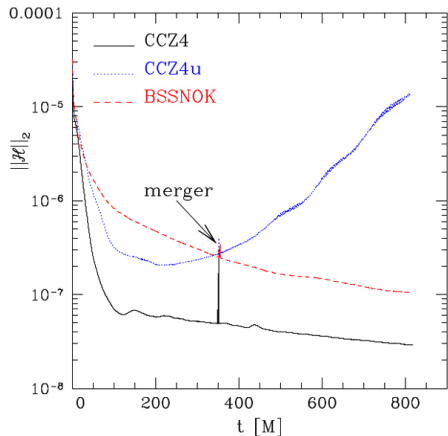
$$\boxed{\det(\tilde{\gamma}_{ij}) \equiv \tilde{\gamma} = 1}, \quad \boxed{\tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0}, \quad \boxed{g^i \equiv \tilde{\Gamma}^i + \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} = 0} \quad (47)$$

Έλεγχος ευστάθειας σε υπολογιστικές προσομοιώσεις: Κύμα Teukolsky



Σχήμα 6: Χρονική εξέλιξη της K_{zz} συνιστώσας της εξωτερικής καμπυλότητας για βαρυτικό κύμα Teukolsky μικρού πλάτους στη γραμμικοποιημένη βαρύτητα, με χρήση των ADM-York εξισώσεων και των BSSN εξισώσεων. Συνθήκες βαθμίδας: $\beta^i = 0$, $\partial_t \alpha = -\alpha K^2$. [2]

Έλεγχος ευστάθειας σε υπολογιστικές προσομοιώσεις: Binary mergers



Σχήμα 7: Αριστερά: Απόκλιση από τον χαμιλτονιανό περιορισμό ως συνάρτηση του χρόνου, για δυαδικό σύστημα μη-περιστρεφόμενων μελανών οπών ίσης μάζας σε αρχική απόσταση $d = 8M$. Συγχώνευση (merger) σε $t \approx 360M$. Δεξιά: Πραγματικό μέρος του μιγαδικού βαθμωτού Weyl $\Psi_4 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta$ για $l = m = 2$, που εξάγεται σε σφαίρα ακτίνας $r = 100M$ ως συνάρτηση του χρόνου. [12]

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Ερωτήσεις;

Βιβλιογραφία I

- [1] Alcubierre M. (2008). Introduction to 3+1 Numerical Relativity, International Series of Monographs on Physics (Oxford, 2008; online edn, Oxford Academic, 1 Sept. 2008), <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199205677.001.0001>
- [2] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. (2010). Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CB09781139193344>
- [3] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. (2021). Numerical Relativity: Starting from Scratch. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108933445>
- [4]ourgoulhon, E. (2012). 3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity. Lecture Notes in Physics v. 846, Springer Berlin Heidelberg.
- [5] Bona C., Palenzuela C. & Bona-Casas C. (2009). Elements of Numerical Relativity and Relativistic Hydrodynamics. 10.1007/978-3-642-01164-1.
- [6] Rezzolla, L. and Zanotti, O. (2013). Relativistic Hydrodynamics (Oxford, 2013; online edn, Oxford Academic, 23 Jan. 2014), <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198528906.001.0001>

Βιβλιογραφία II

- [7] Shibata, M. (2015). Numerical Relativity. World Scientific Publishing Company Pte Limited. <https://doi.org/10.1142/9692>
- [8] Bernuzzi, S. (2021), Lecture Notes on 3+1 Numerical Relativity, Friedrich-Schiller-Universität Jena
<http://sbernuzzi.gitpages.tpi.uni-jena.de/nr/notes/2021/main.pdf>
- [9] Cook, G. B. (2000). Initial Data for Numerical Relativity. Living Reviews in Relativity, 3(1), 5. <https://doi.org/10.12942/lrr-2000-5>
- [10] Wald, Robert M. (1984). General Relativity. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr. <https://doi.org/10.7208/chicago/9780226870373.001.0001>.
- [11] N. Jansen, B. Bruegmann and W. Tichy, (2006). "Numerical stability of the AA evolution system compared to the ADM and BSSN systems," Phys. Rev. D **74**, 084022 doi:10.1103/PhysRevD.74.084022 [arXiv:gr-qc/0310100 [gr-qc]].
- [12] D. Alic, C. Bona-Casas, C. Bona, L. Rezzolla and C. Palenzuela, "Conformal and covariant formulation of the Z4 system with constraint-violation damping," Phys. Rev. D **85**, 064040 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.064040 [arXiv:1106.2254 [gr-qc]].

Στοιχεία αιτιακής δομής

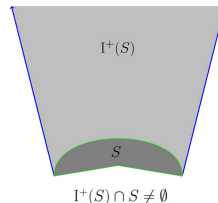
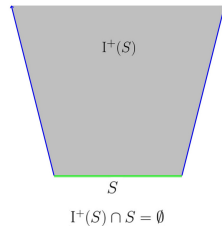
Definition (Μελλοντικά/παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη)

Μια αιτιακή καμπύλη ονομάζεται **μελλοντικά/παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη (future/past inextendible)** αν δεν έχει μελλοντικό/παρελθοντικό τελικό σημείο. Καλείται **μη-επεκτάσιμη (inextendible)** αν δεν έχει ούτε μελλοντικό ούτε παρελθοντικό τελικό σημείο.

Definition (Άχρονο σύνολο)

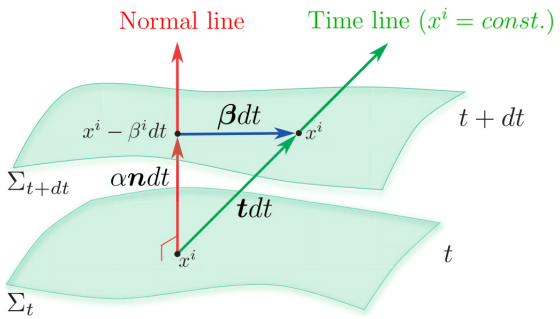
Το $S \subset M$ ονομάζεται **άχρονο (achronal)** αν δεν υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη χρονοειδής καμπύλη που να τέμνει το S δύο φορές. Ισοδύναμα: $I^+(S) \cap S = \emptyset$

- Παρατήρηση: Χωροειδής υπερεπιφάνεια \Rightarrow άχρονη
- Παρατήρηση: Οποιαδήποτε δύο σημεία μιας άχρονης επιφάνειας S είναι "χρονολογικώς" ασύνδετα $\Rightarrow S$ ένα "στιγμιότυπο" του χωρόχρονου



Σχήμα 8: Άχρονο και μη-άχρονο σύνολο

Γεωμετρία της 3+1 διαμέρισης: Ερμηνεία lapse & shift



Σχήμα 9: Σχηματική απεικόνιση του lapse α και του shift vector β σε δύο γειτονικές 3D υπερεπιφάνειες Σ_t και Σ_{t+dt} της διαμέρισης.

- Ερμηνεία shift vector: **ολίσθηση στις χωρικές συντεταγμένες** του κάθετου παρατηρητή όταν μεταβαίνει από τη μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη.
 → Αν x^i οι συντεταγμένες του στην Σ_t , θα γίνουν $x^i - \beta^i dt$ στην Σ_{t+dt}
- Ερμηνεία lapse: **ιδιόχρονος** που καταγράφει ένας κάθετος παρατηρητής αν παρέλθει "συντεταγμένος" χρόνος dt είναι $d\tau = \sqrt{-g(\mathbf{m}, \mathbf{m})} dt = \alpha dt$
 ⇒ α, β^i σχετίζονται με την επιλογή συντ/νων (τρόπος που γίνεται η διαμέριση).
 ⇒ **Συναρτήσεις βαθμίδας (gauge functions)**: επιλέγονται αυθαίρετα

Constraints: Χαμιλτονιανός περιορισμός

Ξεκινάμε από την πλήρη προβολή της εξίσωσης Einstein στη χρονοειδή κατεύθυνση n :

$$n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} = 8\pi n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta} \quad (48)$$

όπου

- $n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta} \equiv \rho$

και

$$\begin{aligned} n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} &= n^\alpha n^\beta \left({}^{(4)}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} {}^{(4)}R \right) = \left(n^\alpha n^\beta {}^{(4)}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} {}^{(4)}R \right) \\ &= \frac{1}{2} (R + K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}) \rightarrow \text{από διπλή συστολή εξ. Gauss} \end{aligned}$$

Χαμιλτονιανός περιορισμός

$$\mathcal{H} \equiv R + K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - 16\pi\rho = 0 \quad (49)$$

- Η ελλειπτική ΔΕ που πρέπει να ικανοποιούν οι (γ_{ij}, K_{ij}) παντού, σε κάθε υπερεπιφάνεια

Constraints: Περιορισμοί ορμής

Ξεκινάμε από την προβολή της εξίσωσης Einstein στη χωροειδή υπερεπιφάνεια και στη χρονοειδή κατεύθυνση n :

$$\gamma^\alpha_i n^\beta G_{\alpha\beta} = 8\pi \gamma^\alpha_i n^\beta T_{\alpha\beta} \quad (50)$$

όπου

- $\gamma^\alpha_i n^\beta T_{\alpha\beta} \equiv -j_i$

και

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha_i n^\beta G_{\alpha\beta} &= \gamma^\alpha_i n^\beta \left({}^{(4)}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} {}^{(4)}R \right) = \gamma^\alpha_i n^\beta {}^{(4)}R_{\alpha\beta} \\ &= D_i K - D_j K_i^j \rightarrow \text{από συστολή εξ. Codazzi} \end{aligned}$$

Περιορισμοί ορμής

$$\mathcal{M}_i \equiv D_j K_i^j - D_i K - 8\pi j_i = 0 \quad (51)$$

- 3 ελλειπτικές ΔΕ που πρέπει να ικανοποιούν οι (γ_{ij}, K_{ij}) παντού, σε κάθε υπερεπιφάνεια

Χρονική εξέλιξη $K_{\alpha\beta}$: Δυναμική εξίσωση

Η δυναμική εξίσωση χρονικής εξέλιξης (κατ' ακρίβεια 6 εξ.) αφορά $\partial_{tt}\gamma_{ij} \rightarrow$ εμπλέκει $\partial_t K_{ij}$. Προκύπτει από την πλήρη προβολή της εξίσωσης Einstein στη χωροειδή υπερ-πιφάνεια:

$$\gamma^\alpha_i \gamma^\beta_j G_{\alpha\beta} = 8\pi \gamma^\alpha_i \gamma^\beta_j T_{\alpha\beta} \quad (52)$$

όπου

- $\gamma^\alpha_i \gamma^\beta_j T_{\alpha\beta} \equiv S_{ij}$

Εξ. Ricci + πρώτη συστολή εξ. Gauss δίνουν:

$$L_n K_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma - \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha - K_{\beta\rho} K_\alpha{}^\rho \quad (53)$$

$$= R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma - 8\pi \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right) - \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha \quad (54)$$

Παράγωγος Lie κατά $t = \alpha n + \beta$: $L_t K_{\alpha\beta} = \alpha L_n K_{\alpha\beta} + L_\beta K_{\alpha\beta}$

Εξίσωση χρονικής εξέλιξης $K_{\alpha\beta}$

$$L_t K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha (R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma) - 8\pi \alpha \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right] + L_\beta K_{\alpha\beta} \quad (55)$$

Χρονική εξέλιξη $\gamma_{\alpha\beta}$: Κινηματική εξίσωση

Η κινηματική εξίσωση χρονικής εξέλιξης (6 εξ.) αφορά $\partial_t \gamma_{ij} \rightarrow$ εμπλέκει K_{ij} . Δεν προκύπτει από τις εξ. Einstein (δεν σχετίζεται με τη δυναμική του χωρόχρονου), αλλά από τον ορισμό της K_{ij} :

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}L_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} \quad (56)$$

Παράγωγος Lie κατά $\mathbf{t} = \alpha\mathbf{n} + \beta$:

$$L_{\mathbf{t}}\gamma_{\alpha\beta} = \alpha L_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} + L_{\beta}\gamma_{\alpha\beta} = -2\alpha K_{\alpha\beta} + L_{\beta}\gamma_{\alpha\beta} \quad (57)$$

Εξίσωση χρονικής εξέλιξης $\gamma_{\alpha\beta}$

$$L_{\mathbf{t}}\gamma_{\alpha\beta} = -2\alpha K_{\alpha\beta} + L_{\beta}\gamma_{\alpha\beta} \quad (58)$$

Υπαρξη & μοναδικότητα: Μεγιστικό ανάπτυγμα Cauchy

- Επίλυση εξ. ADM-York με αρχικά δεδομένα $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ θα δώσει το ανάπτυγμα Cauchy $(M, \mathbf{g}) \rightarrow$ **όχι μοναδικό**: υπάρχουν άπειρα αναπτύγματα, ένα για κάθε εύλογη επιλογή βαθμίδας.
- **Ερώτημα**: Υπάρχει ένα μοναδικό "μεγιστικό" ανάπτυγμα που να εμπεριέχει όλα τα διαφορετικά αναπτύγματα;

Theorem (Choquet-Bruhat & Geroch)

Έστω αρχικά δεδομένα $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ όπου γ_{ij} και K_{ij} ικανοποιούν τις εξισώσεις των περιορισμών στο κενό. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός χωρόχρονος (M, \mathbf{g}) (μέχρι μια ισομετρία) ο οποίος ονομάζεται **μεγιστικό ανάπτυγμα Cauchy** (maximal Cauchy development) των αρχικών δεδομένων $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$, τέτοιος ώστε:

1. (M, \mathbf{g}) είναι λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό
2. (M, \mathbf{g}) είναι καθολικά υπερβολικός με επιφάνεια Cauchy την Σ_{t_0}
3. Η Σ_{t_0} έχει επαγόμενη μετρική γ και εξωτερική καμπυλότητα \mathbf{K} μέσα στον (M, \mathbf{g})

Κάθε άλλος χωρόχρονος (M', \mathbf{g}') που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(3) είναι ισομετρικός με ένα υποσύνολο του (M, \mathbf{g}) . Δηλαδή $\exists \phi : M \rightarrow M'$ διαφορομορφισμός ώστε $\phi^* \mathbf{g}' = \mathbf{g}$, οπότε οι χωρόχρονοι $(M, \mathbf{g}), (M', \mathbf{g}')$ είναι ισομετρικοί (έχουν την ίδια γεωμετρία).

- Το θεώρημα επεκτείνεται σε χωρόχρονους που περιέχουν ύλη με **ομαλές εξισώσεις**.

Διατήρηση των περιορισμών κατά τη χρονική εξέλιξη

Proposition (Διατήρηση των περιορισμών κατά τη χρονική εξέλιξη)

Αν οι περιορισμοί ικανοποιούνται την αρχική χρονική στιγμή t_0 τότε θα συνεχίσουν να ικανοποιούνται σε ύστερους χρόνους $t \geq t_0$ από τις μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) που προκύπτουν ως (αναλυτικές) λύσεις των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης ADM-York.

$$G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta} = \mathcal{F}_{\alpha\beta} + (\mathcal{H} - \mathcal{F})\gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} \equiv n^\mu n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} (R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}) - 8\pi\rho \quad (59)$$

$$\mathcal{M}_\alpha \equiv -n^\mu \gamma^\nu_\alpha (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = D_\mu K^\mu_\alpha - D_\alpha K - 8\pi j_\alpha \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \left[{}^{(4)}R_{\mu\nu} - 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \right] &= -\frac{1}{\alpha} L_{\alpha n} K_{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha \\ &+ R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\sigma} K^\sigma_\beta - 8\pi \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right] \end{aligned} \quad (61)$$

Διατήρηση των περιορισμών κατά την χρονική εξέλιξη

- Συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi + Διατήρηση ταυνοστή ενέργειας ορμής:

$$\nabla^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0 \Leftrightarrow \nabla^\alpha (F_{\alpha\beta} + (\mathcal{H} - F)\gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) = 0 \quad (62)$$

- Συστολή με n^β :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -D_i(\alpha \mathcal{M}^i) - \mathcal{M}^i D_i \alpha + \alpha K(2\mathcal{H} - \mathcal{F}) + \alpha \mathcal{F}_{ij} K^{ij} + \beta^i D_i \mathcal{H} \quad (63)$$

- Προβολή στην υπερεπιφάνεια με $\gamma^\mu{}_\beta$:

$$\frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial t} = -D^i(\alpha \mathcal{F}_{ij}) - \alpha D_j(\mathcal{H} - \mathcal{F}) - (2\mathcal{H} - \mathcal{F})D_j \alpha + \alpha K \mathcal{M}_j + \beta^i D_i \mathcal{M}_j + \mathcal{M}_i D_j \beta^i \quad (64)$$

- Αν $\mathcal{H}|_{t=t_0} = 0$ και $\mathcal{M}_j|_{t=t_0} = 0$ και εφαρμόζεται η δυναμική εξίσωση χρονικής εξέλιξης $\mathcal{F}_{ij} = 0$ τότε:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (65)$$

- Θ. Cauchy-Kovalevskaya: $\Rightarrow \boxed{\forall t \geq t_0, \quad \mathcal{H} = 0 \quad \text{και} \quad \mathcal{M}_j = 0}$

Εξισώσεις 3+1 / Εξισώσεις ADM-York

- Σύστημα συντ/νων \rightarrow Μετατροπή σε σύστημα ΜΔΕ για αριθμητική ολοκλήρωση
- Φυσική επιλογή για το σύστημα συντ/νων: Συντ/νες προσαρμοσμένες στη διαμέριση (t, x^i)
 - $L_t = \partial_t$
 - Χωρικοί δείκτες i, j για περιγραφή χωρικών ταυστών
 - Παράγωγοι Lie χωρικών ταυστών κατά μήκος ενός χωρικού διανύσματος X γράφονται με όρους D_α αντί ∇_α

Υπερβολικότητα (Hyperbolicity)

- **Υπερβολικότητα:** χαρακτηρίζει συστήματα χρονικής εξέλιξης που αποτελούν γενίκευση της κυματικής εξίσωσης, με βάση τη συμπεριφορά της λύσης τους.

Definition (Κατηγορίες υπερβολικών συστημάτων)

Έστω σύστημα ΜΔΕ 1ης τάξης:

$$\partial_t \vec{u} + A^i \cdot \partial_i \vec{u} = \vec{S}(u) \quad (66)$$

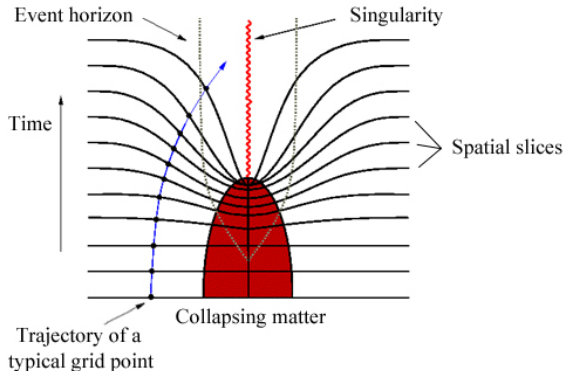
όπου \vec{u} n -διάστατο διάνυσμα-λύση, A^i $n \times n$ πίνακας και \vec{S} n -διάστατο διάνυσμα-πηγή. **Principal symbol/Characteristic matrix** του συστήματος: $P = A^i n_i$ με n^i τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα. Βάσει των ιδιοτήτων του P αναφορικά με το πρόβλημα ιδιοτιμών $(P - vI) \vec{u} = 0$ το σύστημα ονομάζεται:

- **Ισχυρά υπερβολικό (strongly hyperbolic)** αν ο P έχει πραγματικές ιδιοτιμές και διαθέτει πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων για κάθε n^i .
- **Ασθενώς υπερβολικό (weakly hyperbolic)** αν ο P έχει πραγματικές ιδιοτιμές για κάθε n^i , όμως δεν διαθέτει πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.
- **Συμμετρικά υπερβολικό (symmetric hyperbolic)** αν ο P διαγωνοποιείται από τον ίδιο πίνακα για κάθε n^i .

Singularity Avoiding Slicing

- Ο τρόπος με τον οποίο αποφεύγουμε τις ιδιομορφίες ενός χωρόχρονου είναι με κατάλληλες συνθήκες βαθμίδας. Επιλογή lapse ώστε ο ιδιόχρονος ανάμεσα σε σημεία κοντά στην ιδιομορφία να ρέει πιο αργά (παραμόρφωση υπερεπιφανειών). Ο καθολικός (συντεταγμένος) χρόνος δεν επηρεάζεται.

SINGULARITY AVOIDING SLICING



Σχήμα 10: Διαμέριση των υπερεπιφανειών ως προς τον ιδιόχρονο των κάθετων παρατηρητών για βαρυτική κατάρρευση ύλης. Το lapse επιλέγεται με τρόπο ώστε κοντά στην περιοχή όπου δημιουργείται η ιδιομορφία, ο ιδιόχρονος να "παγώνει" (singularity avoidance).

York-Lichnerowicz conformal decomposition

- Στόχος: Ανάδειξη των βαθμών ελευθερίας των δυναμικών μεταβλητών που μπορούν να προσδιοριστούν από τα constraints

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij}$$

- Αφινική σύνδεση της γ_{ij} συνδέεται με αυτή της $\tilde{\gamma}_{ij}$

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i + 2(\delta_j^i \partial_k \ln \psi + \delta_k^i \partial_j \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{il} \partial_l \ln \psi) \quad (67)$$

$$= \tilde{\Gamma}_{jk}^i + 2(\delta_j^i \tilde{D}_k \ln \psi + \delta_k^i \tilde{D}_j \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{il} \tilde{D}_l \ln \psi) \quad (68)$$

- Σχέση D_i και \tilde{D}_i όταν δρουν σε χωρικό (r, s) τανυστή T :

$$D_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \tilde{D}_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \sum_{n=1}^r C^{i_n}_{kl} T^{i_1 \dots l \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \sum_{n=1}^s C^l_{kj_n} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots l \dots j_s} \quad (69)$$

$$\text{όπου } C^i_{jk} \equiv \Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk} = 2(\delta^i_k \tilde{D}_j \ln \psi + \delta^i_j \tilde{D}_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{im} \tilde{D}_m \ln \psi)$$

- Από την ταυτότητα Ricci $D_j D_i V^j - D_i D_j V^j = R_{kji}^j V^k = R_{ki} V^k$ παίρνουμε τη γενική σχέση:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{D}_k C^k_{ij} - \tilde{D}_i C^k_{kj} + C^k_{ij} C^l_{lk} - C^k_{il} C^l_{kj} \quad (70)$$

- Αντικαθιστώντας την έκφραση του C^i_{jk} για σύμμορφο μετασχηματισμό έχουμε:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \tilde{D}^m \ln \psi + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \ln \psi \tilde{D}^m \ln \psi \quad (71)$$

Contracting:

$$R = \psi^{-4} \tilde{R} - 8\psi^{-5} \tilde{D}^2 \psi \quad (72)$$

- Προχωράμε σε σύμμορφη αποδόμηση της εξωτερικής καμπυλότητας:

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}K \quad (73)$$

Θεωρούμε σύμμορφους μετασχηματισμούς:

$$A^{ij} = \psi^\alpha \tilde{A}^{ij} \quad K = \psi^\beta \tilde{K} \quad (74)$$

Από τη σχέση $D_j A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{D}_j (\psi^{\alpha+10} \tilde{A}^{ij})$ επιλέγουμε $\alpha = -10$ και επίσης $\beta = 0$ για λόγους απλότητας. **CTT**: Αναλύουμε τον \tilde{A}^{ij} σε εγκάρσιο και διάμηκες κομμάτι:

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + \tilde{A}_L^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{L}W)^{ij} \quad (75)$$

Με αυτή την ανάλυση ο Χαμιλτονιανός περιορισμός γράφεται ως μια ελλειπτική εξίσωση (τύπου Poisson) για τον σύμμορφο παράγοντα ψ

$$8\tilde{D}^2\psi - \psi\tilde{R} + \psi^{-7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^5 K^2 = -16\pi\psi^5\rho \quad (76)$$

Οι περιορισμοί ορμής γράφονται ως ένα σύστημα συζευγμένων ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων για τις τρεις συνιστώσες W^i , $i = 1, 2, 3$ του διανυσματικού δυναμικού:

$$\tilde{\Delta}_L W^i - \frac{2}{3}\psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K = 8\pi\psi^{10} j^i \quad (77)$$

όπου $\tilde{\Delta}_L W^i \equiv \tilde{D}_j (\tilde{L}W)^{ij} = \tilde{D}_j \tilde{D}^j W^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_j W^j + \tilde{R}^i_j W^j$

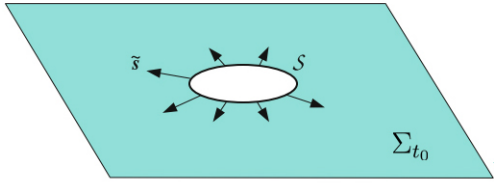
Αρχικά δεδομένα για μελανές οπές

- Αρχικά δεδομένα μελανής οπής Schwarzschild:

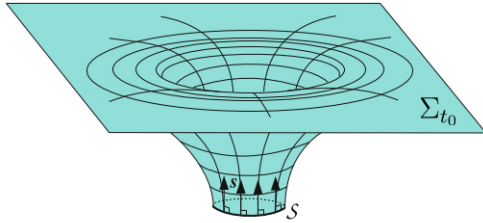
$$K = 0 \quad \tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij} \quad \tilde{A}^{ij}_{TT} = 0 \quad (78)$$

- Τοπολογία αρχικής υπερεπιφάνειας: $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus B$ όπου B μπάλα με σύνορο τη 2-σφαίρα S . Συνοριακές συνθήκες:

$$W|_S = 0 \quad \text{και} \quad S \text{ κλειστή ελάχιστη επιφάνεια της } (\Sigma_{t_0}, \gamma) \quad (79)$$



(a)



(b)

Σχήμα 11: Αρχική 3D υπερεπιφάνεια $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus B$ όπου B μπάλα με σύνορο τη 2-σφαίρα S (εδώ αναπαρίσταται ως κύκλος), με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα s ως προς τη φυσική μετρική γ και $\tilde{s} = \psi^2 s$ ως προς τη σύμμορφη μετρική $\tilde{\gamma}$.

- Η ελαχιστοποίηση της S ισοδυναμεί με τη συνοριακή συνθήκη $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{2r}\right)\Big|_{r=b} = 0$. Μαζί με $\psi(r \rightarrow \infty) = 1$ (ασυμπτωτική επιπεδότητα) δίνει την εξής λύση για την εξίσωση Laplace $\Delta\psi = 0$ του Χαμιλτονιανού περιορισμού:

$$\psi = 1 + \frac{b}{r} \quad (80)$$

- Η μάζα ADM που περιέχει ο χωρόχρονος ισούται με:

$$M = M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \frac{\partial\psi}{\partial r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{b}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta = 2b \quad (81)$$

- Ο σύμμορφος παράγοντας προκύπτει:

$$\psi = 1 + \frac{M}{2r} \quad (82)$$

- Καταλήγουμε σε μια αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} με μηδενική εξωτερική καμπυλότητα $K_{ij} = 0$ (χρονικά συμμετρική) και χωρική μετρική:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij} = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin\theta) \quad (83)$$

η οποία είναι η επαγόμενη μετρική μιας υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου του χωρόχρονου Schwarzschild, σε σφαιρικές ισοτροπικές συντεταγμένες.

Αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist

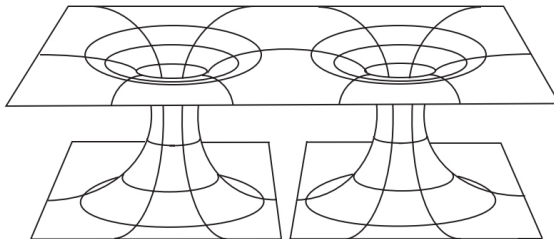
- Ο Χαμιλτονιανός περιορισμός για $K_{ij} = 0$ γράφεται $\Delta\psi = 0$ με Δ η Λαπλασιανή \rightarrow γραμμικός τελεστής \rightarrow γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι επίσης λύση.

$$\psi = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{M_n}{2r_n} \quad (84)$$

όπου $r_n \equiv |x^i - x_n^i|$ με x_n^i το κέντρο της n -οστής μελανής οπής.

- Τοπολογία: $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{O_n\}$

Brill-Lindquist initial data

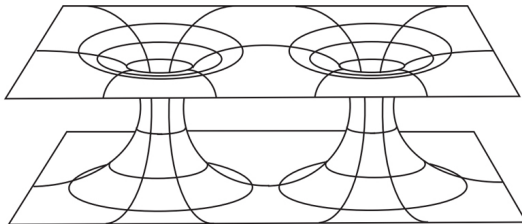


Σχήμα 12: Διάγραμμα εμβάπτισης για αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist που περιγράφουν δύο στατικές μελανές οπές. Σε αυτή την τοπολογία υπάρχουν τρία μη-ισομετρικά ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα.

Αρχικά δεδομένα Misner

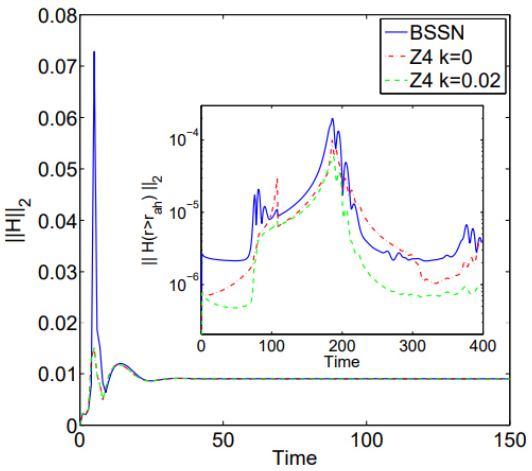
- Ο Misner κατασκεύασε λύση της $\Delta\psi = 0$ όπου οι N γέφυρες Einstein-Rosen καταλήγουν όλες σε ένα ασυμπτωτικά επίπεδο παράλληλο σύμπαν ισομετρικό με το δικό μας $\Rightarrow N$ γέφυρες ενώνουν δύο ισομετρικά σύμπαντα
- Μέθοδος: σφαιρική αντιστροφή ειδώλων (spherical inversion images) $\rightarrow \psi =$ απειροσειρά με πόλους
- Τοπολογία: $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{B_n\}$

Misner initial data



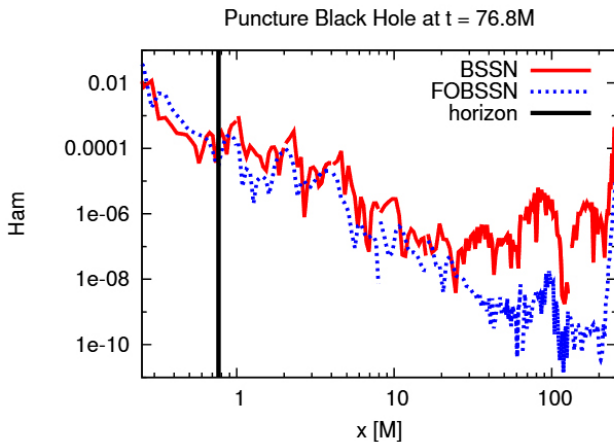
Σχήμα 13: Διάγραμμα εμβάπτισης για αρχικά δεδομένα Misner που περιγράφουν δύο στατικές μελανές οπές. Σε αυτή την τοπολογία υπάρχουν δύο ισομετρικά ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα που συνδέονται με δύο γέφυρες Einstein-Rosen.

Έλεγχος ευστάθειας: Puncture



Σχήμα 14: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της L_2 νόρμας της απόκλισης \mathcal{H} από τον χαμιλτονιανό περιορισμό σε χωρόχρονο με οπή (puncture) για τα συστήματα BSSN και Z4c με παραμέτρους $\kappa_1 \equiv k = \{0, 0.02\}$ και $\kappa_2 = 0$. Το εσωτερικό διάγραμμα παρουσιάζει την χρονική εξέλιξη του $L_2(\mathcal{H})$ για σημείο που βρίσκεται έξω από τον φαινόμενο ορίζοντα της οπής.

Έλεγχος ευστάθειας: Rotating Puncture



Σχήμα 15: Απόκλιση από τον χαμιλτονιανό περιορισμό ως συνάρτηση της θέσης πάνω στον άξονα x , κατά τη χρονική στιγμή $t = 76.8M$, σε χωρόχρονο με περιστρεφόμενη οπή (rotating puncture). Η απόκλιση από τον περιορισμό αυξάνεται στην περιοχή κοντά την οπή (θέση $x = 0$). Καθώς απομακρυνόμαστε από την οπή η παραβίαση μειώνεται, η μετάβαση από τον οριζόντα είναι ομαλή και έπειτα φαίνεται να αποκλίνει κοντά στη θέση $x = 100M$ εξαιτίας φαινομένων συνόρου.