



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Η Κβαντοηλεκτροδυναμική  
Πρόβλεψη για την Σκέδαση  
Compton  
The Quantum  
Electrodynamics (QED)  
Prediction for Compton  
Scattering  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Διπλωματική Εργασία

Ευάγγελος Νάστας

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν.  
Αναγνωστόπουλος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
2016



Η Κβαντοηλεκτροδυναμική Πρόβλεψη για την  
Σκέδαση Compton  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$   
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών  
Διπλωματική Εργασία

Ευάγγελος Νάστας

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

2016



# Σύνοψη

Παρουσιάζεται μία πλήρης εξαγωγή της Κβαντοηλεκτροδυναμικής Πρόβλεψης για την Σκέδαση Compton ηλεκτρονίου και φωτονίου. Υπολογίζονται τα αθροίσματα πόλωσης των φωτονίων. Υπολογίζεται αναλυτικά το τετράγωνο του μητρωϊδούς στοιχείου, αθροισμένο πάνω στα σπιν και τις πολώσεις, συμπεριλαμβανομένων και των όρων από τα διαγράμματα t-channel και s-channel τετραγωνισμένα καθώς και των ανάμεικτων όρων τους για αυτή την διαδικασία. Έπειτα, εξαγάγεται η σχέση Klein - Nishina στο όριο χαμηλής ενέργειας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Τέλος, εξετάζεται το όριο υψηλής ενέργειας, παρέχοντας έτσι διαίσθηση για την φυσική σημασία της σκέδασης Compton, ιδιαίτερα για το σπιν και την εξάρτηση πόλωσης καθώς και την προέλευση μίας φαινομενικής ιδιομορφίας για την ακριβή οπισθοσκέδαση.



# Abstract

A comprehensive derivation of the Quantum Electrodynamics (QED) prediction for Compton scattering of an electron and a photon is presented. The photon polarization sums are evaluated. The squared matrix element, summed over spins and polarizations, including terms from the t-channel and s-channel diagrams squared and their cross terms for this process, is explicitly calculated. Then, the Klein - Nishina formula in the low-energy limit, working in the lab frame, is derived. Finally, the high-energy limit is considered, providing insight into some of the physical significance of Compton scattering, particularly the spin and polarization dependence and the origin of an apparent singularity for exactly backwards scattering.





# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
1.1	Μονάδες και Συμβολισμός . . . . .	3
1.2	Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου . . . . .	6
1.2.1	Υπόβαθρο . . . . .	6
1.2.2	Γιατί η Κβαντική Θεωρία Πεδίου είναι Σημαντική; . . . .	7
1.3	Η Ομάδα Lorentz . . . . .	8
1.4	Σπινორιακές Αναπαραστάσεις της Ομάδας Lorentz . . . . .	15
1.5	Η Ομάδα Poincaré . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Το Πεδίο Dirac</b>	<b>21</b>
2.1	Η Εξίσωση Dirac . . . . .	21
2.2	Συναλλοίωτες Ιδιότητες της Εξίσωσης Dirac . . . . .	24
2.3	Η Εξίσωση Dirac και η Ομάδα Lorentz . . . . .	29
2.4	Λύσεις Ελεύθερων Σωματιδίων της Εξίσωσης Dirac . . . . .	31
2.5	Κυματοπακέτα και Λύσεις Αρνητικής Ενέργειας . . . . .	38
2.6	Ηλεκτρομαγνητική Αλληλεπίδραση ενός Σχετικιστικού Σημειακού (point-like) Σωματιδίου . . . . .	40
2.7	Μη-σχετικιστικό Όριο της Εξίσωσης Dirac . . . . .	47
2.8	Σύζευξη φορτίου, αντιστροφή χρόνου και μετασχηματισμοί PCT	50
2.9	Η Κβάντωση του Πεδίου Dirac . . . . .	57
2.10	Άμαζα Σωματίδια με Σπιν 1/2 . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Διανυσματικά Πεδία</b>	<b>69</b>
3.1	Το Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο . . . . .	69
3.2	Η Κβάντωση του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου . . . . .	72
3.3	Διανυσματικά Πεδία Μη-μηδενικής Μάζας ή Proca . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Θεωρία Διαταραχών</b>	<b>85</b>
4.1	Η Ηλεκτρομαγνητική Αλληλεπίδραση . . . . .	85
4.2	Ο Πίνακας Σκέδασης . . . . .	88
4.3	Το Θεώρημα του Wick . . . . .	96
4.4	Υπολογισμός του Πίνακα Σκέδασης $S$ σε δεύτερη τάξη στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου . . . . .	100

4.5	Διαγράμματα Feynman στον Χώρο των Ορμών . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Ενεργές Διατομές</b>	<b>113</b>
5.1	Η Σκέδαση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση</b>	
	<b>Compton <math>\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-</math></b>	<b>125</b>
6.1	Τα Αθροίσματα Πόλωσης Φωτονίων . . . . .	126
6.2	Το Στοιχείο Πίνακα . . . . .	127
6.3	Η Σχέση Klein-Nishina . . . . .	145
6.4	Το Όριο Υψηλών Ενεργειών . . . . .	147

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Τα διαφορετικά μέρη της ομάδας Lorentz όπως αυτά συνδέονται μέσω της ομοτιμίας, $P$ , και αντιστροφής χρόνου (time-reversal), $T$ . . . . .	10
2.1	Η χωροχρονική τροχιά ενός σημειακού (point-like) σωματιδίου. . . . .	41
4.1	Η εικόνα αναπαριστά σχηματικά το ολοκλήρωμα $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_t^{t_2} ds$ . . . . .	92
4.2	Η εικόνα αναπαριστά σχηματικά το ολοκλήρωμα $\int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s dt$ . . . . .	93
4.3	Διαγράμματα για τις περιγραφόμενες διαδικασίες από το πίνακα $S$ στην πρώτη τάξη. . . . .	102
4.4	Συνεισφορά s-channel στην σκέδαση Compton. . . . .	107
4.5	Η συνεισφορά t-channel στην σκέδαση Compton. . . . .	108
4.6	Οι σπινωριακές συμβάσεις για αντιφερμιόνια. . . . .	108
4.7	Διαγράμματα Feynman για την σκέδαση $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ . . . . .	109
4.8	Διάγραμμα Feynman για την αυτο-ενέργεια ηλεκτρονίου (electron self-energy). . . . .	110
5.1	Το διάγραμμα Feynman για την σκέδαση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	117
5.2	Το ενεργό διάγραμμα για την σκέδαση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	117
5.3	Η κινηματική της σκέδασης $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	121
6.1	Διαγράμματα για την σκέδαση Compton. . . . .	126
6.2	Συνεισφορά s-channel στην σκέδαση Compton. . . . .	128
6.3	Η συνεισφορά t-channel στην σκέδαση Compton. . . . .	128



# Κατάλογος Πινάκων



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μονάδες και Συμβολισμός

Οι βασικές θεμελιώδεις σταθερές στις σχετικιστικές κβαντικές θεωρίες είναι η ταχύτητα του φωτός  $c$ , και η σταθερά του Planck,  $\hbar$ . Έτσι, επιλέγεται για ευκολία το σύστημα φυσικών μονάδων όπου η τιμή τους είναι μονάδα

$$c = \hbar = 1. \quad (1.1)$$

Οι συμβάσεις είναι οι ακόλουθες: Ο τανυστής χωροχρονικής μετρικής Minkowski (space-time metric tensor)  $g_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , είναι διαγώνιος με ιδιοτιμές  $(+1, -1, -1, -1)$ . Μία μετρική, γενικότερα, σε  $m+n$  διαστάσεις έχει signature  $(m, n)$  αν έχει  $m$  αρνητικές και  $n$  θετικές ιδιοτιμές. Άρα, η  $g_{\mu\nu}$  έχει signature  $(3, 1)$ . Τα τετραδιανύσματα θέσης και ορμής είναι

$$x^\mu = (t, \vec{x}), \quad p^\mu = (E, \vec{p}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

όπου  $\vec{x}$  και  $\vec{p}$  είναι η θέση και η ορμή, σε τρεις διαστάσεις, αντίστοιχα. Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο τετραδιανυσμάτων διατυπώνεται ως εξής:

$$a \cdot b = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (1.3)$$

όπου οι δείκτες κατέβηκαν λόγω του τανυστή μετρικής

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \quad (1.4)$$

και μπορούν να ανέβουν με τον αντίστροφο τανυστή μετρικής  $g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ . Η τετραβαθμίδα είναι

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) = (\partial_t, \vec{\nabla}). \quad (1.5)$$

Ο τελεστής της τετραορμής στο χώρο των θέσεων είναι:

$$p^\mu \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\partial_t, -i\vec{\nabla}). \quad (1.6)$$

Οι επόμενες σχέσεις θα χρειαστούν

$$p^2 = p_\mu p^\mu \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv -\square, \quad (1.7)$$

$$x \cdot p = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (1.8)$$

Ο ταυστής Ricci στις 4 διαστάσεις,  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  είναι πλήρως αντισυμμετρικός και τέτοιος ώστε

$$\epsilon^{0123} = +1. \quad (1.9)$$

Το σύστημα Heaviside-Lorentz θα χρειαστεί για τον ηλεκτρομαγνητισμό, όπου η διηλεκτρική σταθερά του κενού θεωρείται μονάδα

$$\epsilon_0 = 1. \quad (1.10)$$

Από την σχέση  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  προκύπτει

$$\mu_0 = 1. \quad (1.11)$$

Σε αυτές τις μονάδες η δύναμη Coulomb δίδεται από την

$$|\vec{F}| = \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \quad (1.12)$$

και έτσι δεν υπάρχουν εμφανείς σταθερές στις εξισώσεις Maxwell. Για παράδειγμα, ο νόμος του Gauss είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1.13)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του φορτίου. Η σταθερά λεπτής υφής

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \quad (1.14)$$

δίδεται από

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (1.15)$$

Κάθε φυσική ποσότητα μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας ως θεμελιώδη μονάδα την ενέργεια, τη μάζα, το μήκος ή τον χρόνο με ισοδύναμο τρόπο. Έτσι, επιλέγονται οι ακόλουθες ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} ct &\approx \ell \implies \text{time} \approx \text{length}, \\ E &\approx mc^2 \implies \text{energy} \approx \text{mass}, \\ E &\approx pv \implies \text{energy} \approx \text{momentum}, \\ Et &\approx \hbar \implies \text{energy} \approx (\text{time})^{-1} \approx (\text{length})^{-1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Το γινόμενο  $c\hbar$  έχει διαστάσεις  $[E \cdot \ell]$ . Άρα,

$$c\hbar = 3 \cdot 10^8 \text{ mt} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec} = 3.15 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{mt}. \quad (1.17)$$



Αφού

$$1 \text{ eV} = e \cdot 1 = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad (1.18)$$

όπου  $e$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου σε μονάδες Coulomb, ακολούθως

$$c\hbar = \frac{3.15 \cdot 10^{-26}}{1.6 \cdot 10^{-13}} \text{ MeV} \cdot \text{mt} = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}, \quad (1.19)$$

όπου  $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$ . Από όπου

$$1 \text{ MeV}^{-1} = 197 \text{ fm}. \quad (1.20)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την σχέση μπορεί να μετατραπεί μία ποσότητα σε Mev (η τυπική μονάδα χρήσης στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων), σε Fermi. Για παράδειγμα, αφού οι μάζες των στοιχειωδών σωματιδίων δίδονται συνήθως σε Mev, το μήκος κύματος Compton ηλεκτρονίου δίδεται απλά από

$$\lambda_{\text{Compton}}^e = \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{0.5 \text{ MeV}} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fermi}}{0.5 \text{ MeV}} \approx 400 \text{ fermi}. \quad (1.21)$$

Επομένως, η κατά προσέγγιση σχέση είναι  $1 \approx 200 \text{ MeV} \cdot \text{fermi}$ .

Επιπροσθέτως, χρησιμοποιώντας

$$c = 3 \cdot 10^{23} \text{ fermi} \cdot \text{sec}^{-1}, \quad (1.22)$$

προκύπτει

$$1 \text{ fermi} = 3.3 \cdot 10^{-24} \text{ sec} \quad (1.23)$$

και

$$1 \text{ MeV}^{-1} = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ sec}. \quad (1.24)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2, \quad (1.25)$$

έπεται από την (1.20) ότι

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0.389 \text{ mbarn}. \quad (1.26)$$

## 1.2 Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου είναι μια θεωρία πεδίου που ενσωματώνει την κβαντική μηχανική και τις αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Όπως θα φανεί αργότερα η κβαντική θεωρία πεδίων είναι απλά κβαντική μηχανική με άπειρο αριθμό αρμονικών ταλαντωτών.

Η κβαντική θεωρία πεδίου, συντομογραφικά ΚΘΠ ή QFT από την αγγλική ορολογία Quantum Field Theory, είναι μία σύγχρονη θεωρία της φυσικής επιστήμης με ευρεία χρήση στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων, αλλά και την φυσική συμπεκνωμένης ύλης. Η θεωρία προβλέπει ότι σε κάθε πεδίο, η αλληλεπίδραση πραγματοποιείται με την μεταφορά ενός σωματιδίου, που ονομάζεται κβάντο του πεδίου, από το ένα σωματίδιο στο άλλο. Για παράδειγμα το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, είναι το φωτόνιο, ενώ της ισχυρής πυρηνικής δύναμης είναι το γλουόνιο. Ακριβέστερα, αυτά τα σωματίδια αλληλεπίδρασης αποτελούν διηγευμένες καταστάσεις του πεδίου.

Για παράδειγμα, η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) χρησιμοποιεί ένα ηλεκτρονικό πεδίο και ένα φωτονικό πεδίο, η κβαντική χρωμοδυναμική (QCD) έχει ένα πεδίο για κάθε τύπο κουάρκ και η φυσική συμπεκνωμένης ύλης ένα πεδίο ατομικής μετατόπισης που προκαλεί τα φωνόνια. Ο Edward Witten περιγράφει την ΚΘΠ ως τη δυσκολότερη με διαφορά θεωρία της σύγχρονης φυσικής - τόσο δύσκολη που κανείς δεν την πίστευε πλήρως για 25 χρόνια.

Υπάρχει επομένως ένα πεδίο για κάθε τύπο σωματιδίου. Έτσι ένα πεδίο για όλα τα φωτόνια στο σύμπαν, ένα πεδίο για όλα τα ηλεκτρόνια και ούτω καθεξής. Και αυτά τα πεδία υπάρχουν παντού.

Αν δοθεί αρκετή ενέργεια, το πεδίο θα πάει σε μια υψηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Αυτές οι καταστάσεις είναι που ερμηνεύονται ως σωματίδια. Το σημείο στο πεδίο όπου του δόθηκε ενέργεια θα ομοιάζει με σωματίδιο και καθώς η ενέργεια διαδίδεται μέσω του πεδίου, θα μοιάζει με σωματίδιο που κινείται. Ορισμένα πεδία απαιτούν περισσότερη ενέργεια από άλλα για να δημιουργήσουν σωματίδια. Η ποσότητα ενέργειας είναι ανάλογη της μάζας των σχετικών σωματιδίων.

Για παράδειγμα, ένα μποζόνιο Higgs είναι πολύ πιο μαζικό από ένα ηλεκτρόνιο. Έτσι τα ηλεκτρόνια είναι πολύ πιο εύκολο να δημιουργηθούν, αλλά τα μποζόνια Higgs είναι πολύ πιο δύσκολο. Αυτός είναι ουσιαστικά ο λόγος που πήρε τόσο πολύ χρόνο για να βρεθεί το μποζόνιο Higgs. Έπρεπε να οικοδομηθεί ένα τεράστιο μηχάνημα, LHC, όπου ήταν σε θέση να δώσει στο πεδίο Higgs αρκετή ενέργεια για να δημιουργήσει μποζόνια Higgs από αυτό.

### 1.2.1 Υπόβαθρο

Η κβαντική θεωρία πεδίων είναι ακριβώς αυτό που διατυπώνει: η κβαντομηχανική θεωρία των πεδίων.

Το πιο σημαντικό πράγμα που πρέπει να κατανοηθεί, σε πρώτο στάδιο, είναι τι είναι ένα πεδίο στη φυσική. Ένα πεδίο είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που

παίρνει μια τιμή για κάθε σημείο στο χώρο και στο χρόνο. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία είναι ένα πεδίο, δεδομένου ότι η θερμοκρασία ποικίλλει από τόπο σε τόπο και αλλάζει από χρόνο σε χρόνο. Μπορεί να γραφθεί  $T(\vec{x}, t)$  για να δηλωθεί αυτό το πεδίο. Διαπιστώθηκε τον 18ο και 19ο αιώνα ότι οι περισσότερες δυνάμεις περιγράφονται ως πεδία και αυτό εξαλείφει την ανάγκη για δράση σε απόσταση. Αντί αυτού, οι αλληλεπιδράσεις είναι τοπικές και τα πεδία μεταδίδουν πληροφορίες (ενέργεια, δύναμη) σε απομακρυσμένο σημείο, διαδιδόμενα προς τα έξω.

Διδασκόταν αρχικά ότι τα βασικά δομικά στοιχεία της ύλης είναι τα σωματίδια. Στην πραγματικότητα, συνεχίζεται συχνά να διδάσκεται αυτό και σήμερα, όπου εξηγείται ότι τα κουάρκ και τα ηλεκτρόνια αποτελούν τα δομικά στοιχεία από τα οποία δημιουργείται όλη η ύλη. Αλλά αυτή η δήλωση κρύβει μια βαθύτερη αλήθεια. Σύμφωνα με τους πιο ακριβείς νόμους της Φυσικής, τα θεμελιώδη δομικά στοιχεία της Φύσης δεν είναι διακριτά σωματίδια καθόλου. Αντί αυτού, είναι συνεχείς ουσίες που ομοιάζουν με ρευστά και απλώνονται σε όλο το διάστημα. Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται πεδία.

Τα πιο γνωστά παραδείγματα πεδίων είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Οι κυματισμοί σε αυτούς τους τομείς προκαλούν αυτό που αποκαλούμε φως ή, γενικότερα, ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Η κβαντομηχανική είναι το βασικό πλαίσιο για τη διατύπωση φυσικών θεωριών. Οι δυναμικοί τελεστές είναι κβαντισμένοι. Γενικότερα, διαμορφώνεται με βάση τα ολοκληρώματα διαφορών Feynman.

### 1.2.2 Γιατί η Κβαντική Θεωρία Πεδίου είναι Σημαντική;

Ο λόγος για τον οποίο η θεωρία κβαντικού πεδίου είναι τόσο σημαντική είναι ότι είναι το φυσικό πλαίσιο για την σχετικιστική κβαντική μηχανική.

Ο λόγος αυτής της σύνδεσης είναι ότι όταν συνδυάζεται η ειδική σχετικότητα με την κβαντομηχανική, υπάρχουν διαδικασίες που μπορούν να δημιουργήσουν σωματίδια εξαιτίας του  $E = mc^2$ , πράγμα που σημαίνει ότι η ενέργεια διατηρείται, αλλά όχι η μάζα ή ο αριθμός σωματιδίων. Για παράδειγμα, η εκπομπή ενός φωτονίου αλλάζει τον αριθμό των σωματιδίων σε μια κατάσταση.

Η δυνατότητα αλλαγής του αριθμού των σωματιδίων σημαίνει ότι ο συνηθισμένος τρόπος σκέψης της κβαντικής μηχανικής, όπως η πιθανότητα να υπάρχει ένα σωματίδιο σε ένα μέρος, δεν έχει νόημα επειδή σωματίδια εξαφανίζονται και επομένως η πιθανότητα ενός σωματιδίου να είναι σε οποιοδήποτε μέρος δεν αθροίζεται στην μονάδα. Έτσι, τα σωματίδια πρέπει να δημιουργηθούν και να καταστραφούν. Η θεωρία του κβαντικού πεδίου περιγράφει πως συμβαίνει αυτό.

Όταν ξεκινά η επεξεργασία του τι σημαίνει πλαίσιο, αμέσως δημιουργείται, αυτό που είναι γνωστό, ως χώρος Fock, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τον αριθμό σωματιδίων ενός δεδομένου τύπου. Ένας χώρος Fock αποδεικνύεται ότι είναι ο φυσικός χώρος των καταστάσεων των κβαντικών πεδίων και μια τέτοια σχετικιστική κβαντική μηχανική οδηγεί άμεσα στη θεωρία του κβαντικού πεδίου.

Δεδομένου ότι η ειδική σχετικότητα και η κβαντική μηχανική αποτελούν τους δύο ακρογωνιαίους λίθους της σύγχρονης φυσικής, ο συνδυασμός τους είναι το φυσικό πλαίσιο για τη διατύπωση των νόμων της φύσης. Ωστόσο, η κβαντική θεωρία πεδίου είναι σημαντική κάθε φορά που μελετάται μια κβαντική θεωρία των πεδίων (σχετικιστική ή μη). Τα κβαντικά πεδία εμφανίζονται συχνά στη φυσική συμπυκνωμένης ύλης και πολλές από τις μεγαλύτερες ιδέες στην κβαντική θεωρία πεδίου προέρχονται από τη φυσική συμπυκνωμένης ύλης.

Η κβαντική θεωρία πεδίων (ΚΘΠ) παρέχει ένα εξαιρετικά ισχυρό σύνολο υπολογιστικών μεθόδων που δεν έχουν ακόμη βρει βασικούς περιορισμούς. Έχει οδηγήσει στην πιο φανταστική συμφωνία μεταξύ θεωρητικών προβλέψεων και πειραματικών δεδομένων στην ιστορία της επιστήμης. Παρέχει βαθιά γνώση της φύσης του σύμπαντος μας, αλλά και της φύσης άλλων πιθανών αυτοσυντηρούμενων συμπάντων.

### 1.3 Η Ομάδα Lorentz

Αφού τα θεμέλια είναι η σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου θα δοθεί μία σύντομη εισαγωγή σε κάποιες από τις ιδιότητες της ομάδας Lorentz. Μια σύνδεση των αδρανειακών συστημάτων που είναι συνεπής με την αρχή της ισοδυναμίας, καταργώντας την ιδέα περί απόλυτου χρόνου του Νεύτωνα λέγεται μετασχηματισμοί Lorentz.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz ορίζονται ως εκείνοι που αφήνουν αναλλοίωτη την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, απειροελάχιστα κοντά μεταξύ τους, στον χώρο Minkowski  $dx^\mu = (dx^0, d\vec{x}) = (dt, d\vec{x})$

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = dx^\mu dx_\mu. \quad (1.27)$$

Τότε, ένας μετασχηματισμός Lorentz

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu \quad (1.28)$$

είναι τέτοιος ώστε

$$dx'^\mu dx'_\mu = dx^\mu dx_\mu, \quad (1.29)$$

δηλαδή

$$\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (1.30)$$

Κατεβάζοντας τον άνω δείκτη του  $\Lambda^\mu_\nu$

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\nu, \quad (1.31)$$

μπορεί να γραφθεί η (1.30) ως

$$\Lambda_{\mu\rho} g^{\mu\nu} \Lambda_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma}, \quad (1.32)$$

ή σε όρους μητρώου/πίνακα

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad (1.33)$$

όπου έχουν εισαχθεί οι πίνακες  $\Lambda$  και  $g$  με στοιχεία πίνακα  $\Lambda_{\mu\nu}$  και  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$  αντίστοιχα. Αυτοί οι πίνακες είναι ορθογώνιοι ως προς μία μετρική με signature  $(3, 1)$ . Σχηματίζουν μία ομάδα που λέγεται  $O(3, 1)$ . Από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι

$$\det|\Lambda| = \pm 1. \quad (1.34)$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz με ορίζουσα ίση με  $+1$  λέγεται γνήσιος <sup>1</sup>, ενώ εκείνοι με ορίζουσα ίση με  $-1$  λέγονται μη-γνήσιοι. Από την εξ. (1.32) έχω

$$1 = g_{00} = \Lambda_{00}^2 - \sum_1^3 \Lambda_{i0}^2, \quad (1.35)$$

$$1 = g_{00} = \Lambda_{00}^2 - \sum_1^3 \Lambda_{i0}^2, \quad (1.36)$$

που ισοδυναμεί με

$$\Lambda_{00} \geq 1, \quad \text{or} \quad \Lambda_{00} \leq -1. \quad (1.37)$$

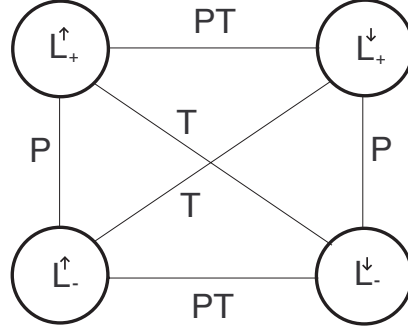
Από αυτό έπεται ότι η ομάδα Lorentz διακλαδώνεται σε 4 μέρη, με ένα, το  $L_+^\uparrow$ , συνδεδεμένο με την ταυτότητα.

Τα 4 διαφορετικά μέρη της ομάδας Lorentz

Σύμβολο	$\Lambda_{00}$	$\det \Lambda $	Τύπος μετασχηματισμού
$L_+^\uparrow$	$\geq +1$	$+1$	γνήσιος ορθόχρονος
$L_+^\downarrow$	$\leq -1$	$+1$	γνήσιος μη-ορθόχρονος
$L_-^\uparrow$	$\geq +1$	$-1$	μη-γνήσιος ορθόχρονος
$L_-^\downarrow$	$\leq -1$	$-1$	μη-γνήσιος μη-ορθόχρονος

Τα άλλα μέρη μπορούν να εξαχθούν ξεκινώντας από την ταυτότητα μέσω διακριτών μετασχηματισμών, συγκεκριμένα την ομοτιμία (Parity),  $P$  και αντιστροφή χρόνου (time-reversal),  $T$  (βλ. πίνακα 1.3) όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$



Σχήμα 1.1: Τα διαφορετικά μέρη της ομάδας Lorentz όπως αυτά συνδέονται μέσω της ομοτιμίας,  $P$ , και αντιστροφής χρόνου (time-reversal),  $T$ .

Το αφηρημένο στοιχείο της ομάδας που συσχετίζεται με τον μετασχηματισμό συμβολίζεται με  $g(\Lambda)$ . Έπεται από την εξ. (1.28) ότι ο νόμος σύνθεσης ομάδας για δύο μετασχηματισμούς  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  είναι

$$g(\Lambda_1)g(\Lambda_2) = g(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (1.39)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι λόγω της συνθήκης (1.33) ένας γενικός μετασχηματισμός Lorentz εξαρτάται από 6 παραμέτρους, που αντιστοιχούν σε 3 περιστροφές και 3 ειδικούς μετασχηματισμούς Lorentz κατά μήκος των τριών αξόνων.

Ας εξετασθούν τώρα οι απειροελάχιστοι μετασχηματισμοί Lorentz. Αφού ορίζονται ως οι μετασχηματισμοί που αφήνουν αναλλοίωτη την νόρμα του τετραδιανύσματος, έχω

$$x^2 = x'^2, \quad (1.40)$$

για έναν απειροελάχιστο μετασχηματισμό

$$x' = x + \delta x, \quad (1.41)$$

προκύπτει ότι

$$x^2 \approx x^2 + 2x \cdot \delta x \implies x \cdot \delta x = 0. \quad (1.42)$$

Επειδή οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι γραμμικοί

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu \approx x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu, \quad (1.43)$$

προκύπτει ότι

$$x \cdot \delta x = 0 \implies x^\mu \epsilon_{\mu\nu} x^\nu = 0. \quad (1.44)$$

<sup>1</sup> Αυτοί οι πίνακες σχηματίζουν μία υποομάδα της  $O(3,1)$  που λέγεται  $SO(3,1)$ , διότι αποτελείται από ειδικούς πίνακες με μοναδιαία ορίζουσα.

Η πιο γενική λύση για τις παραμέτρους  $\epsilon_{\mu\nu}$  του μετασχηματισμού είναι ότι αυτοί σχηματίζουν έναν αντισυμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης.

$$\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}. \quad (1.45)$$

Έτσι, έπεται το αποτέλεσμα ότι το πλήθος των ανεξάρτητων παραμέτρων που χαρακτηρίζουν έναν μετασχηματισμό Lorentz είναι 6.

Με βάση τα ανωτέρω, έπεται ότι οι μετασχηματισμοί που συνδέονται με την ταυτότητα μπορούν να γραφούν ως

$$g(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}, \quad (1.46)$$

με  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  τις παραμέτρους του μετασχηματισμού ( $\Lambda \approx 1 + \omega$ ) και  $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$  τους απειροελάχιστους γεννήτορες. Οι τελευταίοι ικανοποιούν τις εξής μεταθετικές σχέσεις

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i[J_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} - J_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + J_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - J_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}]. \quad (1.47)$$

Οι γεννήτορες των περιστροφών και προωθήσεων μπορούν να εκφραστούν σε όρους των  $J_{\mu\nu}$  ως

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}, \quad K_i = J_{i0}, \quad (1.48)$$

με μεταθετικές σχέσεις

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= -[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Η ομάδα Lorentz είναι ομομορφική με την ομάδα των μιγαδικών  $2 \times 2$  πινάκων με ορίζουσα ίση με ένα, την ομάδα  $SL(2, C)^2$ . Για να αποδειχθεί ο ισχυρισμός αυτός θα εισαχθεί το εξής

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\tau}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\tau}), \quad (1.50)$$

με  $\vec{\tau}$  τους πίνακες Pauli και 1 ο ταυτοτικός πίνακας στο 2-διάστατο μιγαδικό χώρο. Έπειτα ορίζεται

$$\hat{x} = x^\mu \tilde{\sigma}_\mu = x^0 + \vec{x} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

με  $x^\mu$  το τετραδιάνυσμα. Ας σημειωθεί ότι

$$\text{Tr}(\hat{x}) = 2x^0, \quad \det|\hat{x}| = x^\mu x_\mu. \quad (1.52)$$

Σε αυτό τον χώρο μπορούν να ορισθούν οι εξής γραμμικοί μετασχηματισμοί

<sup>2</sup>Το  $S$  σημαίνει special, δηλαδή ορίζουσα ίση με την μονάδα,  $L$  γραμμική linear, 2 για  $2 \times 2$  πίνακες και  $C$  μιγαδικές τιμές.

$$\hat{x}' = U\hat{x}U^\dagger, \quad (1.53)$$

με  $\det|U| = 1$ . Προφανώς παραμένει αναλλοίωτη η ορίζουσα του  $\hat{x}$  και επομένως η νόρμα του τετραδιανύσματος  $x^\mu$ . Επιπλέον, το  $\hat{x}'$  είναι ερμιτιανό όπως το  $\hat{x}$ . Αυτό σημαίνει ότι εφαρμόζεται ένας γραμμικός μετασχηματισμός πανώ στο πραγματικό τετραδιάνυσμα  $x_\mu$ , διατηρώντας την νόρμα του και τις πραγματικές ιδιότητες του. Δηλαδή, ο γραμμικός μετασχηματισμός που προκαλείται από την  $U$  δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας μετασχηματισμός Lorentz.

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x. \quad (1.54)$$

Από όπου έπεται ότι

$$\hat{x}' = x'^\mu \tilde{\sigma}_\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \tilde{\sigma}_\mu = U x^\nu \tilde{\sigma}_\nu U^\dagger. \quad (1.55)$$

Χρησιμοποιώντας

$$\text{Tr}[\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu] = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

βρίσκεται ότι

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma_\mu U \tilde{\sigma}_\nu U^\dagger]. \quad (1.57)$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι υπάρχει μία 2 προς 1 αντιστοιχία μεταξύ  $SL(2, C)$  και  $O(3, 1)$ , αφού τόσο η  $U$  όσο και η  $-U$  αντιστοιχούν στον ίδιο μετασχηματισμό Lorentz,  $\Lambda$ . Με τον υπολογισμό των πινάκων  $U$  δίδονται οι περιστροφές περί τον άξονα  $i$ , και προωθήσεις (boosts) (ειδικοί μετασχηματισμοί Lorentz) κατά μήκος της κατεύθυνσης  $i$ .

$$\begin{aligned} U_i(\alpha) &= e^{i\alpha_i J_i} = \cos(\alpha_i/2) + i\tau_i \sin(\alpha_i/2), \\ U_i(\chi) &= e^{i\chi_i K_i} = \cosh(\chi_i/2) - \tau_i \sinh(\chi_i/2). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Συγκεκριμένα, οι γεννήτορες των περιστροφών και προωθήσεων σε αυτή την  $2 \times 2$  αναπαράσταση είναι αντίστοιχα

$$J_i = \frac{\tau_i}{2}, \quad K_i = i\frac{\tau_i}{2}. \quad (1.59)$$

Ας σημειωθεί ότι τα  $J_i$  είναι ερμιτιανά, ενώ τα  $K_i$  αντιερμιτιανά. Συνεπώς, αυτή η αναπαράσταση δεν είναι μοναδιαία. Το ίδιο συμβαίνει<sup>3</sup> για όλες τις αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης της  $SL(2, C)$ . Μάλιστα, λόγω της μη συμπαγούς φύσης της ομάδας Lorentz, μπορεί να δειχθεί ότι οι μοναδιαίες αναπαραστάσεις είναι απειροδιάστατες.

<sup>3</sup>Συγκεκριμένα η ερμιτιανότητα του  $\vec{J}$  και η αντιερμιτιανότητα του  $\vec{K}$ .



Ας σημειωθεί επιπροσθέτως ότι η σχέση μεταξύ  $SL(2, C)$  και  $O(3, 1)$  είναι ίδια που υπάρχει μεταξύ  $SU(2)$  και  $O(3)$ . Μάλιστα, αν περιορισθούν οι μετασχηματισμοί  $SL(2, C)$  ώστε να είναι μοναδιαίοι, η πρώτη από τις εξ. (1.52) δείχνει ότι δεν αλλάζουν την τέταρτη συντεταγμένη του τετραδιανύσματος και άρα είναι καθαρές περιστροφές.

Έπεται από τα ανωτέρω ότι την θέση της μελέτης των αναπαραστάσεων της  $O(3, 1)$  μπορούν να πάρουν οι αναπαραστάσεις της  $SL(2, C)$ . Παρόλα αυτά, οι αναπαραστάσεις της  $O(3, 1)$ , ή οι ταυστικές αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται από την συνθήκη  $T(U) = T(-U)$ , όπου  $T$  είναι η αναπαράσταση και  $U \in SL(2, C)$ .

Για την περίπτωση αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης μπορούν να ορισθούν δύο ερμιτιανοί συνδυασμοί των γεννητόρων, συγκεκριμένα

$$\vec{J}^{(1)} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}), \quad \vec{J}^{(2)} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}), \quad (1.60)$$

με κανόνες μεταθετικότητας

$$\begin{aligned} [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] &= i\epsilon_{ijk}J_k^{(1)}, & [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] &= i\epsilon_{ijk}J_k^{(2)} \\ [J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] &= 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Αυτή είναι η άλγεβρα της  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Επομένως, μία γενική μη αναγωγήμη (irreducible) αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της ομάδας Lorentz (ή  $SL(2, C)$ ) χαρακτηρίζεται από την ανάθεση του ζεύγους  $(s_1, s_2)$  με  $s_1$  και  $s_2$  το σπιν που αντιστοιχεί στις δύο ομάδες  $SU(2)$ . Οι χαμηλότερης διάστασης αναπαραστάσεις είναι

$$\zeta^\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \zeta^{\dot{\alpha}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (1.62)$$

Τα στοιχεία αυτών των αναπαραστάσεων λέγονται αστιγματίστοι (undotted) και στιγματιστοί (dotted) σπίνορες αντίστοιχα.

Η ακόλουθη σχέση είναι επίσης χρήσιμη

$$(s_1, s_2) = (s_1, 0) \otimes (0, s_2). \quad (1.63)$$

Σημειώνεται ότι η φυσική στροφορμή  $\vec{J}$  είναι το άθροισμα των δύο γεννητόρων  $SU(2)$ . Αυτό σημαίνει ότι το φυσικό σπιν,  $j$ , που περιέχεται σε μία δεδομένη αναπαράσταση  $(s_1, s_2)$  λαμβάνεται αθροίζοντας τις δύο στροφορμές, και λαμβάνει μία από τις εξής τιμές

$$|s_1 - s_2| \leq j \leq (s_1 + s_2). \quad (1.64)$$

Για παράδειγμα, η αναπαράσταση  $(1/2, 1/2)$  έχει περιεχόμενο σπιν 0 και 1 και αντιστοιχεί σε ένα τετραδιάνυσμα.

Μία άλλη σχετική παρατήρηση είναι ότι οι απειροελάχιστοι γεννήτορες  $\vec{J}$  και  $\vec{K}$  μετασχηματίζονται κάτω από την ισοτιμία (parity) ως ένα ψευδοδιάνυσμα και ένα γνήσιο διάνυσμα αντίστοιχα

$$P\vec{J}P^{-1} = \vec{J}, \quad P\vec{K}P^{-1} = -\vec{K}, \quad (1.65)$$

δείχνοντας ότι η ισοτιμία (parity) εναλλάσει τις δύο  $SU(2)$ . Με άλλα λόγια, η ισοτιμία μετασχηματίζει αστιγματίστους (undotted) σπίνορες σε στιγματιστούς (dotted) και αντίστροφα. Από αυτό έπεται ότι μία αναπαράσταση αναλλοίωτη κάτω από την ισοτιμία πρέπει να περιέχει ζεύγη από αναπαραστάσεις συνδεδεμένα από την ισοτιμία. Το απλούστατο παράδειγμα είναι η αναπαράσταση

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (1.66)$$

Αυτή είναι μία τετραδιάστατη αναπαράσταση της ομάδας Lorentz και αντιστοιχεί στην αναπαράσταση Dirac.

Όμοια, η αναπαράσταση

$$(1, 0) \oplus (0, 1) \quad (1.67)$$

περιγράφει δύο σπιν 1 και αντιστοιχεί σε έναν αντισυμμετρικό τανυστή τάξης 2, όπως ο τανυστής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Στην επόμενη ενότητα θα δειχθεί πως κατασκευάζονται όλες οι αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης της  $SL(2, C)$ .

## 1.4 Σπινორιακές Αναπαράστασεις της Ομάδας Lorentz

Η  $SL(2, C)$  μπορεί να θεωρηθεί ως μία αναπαράσταση από μόνη της. Σε αυτήν εισαγάγεται ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος δύο διαστάσεων (σπινორιακός χώρος) και ορίζονται μετασχηματισμοί σύμφωνα με

$$\zeta'^{\alpha} = a_{\beta}^{\alpha} \zeta^{\beta}, \quad a \in SL(2, C), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (1.68)$$

Από τις εξισώσεις (1.59) και (1.60) εξάγεται ότι

$$\vec{J}^{(1)} = \frac{\vec{\tau}}{2}, \quad \vec{J}^{(2)} = 0. \quad (1.69)$$

Επομένως, οι σπίνορες μετασχηματίζονται σύμφωνα με την

$$\zeta^{\alpha} \in \left( \frac{1}{2}, 0 \right). \quad (1.70)$$

Για λόγους απλότητας θα εισαχθεί ο εξής ειδικός  $2 \times 2$  πίνακας

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} = i(\tau_2)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

με τις εξής ιδιότητες

$$\epsilon^{-1} = \epsilon^T = \epsilon^{\dagger} = -\epsilon. \quad (1.72)$$

Επιπλέον, για κάθε πίνακα  $a \in SL(2, C)$  έχω

$$a = \epsilon^{-1} a^T \epsilon^{-1}. \quad (1.73)$$

Μαζί με την αναπαράσταση που δίδεται από τον  $a$  μπορεί να εισαχθούν οι αναπαράστασεις που ορίζονται από τους  $a^{T-1}$ ,  $a^*$  και  $a^{\dagger-1}$ . Μάλιστα, μπορεί να επαληθευθεί ότι ικανοποιούν τον ίδιο κανόνα γινομένου όπως εκείνον που ορίζεται από τον  $a$ . Για παράδειγμα,

$$a_1^{T-1} a_2^{T-1} = (a_1 a_2)^{T-1} \quad (1.74)$$

και όμοια για τις άλλες περιπτώσεις. Έπεται από την (1.73) ότι η αναπαράσταση που δίδεται από την  $a^{T-1}$  είναι ισοδύναμη με αυτήν που δίδεται από την  $a$ . Ομοίως, οι  $a^*$ ,  $a^{\dagger-1}$  είναι ισοδύναμες, ενώ οι  $a$ ,  $a^*$  δεν είναι <sup>4</sup>. Σε αυτή την περίπτωση, είναι βολικότερο να εισαχθεί ένας δεύτερος σπινორιακός χώρος μετασχηματίζοντας κατά το  $a^*$ . Θα χρησιμοποιηθεί ειδικός συμβολισμός για τις συντεταγμένες των στοιχείων αυτού του χώρου.

<sup>4</sup>Σημειώνεται ότι αν οι πίνακες περιοριστούν στον  $SU(2)$ , τότε, λόγω της μοναδιαίας συνθήκης, έπεται ότι  $a^* = a^{T-1}$  και αντίστοιχα  $a^*$  είναι ισοδύναμα με  $a$ .

$$\zeta^{\dot{\alpha}} = (a_{\dot{\beta}}^{\alpha})^* \zeta^{\dot{\beta}} \equiv a_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \zeta^{\dot{\beta}}. \quad (1.75)$$

Ο πρώτος σπινωριακός χώρος καλείται ο χώρος με τους αστιγματίστους (undotted) σπίνωρες, ενώ ο δεύτερος ο χώρος με τους στιγματιστούς (dotted) σπίνωρες. Χρησιμοποιώντας την ερμιτιανότητα του  $\vec{J}$  και την αντι-ερμιτιανότητα του  $\vec{K}$  έχω

$$\left(e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}\right)^{\dagger-1} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}, \quad \left(e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{K}}\right)^{\dagger-1} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{K}}. \quad (1.76)$$

Επειδή οι  $a^*$ ,  $a^{\dagger-1}$  είναι ισοδύναμες αναπαραστάσεις οι προηγούμενες σχέσεις δείχνουν ότι η μετάβαση από την  $a$  αναπαράσταση στην  $a^*$  ισοδυναμεί με  $\vec{J} \rightarrow \vec{J}$  και  $\vec{K} \rightarrow -\vec{K}$ , που σημαίνει ότι την ανταλλαγή  $\vec{J}^{(1)}$  με  $\vec{J}^{(2)}$ . Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι ο μιγαδικός συζυγής ενός αστιγματίστου (undotted) σπίνωρα μετασχηματίζεται σε έναν στιγματιστό (dotted) σπίνωρα και αντιστρόφως. Οπότε

$$\zeta^{\dot{\alpha}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (1.77)$$

Οι σπινωριακοί δείκτες (spinor indices) κατεβαίνουν και ανεβαίνουν με χρήση του πίνακα  $\epsilon$ .

$$\zeta_{\alpha} = \zeta^{\beta} \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \zeta_{\dot{\alpha}} = \zeta^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad (1.78)$$

με

$$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}. \quad (1.79)$$

Οι στιγματιστοί και αστιγματίστοι σπίνωρες με κάτω δείκτες μετασχηματίζονται ως  $a^{T-1}$  και  $a^{\dagger-1}$  αντίστοιχα. Αντιστρέφοντας τις εξ. (1.78) έχω

$$\zeta^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \zeta_{\beta}, \quad \zeta^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \zeta_{\dot{\beta}}. \quad (1.80)$$

Αφού οι σπίνωρες με πάνω και κάτω δείκτες μετασχηματίζονται κατά τα  $a$  και  $a^{T-1}$  η έκφραση

$$\zeta_{\alpha} \eta^{\alpha} = \zeta_{\dot{\alpha}} \epsilon^{\alpha\beta} \eta_{\beta} = -\zeta^{\alpha} \eta_{\alpha} \quad (1.81)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς  $SL(2, C)$ . Όμοια προκύπτει το αποτέλεσμα για τους στιγματιστούς σπίνωρες.

Κατά την εξ. (1.57) ορίζονται οι σπινωριακοί δείκτες για τους πίνακες  $\sigma^{\mu}$  και  $\tilde{\sigma}^{\mu}$  ως

$$(\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}\beta} = (1, \vec{\tau}), \quad (\tilde{\sigma}^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} = (1, -\vec{\tau}). \quad (1.82)$$

Επιπλέον, ορίζονται σπίνωρες υψηλότερης τάξης (higher order spinors) μέσω ταυστικών γινομένων. Για παράδειγμα οι εξής σπίνωρες βαθμού 2.

$$\zeta_{\alpha\beta}, \quad \zeta_{\dot{\alpha}}, \quad \zeta^{\alpha\beta}, \quad \zeta_{\alpha\dot{\beta}} \quad (1.83)$$

μετασχηματίζονται αντίστοιχα ως

$$a^{T-1} \otimes a^{T-1}, \quad a \otimes a^{T-1}, \quad a \otimes a, \quad a^{T-1} \otimes a^{\dagger-1}. \quad (1.84)$$

Αυτές οι αναπαράστασεις μπορούν γενικά να εκφραστούν ως το ευθύ άθροισμα μη αναγώγιμων (irreducible) αναπαράστάσεων. Οι τελευταίες δίδονται από σπίνορες τύπου

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m;\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n} \quad (1.85)$$

που μετασχηματίζονται ως

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m;\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n} = a_{\gamma_1}^{\alpha_1} a_{\gamma_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\gamma_m}^{\alpha_m} a_{\dot{\gamma}_1}^{\dot{\beta}_1} a_{\dot{\gamma}_2}^{\dot{\beta}_2} \cdots a_{\dot{\gamma}_n}^{\dot{\beta}_n} \zeta^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m;\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_n} \quad (1.86)$$

συμμετρικοποιημένο τόσο στους  $m$  αστιγματίστους (undotted) όσο και στους  $n$  στιγματιστούς (dotted) δείκτες. Είναι

$$a_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = (a_{\alpha}^{\beta})^*. \quad (1.87)$$

Το πλήθος των αστιγματίστων (undotted) δεικτών,  $m$  και το πλήθος των στιγματιστών (dotted) δεικτών,  $n$ , είναι αντίστοιχα διπλάσιο του σπιν  $s_1$  και  $s_2$  που χαρακτηρίζει την αναπαράσταση της  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Αυτοί οι σπίνορες είναι τύπου  $[m, n]$ .

Για παράδειγμα, η αναπαράσταση  $(1/2, 1/2)$  έχει στροφορμή 0 και 1 και αντιστοιχεί σε ένα τετραδιάνυσμα. Αυτό έπεται από το ότι συνδιάζοντας έναν αστιγματίστο με έναν στιγματιστό σπίνορα μέσω των  $\sigma_{\mu}$  πινάκων κατασκευάζεται ο συνδυασμός

$$\eta^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}\beta} \zeta^{\beta} \quad (1.88)$$

που μετασχηματίζεται ως ένα τετραδιάνυσμα. Οι γεννήτορες της  $SL(2, C)$  για τις δύο μη-ισοδύναμες σπινοριακές αναπαράστασεις δίδονται από τους  $J_{\mu\nu} = i\sigma_{\mu\nu}/2$  και  $J_{\mu\nu} = i\tilde{\sigma}_{\mu\nu}/2$ , όπου

$$(\sigma_{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\mu})^{\alpha\dot{\gamma}}(\sigma_{\nu})_{\dot{\gamma}\beta} - (\tilde{\sigma}_{\nu})^{\alpha\dot{\gamma}}(\sigma_{\mu})_{\dot{\gamma}\beta} \quad (1.89)$$

και

$$(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu})_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{\nu})^{\dot{\gamma}\beta} - (\sigma_{\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{\mu})^{\dot{\gamma}\beta}. \quad (1.90)$$

Κατεβάζοντας έναν σπινοριακό δείκτη στον  $\sigma_{\mu\nu}$

$$(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = (\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \epsilon_{\gamma\beta}, \quad (1.91)$$

οι πίνακες γίνονται συμμετρικοί στους σπινωριακούς δείκτες. Επιπλέον, για το τανυστικό γινόμενο δύο αστιγματίστων σπινόρων, κατά τον κανόνα πρόσθεσης δύο στροφορμών, έχω

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0). \quad (1.92)$$

Αυτό αντιστοίχως λαμβάνει το αντισυμμετρικό και συμμετρικό μέρος του γινομένου δύο αστιγματίστων σπινόρων με

$$\zeta^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \eta^\beta \in (0, 0), \quad \zeta^\alpha (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \eta^\beta \in (1, 0). \quad (1.93)$$

Ομοίως για την ίδια πράξη με δύο στιγματιστούς σπίνωρες προκύπτουν οι αναπαράστασεις  $(0, 0)$  και  $(0, 1)$ . Ο συνδυασμός του  $(1, 0)$  με  $(0, 1)$  δίδει έναν γενικό αντισυμμετρικό τανυστή που περιέχει δύο σπιν 1. Για παράδειγμα, όπως η δύναμη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αποτελείται από το  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ . Επιπλέον, χρειάζεται το  $s_1 + s_2$  να είναι ακέραιο ή  $m + n$  άρτιο ώστε να προκύπτουν τανυστικές αναπαράστασεις. Η συνθήκη  $T(a) = T(-a)$  ικανοποιείται άμεσα, αφού ο μετασχηματισμός  $a$  εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών.

## 1.5 Η Ομάδα Poincaré

Η ομάδα Poincaré ορίζεται ως το σύνολο των μετασχηματισμών που αφήνουν αναλλοίωτη την απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον χώρο Minkowski.

$$(y - x)^2 = (y - x)_\mu (y - x)_\nu g^{\mu\nu}. \quad (1.94)$$

Άρα, αποτελείται από μετασχηματισμούς και μεταφορές Lorentz (transformations & translations)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (1.95)$$

Έτσι, χαρακτηρίζεται από το ζεύγος  $(\Lambda, a)$ . Άμεσα προκύπτει η εξαγωγή του πολλαπλασιαστικού κανόνα για δύο στοιχεία ομάδας, μέσω του συμβολισμού του αντίστοιχου στοιχείου ομάδας με  $g(\Lambda, a)$  και με εφαρμογή δύο μετασχηματισμών Poincaré .

$$g(\Lambda_1, a_1)g(\Lambda_2, a_2) = g(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1). \quad (1.96)$$

Το πλήθος των παραμέτρων που σχετίζεται με ένα μετασχηματισμό Poincaré είναι 10, όπου 6 από αυτούς αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς και 4 σε μεταφορές Lorentz. Παίρνοντας ξανά την συντεταγμένη component του μετασχηματισμού Poincaré συνδεδεμένη με την ταυτότητα, γράφεται

$$g(\Lambda, a) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_\mu P^\mu}. \quad (1.97)$$

Οι μεταθετικοί κανόνες, που περιέχουν, τους νέους 4 γεννήτορες  $P_\mu$  είναι

$$[J_{\rho\sigma}, P_\mu] = i(g_{\sigma\mu}P_\rho - g_{\rho\mu}P_\sigma) \quad (1.98)$$

και

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \quad (1.99)$$

Επιπλέον, ορίζεται το τετραδιάνυσμα Pauli-Lubanski ως

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma. \quad (1.100)$$

Δείχνεται ότι το  $W_\mu$  μετατίθεται με τον τελεστή ορμής

$$[W_\mu, P_\nu] = 0 \quad (1.101)$$

και ότι έχει μεταθετικές σχέσεις του ίδιου τύπου ορμής με τους γεννήτορες Lorentz

$$[J_{\rho\sigma}, W_\mu] = i(g_{\sigma\mu}W_\rho - g_{\rho\mu}W_\sigma). \quad (1.102)$$

Δείχνεται επιπλέον ότι το  $P^2$  και  $W^2$  είναι τελεστές Casimir της ομάδας Poincaré, δηλαδή μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες Poincaré και πιο συγκεκριμένα με τους Lorentz.

$$[J_{\mu\nu}, P^2] = [J_{\mu\nu}, W^2] = 0. \quad (1.103)$$

Σε διάνυσμα κατάστασης για ένα σωματίδιο μάζας  $m$ , ορμής  $\vec{p} = \vec{0}$ , σπίν  $s$  και  $z$ -συντεταγμένη  $s_z$ , έχω

$$W^0|\vec{p} = \vec{0}, m, s, s_z\rangle = 0, \quad W^i|\vec{p} = \vec{0}, m, s, s_z\rangle = -mJ_i|\vec{p} = \vec{0}, m, s, s_z\rangle \quad (1.104)$$

και

$$W^2|\vec{p} = \vec{0}, m, s, s_z\rangle = -m^2s(s+1)|\vec{p} = \vec{0}, m, s, s_z\rangle. \quad (1.105)$$



## Κεφάλαιο 2

# Το Πεδίο Dirac

### 2.1 Η Εξίσωση Dirac

Ο Dirac προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα μη θετικής πυκνότητας πιθανότητας, που υπάρχει στην περίπτωση Klein-Gordon, διατυπώνοντας μια νέα εξίσωση κύματος. Ο Dirac σκέφτηκε ότι για θετική πιθανότητα ήταν απαραίτητο να είναι, η εξίσωση κύματος, πρώτης τάξης στη χρονική παράγωγο (όπως συμβαίνει για την εξίσωση Schrödinger). Έτσι, ο Dirac αναζήτησε έναν τρόπο μείωσης της εξίσωσης Klein-Gordon (δεύτερης τάξης στη χρονική παράγωγο) σε πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση. Η διατύπωση του Pauli για το σπιν ηλεκτρονίων έβαλε τον Dirac στο σωστό δρόμο. Στην πραγματικότητα, ο Pauli έδειξε ότι για να περιγράψει το σπιν, ήταν απαραίτητο να γενικευθεί η κυματοσυνάρτηση Schrödinger (μιγαδικός αριθμός) σε αντικείμενο δύο συνιστωσών

$$\psi \rightarrow \psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

τροποποιώντας επίσης την εξίσωση κύματος σε μια εξίσωση πίνακα

$$i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta=1}^2 H_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (2.2)$$

όπου η Χαμιλτονιανή  $H$  είναι, γενικά, ένας πίνακας  $2 \times 2$ . Το σπιν ηλεκτρονίων περιγράφεται στη συνέχεια από ένα ειδικό σύνολο πινάκων  $2 \times 2$ , οι πίνακες Pauli,  $\vec{\sigma}$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}. \quad (2.3)$$

Ο Dirac συνειδητοποίησε ότι ήταν δυνατό να γράψει το τετράγωνο της νόρμας ενός ειδικού διανύσματος ως

$$|\vec{k}|^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2, \quad (2.4)$$

αφού έπεται από

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}, \quad (2.5)$$

όπου  $[A, B]_+ = AB + BA$  είναι ο αντιμεταθέτης των τελεστών  $A$  και  $B$ .

Μετά από αυτή την πρόταση προσπάθησε να γράψει μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση για μια κυματοσυνάρτηση πολλών συνιστωσών

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + \beta m\psi \equiv H\psi, \quad (2.6)$$

όπου  $\vec{\alpha}$  και  $\beta$  είναι πίνακες. Οι απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιήσει αυτή η εξίσωση είναι

- η συνάρτηση κύματος  $\psi$ , λύση της εξίσωσης Dirac, θα πρέπει να ικανοποιεί και την εξίσωση Klein-Gordon προκειμένου να αποκτηθεί η σωστή σχέση διασποράς μεταξύ ενέργειας και ορμής·
- η εξίσωση πρέπει να δέχεται ένα διατηρούμενο ρεύμα με την τέταρτη συνιστώσα να είναι θετικά ορισμένη·
- η εξίσωση πρέπει να είναι συναλλοίωτη σε σχέση με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Προκειμένου να ικανοποιηθεί η πρώτη απαίτηση, πρέπει για την εξίσωση Dirac να ισχύει ότι η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης συμπίπτει με την εξίσωση Klein-Gordon

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)^2\psi \\ &= \left( -\alpha^i\alpha^j \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + \beta^2 m^2 - i(\beta\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\beta) \cdot \vec{\nabla} \right) \psi \\ &= \left( -\frac{1}{2}[\alpha^i, \alpha^j]_+ \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + \beta^2 m^2 - i(\beta\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\beta) \cdot \vec{\nabla} \right) \psi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Είναι επόμενο ότι είναι απαραίτητο να απαιτηθούν οι ακόλουθες σχέσεις πινάκων

$$[\alpha^i, \alpha^j]_+ = 2\delta_{ij}, \quad [\alpha^i, \beta]_+ = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (2.8)$$

Χρειάζεται η Χαμιλτονιανή,  $H$ , να είναι ερμιτιανή. Για το σκοπό αυτό απαιτείται  $\vec{\alpha}$  και  $\beta$  να είναι ερμιτιανοί πίνακες. Δεδομένου ότι για κάθε επιλογή του δείκτη  $i$ ,  $(\alpha^i)^2 = 1$ , προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές των  $\vec{\alpha}$  και  $\beta$  πρέπει να είναι  $\pm 1$ . Δύναται επίσης να αποδειχθούν οι ακόλουθες σχέσεις

$$Tr(\beta) = Tr(\alpha^i) = 0. \quad (2.9)$$

Για παράδειγμα, από την  $\alpha^i \beta = -\beta \alpha^i$ , προκύπτει  $\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta$ , και συνεπώς

$$\text{Tr}(\alpha^i) = -\text{Tr}(\beta \alpha^i \beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0, \quad (2.10)$$

όπου έχει γίνει χρήση της κυκλικής ιδιότητας του ίχνους. Η συνέπεια είναι ότι οι πίνακες  $\alpha^i$  και  $\beta$  μπορούν να υλοποιηθούν μόνο σε ένα χώρο άρτιων διαστάσεων. Αυτή είναι ίσως η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετώπισε ο Dirac. Στην πραγματικότητα, τα  $\alpha^i$  απολαμβάνουν τις ίδιες ιδιότητες των πινάκων Pauli. Ωστόσο, σε χώρο  $2 \times 2$  πινάκων, δεν υπάρχει ακόμα ένας αντικειμενοστρεφής πίνακας  $\beta$ . Χρειάστηκε αρκετός χρόνος πριν ο Dirac συνειδητοποιήσει ότι οι προηγούμενες σχέσεις θα μπορούσαν να ικανοποιηθούν από πίνακες  $4 \times 4$ .

Μια ρητή πραγματοποίηση των μήτρων Dirac είναι η ακόλουθη

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

όπως μπορεί τετριμένα να επαληθευθεί.

Θα δειχθεί τώρα ότι και η δεύτερη από τις απαιτήσεις ικανοποιείται. Πολλαπλασιάζεται η εξίσωση Dirac με  $\psi^\dagger$  από τα αριστερά και στη συνέχεια εξετάζεται η εξίσωση για  $\psi^\dagger$

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = i(\vec{\nabla} \psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha} + m \psi^\dagger \beta, \quad (2.12)$$

πολλαπλασιασμένη από τα δεξιά με  $\psi$ . Αφαιρώντας τις εξισώσεις που προκύπτουν είναι

$$i \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi - (i \vec{\nabla} \psi^\dagger \cdot \vec{\alpha} + \psi^\dagger \beta m) \psi = -i \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi), \quad (2.13)$$

δηλαδή

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + i \frac{\partial}{\partial x^j} (\psi^\dagger \alpha^j \psi) = 0. \quad (2.14)$$

Είναι εμφανές ότι το ρεύμα

$$j^\mu = (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \alpha^i \psi) \quad (2.15)$$

διατηρείται:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Επιπλέον, η τέταρτη συνιστώσα του  $j^0 = \psi^\dagger \psi$  είναι θετικά ορισμένη. Βεβαίως, εκχρεμεί ακόμη να δειχθεί ότι το  $j^\mu$  είναι ένα τετραδιάνυσμα που συνεπάγεται ότι

$$\int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (2.17)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

## 2.2 Συναλλοίωτες Ιδιότητες της Εξίσωσης Dirac

Για να συζητηθούν οι ιδιότητες μετασχηματισμού Lorentz της εξίσωσης Dirac, είναι βολικότερο να γραφθεί η εξίσωση σε μια ελαφρώς διαφορετική μορφή. Ας πολλαπλασιασθεί η εξίσωση με  $\beta$

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + m\psi \quad (2.18)$$

και ορίζονται οι εξής πίνακες

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται

$$\left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) \psi = 0, \quad (2.20)$$

ή, με πιο συμπαγή τρόπο

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0, \quad (2.21)$$

όπου

$$\hat{\partial} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.22)$$

Οι πίνακες  $\gamma^\mu$  ικανοποιούν τις εξής σχέσεις αντιμετάθεσης

$$[\gamma^i, \gamma^j]_+ = \beta \alpha^i \beta \alpha^j + \beta \alpha^j \beta \alpha^i = -[\alpha^i, \alpha^j]_+ = -2\delta_{ij}, \quad (2.23)$$

$$[\gamma^0, \gamma^i]_+ = [\beta, \beta \alpha^i]_+ = \alpha^i + \beta \alpha^i \beta = 0, \quad (2.24)$$

ή

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Παρατηρείται ότι

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta \alpha^i)^\dagger = \alpha^i \beta = -\gamma^i \quad (2.26)$$

και

$$(\gamma^i)^2 = -1. \quad (2.27)$$

Για να είναι η εξίσωση Dirac, οι εξής δύο συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται:

- δεδομένης της κυματικής εξίσωσης Dirac  $\psi(x)$  στο σύστημα Lorentz, του  $S$ , ενός παρατηρητή σε ένα διαφορετικό σύστημα, ο  $S'$  πρέπει να μπορεί να υπολογίζει σε όρους της  $\psi(x)$ , την κυματοσυνάρτηση  $\psi'(x')$  που περιγράφει την ίδια φυσική κατάσταση όπως η  $\psi(x)$  κάνει στον  $S$ .

- σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας, η  $\psi'(x')$  πρέπει να είναι λύση μίας εξίσωσης, η οποία στην  $S'$  έχει την ίδια μορφή όπως η εξίσωση Dirac στην  $S$ . Δηλαδή

$$\left( i\tilde{\gamma}^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0. \quad (2.28)$$

Οι πίνακες  $\tilde{\gamma}^\mu$  θα πρέπει να ικανοποιούν την ίδια άλγεβρα όπως οι  $\gamma^\mu$ , διότι και στις δύο περιπτώσεις οι κυματοσυναρτήσεις πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon (που είναι αναλλοίωτης μορφής). Ως εκ τούτου, αμελώντας έναν δυνατό μοναδιαίο μετασχηματισμό, μπορούν να βρεθούν τα δύο σύνολα πινάκων. Συνεπώς, η εξίσωση Dirac στο  $S'$  θα είναι

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0. \quad (2.29)$$

Επειδή τόσο η εξίσωση Dirac όσο και οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι γραμμικοί, θα απαιτηθεί ότι οι κυματοσυναρτήσεις σε δύο διαφορετικά συστήματα Lorentz να είναι γραμμικώς συσχετισμένα

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x), \quad (2.30)$$

όπου  $S(\Lambda)$  είναι ένας  $4 \times 4$  πίνακας στο μιγαδικό διάνυσμα  $\psi(x)$  και  $\Lambda$  είναι ένας μετασχηματισμός Lorentz. Ως προς την Φυσική, ο πίνακας  $S(\Lambda)$  πρέπει να είναι αντιστρέψιμος

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x'), \quad (2.31)$$

αλλά χρησιμοποιώντας την αρχή της σχετικότητας, αφού μεταβαίνει πηγαίνει από το σύστημα  $S'$  στο σύστημα  $S$  μέσω του μετασχηματισμού  $\Lambda^{-1}$ , πρέπει να ισχύει

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x'), \quad (2.32)$$

από όπου

$$S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1}). \quad (2.33)$$

Θεωρώντας την εξίσωση Dirac στο σύστημα  $S$

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi(x) = 0, \quad (2.34)$$

δύναται να γραφθεί

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0. \quad (2.35)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με  $S(\Lambda)$  και χρησιμοποιώντας

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \Lambda_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\nu}, \quad x'_\nu = \Lambda_{\nu\mu} x^\mu, \quad (2.36)$$

έπεται ότι

$$\left( iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} - m \right) \psi'(x') = 0. \quad (2.37)$$

Συγκρίνοντας με την εξ. (2.28), προκύπτει

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda_{\nu\mu} = \gamma_\nu, \quad (2.38)$$

ή

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma_\nu S(\Lambda) = \Lambda_{\nu\mu}\gamma^\mu. \quad (2.39)$$

Για έναν απειροελάχιστο μετασχηματισμό γράφεται

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

με  $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$  ( βλ. εξ. (1.45) ). Με την επέκταση του  $S(\Lambda)$  στην πρώτη τάξη στην  $\epsilon_{\mu\nu}$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \quad (2.41)$$

και χρησιμοποιώντας (2.39), βρίσκεται η εξής συνθήκη  $\sigma_{\mu\nu}$

$$\left( 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\lambda}\epsilon^{\rho\lambda} \right) \gamma_\nu \left( 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \right) = (g_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu})\gamma^\mu, \quad (2.42)$$

από όπου

$$\frac{i}{4}\epsilon^{\rho\lambda}[\sigma_{\rho\lambda}, \gamma_\nu] = \epsilon_{\nu\mu}\gamma^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\lambda}(g_{\rho\nu}\gamma_\lambda - g_{\lambda\nu}\gamma_\rho) \quad (2.43)$$

και τελικά

$$[\sigma_{\rho\lambda}, \gamma_\nu] = -2i(g_{\rho\nu}\gamma_\lambda - g_{\lambda\nu}\gamma_\rho). \quad (2.44)$$

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι η λύση αυτής της εξίσωσης δίδεται από την

$$\sigma_{\rho\lambda} = \frac{i}{2}[\gamma_\rho, \gamma_\lambda]. \quad (2.45)$$

Μάλιστα,

$$\begin{aligned} [\sigma_{\rho\lambda}, \gamma_\nu] &= \frac{i}{2}[\gamma_\rho\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\rho, \gamma_\nu] = \frac{i}{2}[\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho] \\ &= \frac{i}{2}[(2g_{\rho\lambda} - \gamma_\lambda\gamma_\rho)\gamma_\nu - \gamma_\nu(2g_{\rho\lambda} - \gamma_\lambda\gamma_\rho) - \gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho] \\ &= -i[\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho] \\ &= -i[\gamma_\lambda(2g_{\rho\nu} - \gamma_\nu\gamma_\rho) - (2g_{\nu\lambda} - \gamma_\lambda\gamma_\nu)\gamma_\rho] \\ &= -2i[g_{\rho\nu}\gamma_\lambda - g_{\nu\lambda}\gamma_\rho]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ένας πεπερασμένος μετασχηματισμός Lorentz επιτυγχάνεται με εκθετικοποίηση

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}}, \quad (2.47)$$

με

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (2.48)$$

Μπορεί τώρα να επαληθευθεί ότι το ρεύμα  $j^\mu$ , ορισμένο στην εξ. (2.15) μετασχηματίζεται ως ένα τετραδιάνυσμα. Για το σκοπό αυτό θα εισαχθεί ο ακόλουθος συμβολισμός

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\beta = \psi^\dagger(x)\gamma_0. \quad (2.49)$$

Έπεται ότι

$$j^0 = \psi^\dagger\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad j^i = \psi^\dagger\alpha^i\psi = \bar{\psi}\beta\alpha^i\psi = \bar{\psi}\gamma^i\psi, \quad (2.50)$$

ή

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.51)$$

Οι ιδιότητες μετασχηματισμού του  $\bar{\psi}$  κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz είναι απλοί. Παρατηρώντας ότι

$$\gamma^0\gamma^\mu\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \quad (2.52)$$

και

$$\sigma_{\mu\nu}\dagger = -\frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\dagger = \frac{i}{2}[\gamma_\mu\dagger, \gamma_\nu\dagger], \quad (2.53)$$

έπεται ότι

$$\gamma_0\sigma_{\mu\nu}\dagger\gamma_0 = \sigma_{\mu\nu} \quad (2.54)$$

και άρα

$$\gamma_0 S^\dagger(\Lambda)\gamma_0 = S^{-1}(\Lambda), \quad (2.55)$$

από όπου

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda). \quad (2.56)$$

Τελικά προκύπτει

$$j'^\mu(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x). \quad (2.57)$$

Επομένως, το  $j^\mu$  έχει τις επιθυμητές ιδιότητες μετασχηματισμού. Η αναπαράσταση για τους γεννήτορες Lorentz, στην ίδια βάση που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για τους πίνακες  $\gamma_\mu$ , είναι

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i] = \frac{i}{2}(\beta^2 \alpha_i - \beta \alpha_i \beta) = -i\alpha^i = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = -\frac{i}{2}[\alpha_i, \alpha_j] = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Οι γεννήτορες των χωρικών περιστροφών δεν είναι τίποτα άλλο, παρά οι πίνακες Παυλι, όπως θα περίμενε κανείς για τα σωματίδια με σπιν 1/2.

Η συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης Dirac κάτω από την ισοτιμία parity  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  δύναται να αποκτηθεί με ανάλογο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση

$$\Lambda_{P\mu}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

και άρα

$$S^{-1}(\Lambda_P)\gamma^\mu S(\Lambda_P) = \gamma_\mu. \quad (2.61)$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται από την επιλογή

$$S(\Lambda_P) = \eta_P \gamma_0, \quad (2.62)$$

όπου  $\eta_P$  είναι μια μη παρατηρήσιμη αυθαίρετη φάση. Τότε

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \eta_P \gamma_0 \psi(x), \quad x'^\mu = (x^0, -\vec{x}). \quad (2.63)$$

Είναι χρήσιμο να ταξινομηθούν οι διγραμμικές εκφράσεις στη κυματοσυνάρτηση Dirac κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Ας εξετασθούν οι εκφράσεις του τύπου  $\bar{\psi} A \psi$ , όπου ο  $A$  είναι ένας αυθαίρετος  $4 \times 4$  πίνακας. Ως βάση για τους  $4 \times 4$  πίνακες μπορεί να παρθεί το ακόλουθο σύνολο 16 γραμμικά ανεξάρτητων πινάκων

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= 1, \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu, \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu, \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu}, \\ \Gamma^P &= \gamma_5, \end{aligned} \quad (2.64)$$

όπου ο πίνακας  $\gamma_5$  ορίζεται ως

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (2.65)$$



Ο πίνακας αυτός έχει τις εξής ιδιότητες

$$\gamma_5^\dagger = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5, \quad (2.66)$$

$$\gamma_5^2 = 1, \quad [\gamma_5, \gamma_\mu]_+ = 0, \quad (2.67)$$

και στην προηγούμενη αναπαράσταση των πινάκων  $\gamma$ :

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Μπορεί να επαληθευθεί ότι οι διγραμμικές εκφράσεις έχουν την εξής συμπεριφορά κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\approx \text{scalar}, \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi &\approx \text{four - vector}, \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi &\approx \text{axial four - vector}, \\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi &\approx \text{antisymmetric } 2^{\text{nd}} \text{ rank tensor}, \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi &\approx \text{pseudoscalar}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ως παράδειγμα, ας επαληθευθεί ο τελευταίος από αυτούς τους ισχυρισμούς μέσω ενός μετασχηματισμού ισοτιμίας:

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \eta_P^* \eta_P \bar{\psi}(x)\gamma_0\gamma_5\gamma_0\psi(x) = -\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x). \quad (2.70)$$

## 2.3 Η Εξίσωση Dirac και η Ομάδα Lorentz

Σε αυτή την ενότητα θα δειχθεί πως η εξίσωση Dirac έπεται από τη θεωρία των αναπαραστάσεων της ομάδας Lorentz. Στην ενότητα της ομάδας Lorentz παρουσιάστηκε ότι η ισοτιμία parity εναλλάσσει την σπινωριακή αναπαράσταση του  $(s_1, s_2)$  σε  $(s_2, s_1)$ . Αν ενδιαφέρουν οι αναπαραστάσεις της πλήρους ομάδας Lorentz, δηλαδή της ομάδας Lorentz που επεκτάθηκε από την ισοτιμία  $(L_+^\uparrow \oplus L_-^\uparrow)$ , τότε υπάρχουν οι εξής δύο πιθανότητες

$$(s, s), \quad (s_1, s_2) \oplus (s_2, s_1). \quad (2.71)$$

Οι αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν στις πρώτες δυνατότητες είναι, για παράδειγμα,  $(0, 0)$ , η βαθμωτή αναπαράσταση ή  $(1/2, 1/2)$ , η αναπαράσταση τετραδιανύσματος. Το πιο απλό παράδειγμα της δεύτερης πιθανότητας είναι

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (2.72)$$

Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στην αναπαράσταση Dirac. Για να κατανοηθεί περισσότερο αυτό το σημείο, ας εξετασθεί πρώτα η αναπαράσταση τετραδιανύσματος. Ως γνωστόν, αυτό χαρακτηρίζεται από το δισπίνωρα  $(1/2, 1/2)$ .

Ακριβέστερα, αν δοθεί ένα τετραδιάνυσμα  $V^\mu$ , μπορεί να κατασκευασθεί ο δι-σπίνορας

$$V \equiv V_{\dot{\alpha}\beta} = (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} V^\mu = \begin{pmatrix} V^0 - V^3 & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & V^0 + V^3 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί απλά να αντιστραφεί

$$V^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu V). \quad (2.74)$$

Τώρα, ας υποτεθεί η κατασκευή μίας εξίσωσης κυμάτων πρώτης τάξης για έναν αστιγματίστο σπίνορα (undotted spinor). Υπάρχει η δυνατότητα ενέργειας πάνω στον αστιγματίστο σπίνορα από τον τελεστή βαθμίδας στην δισπινοριακή του αναπαράσταση

$$i\partial^\mu (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \zeta^\beta. \quad (2.75)$$

Από την συναλλοιώτητα η έκφραση αυτή μπορεί να είναι μηδέν ή αλλιώς πρέπει να είναι ένας στιγματιστός σπίνορας. Δηλαδή

$$i\partial^\mu (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \zeta^\beta = 0, \quad (2.76)$$

ή

$$i\partial^\mu (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \zeta^\beta = m\eta_{\dot{\alpha}}. \quad (2.77)$$

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε ένα άμαζο φερμιόνιο και θεωρήθηκε για πρώτη φορά από τον Hermann Weyl. Ωστόσο, ο Pauli επέκρινε αυτή την εξίσωση με την αιτιολογία ότι δεν ήταν αναλλοίωτη η ισοτιμία. Ο Weyl δικαιώθηκε μόνο το 1956 μετά την ανακάλυψη της μη διατηρητικής ισοτιμίας στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Στη δεύτερη περίπτωση κάποιος αναγκάζεται να εισαγάγει τον στιγματιστό σπίνορα  $\eta_{\dot{\alpha}}$  ο οποίος, με τη σειρά του, πρέπει επίσης να ικανοποιεί μια εξίσωση κύματος πρώτης τάξης που μπορεί να γραφθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ως <sup>1</sup>

$$i\partial^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} = m\zeta^\alpha. \quad (2.78)$$

Ας ορισθεί τώρα ο τετρασπίνορας

$$\psi = \begin{pmatrix} \zeta^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Οι δύο σπινοριακές εξισώσεις μπορούν στη συνέχεια να γραφθούν ως μια απλή εξίσωση

<sup>1</sup>Κατ'άρχην δύο διαφορετικές σταθερές  $m_1$  και  $m_2$  θα μπορούσαν να εμφανισθούν στις δύο εξισώσεις σπίνορα. Ωστόσο, με μια βολική ανακλιμακοποίηση των σπίνωρων, οι δύο εξισώσεις μπορούν να γραφθούν ως μία σταθερά.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.80)$$

όπου

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\beta}} \\ (\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι αυτοί οι πίνακες ικανοποιούν την άλγεβρα (2.25), και επιπροσθέτως ότι

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Στη βάση που εξετάσθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ο  $\gamma^0$  ήταν διαγώνιος, ενώ στην παρούσα βάση ο  $\gamma_5$  είναι ο διαγώνιος. Οι δύο βάσεις ονομάζονται αντίστοιχα η ενέργεια και η chiral βάση. Το πρώτο όνομα αντιστοιχεί στο γεγονός ότι για ένα σωματίδιο σε κατάσταση ηρεμίας ο τελεστής Dirac είναι διαγώνιος. Η δεύτερη ονομασία προέρχεται από τον τελεστή chirality για τον  $\gamma_5$ . Αν γραφθεί το πεδίο τεσσάρων συνιστωσών στην ενεργειακή βάση ως

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

η σχέση με την chiral βάση είναι

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta - \eta). \quad (2.84)$$

## 2.4 Λύσεις Ελεύθερων Σωματιδίων της Εξίσωσης Dirac

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν οι λύσεις των επιπέδων κυμάτων της εξίσωσης Dirac. Στο σύστημα ηρεμίας των σωματιδίων αναζητούνται λύσεις τύπου

$$\psi(t) = ue^{-imt}, \quad (2.85)$$

όπου  $u$  είναι ένας σπίνορας τεσσάρων συνιστωσών. Αυτή η λύση έχει θετική ενέργεια. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Dirac προκύπτει

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(t) = (m\gamma_0 - m)ue^{-imt} = 0, \quad (2.86)$$

δηλαδή

$$(\gamma_0 - 1)u = 0. \quad (2.87)$$

Επειδή το  $\gamma_0$  έχει ιδιοτιμές  $\pm 1$  έπεται ότι υπάρχουν λύσεις τύπου  $e^{imt}$ , που αντιστοιχούν σε αρνητικές καταστάσεις ενέργειας. Γενικότερα μπορεί να αναζητηθούν λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx}u(k), & \text{positive energy,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx}v(k), & \text{negative energy.}\end{aligned}\quad (2.88)$$

Εισάγοντας στην εξίσωση Dirac

$$\begin{aligned}(\hat{k} - m)u(k) &= 0, \\ (\hat{k} + m)v(k) &= 0.\end{aligned}\quad (2.89)$$

Στο σύστημα ηρεμίας προκύπτει

$$\begin{aligned}(\gamma_0 - 1)u(m, \vec{0}) &= 0, \\ (\gamma_0 + 1)v(m, \vec{0}) &= 0.\end{aligned}\quad (2.90)$$

Υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι σπίνορες τύπου  $u$  και δύο τύπου  $v$  που ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις. Στη βάση όπου  $\gamma_0$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας μπορούν να επιλεγούν οι ακόλουθες λύσεις

$$\begin{aligned}u^{(1)}(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & u^{(2)}(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v^{(1)}(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v^{(2)}(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.91)$$

Σε ένα γενικό σύστημα Lorentz οι λύσεις μπορούν να ληφθούν με την προώθηση (boost) των λύσεων στο σύστημα ηρεμίας. Δηλαδή, εφαρμόζοντας ένα μετασχηματισμό Lorentz από το σύστημα ηρεμίας σε ένα γενικό. Εναλλακτικά, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η ακόλουθη έκφραση

$$(\hat{k} - m)(\hat{k} + m) = k^2 - m^2 \quad (2.92)$$

εξαφανίζεται για  $k^2 = m^2$ . Επομένως, μπορεί να λυθεί το πρόβλημά (εκτός από μια σταθερά κανονικοποίησης), θέτωντας

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)}(k) &= c_\alpha(\hat{k} + m)u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\ v^{(\alpha)}(k) &= d_\alpha(-\hat{k} + m)v^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned} \quad (2.93)$$

με  $k^2 = m^2$ . Για να προσδιορισθούν οι σταθερές κανονικοποίησης  $c_\alpha$  και  $d_\alpha$  χρησιμοποιούνται οι συνθήκες ορθογωνιότητας που ικανοποιούνται από τις λύσεις συστήματος ηρεμίας ( βλ. εξ. (2.91) )

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0})u^{(\beta)}(m, \vec{0}) &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0})v^{(\beta)}(m, \vec{0}) &= -\delta_{\alpha\beta}, \\ \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0})v^{(\beta)}(m, \vec{0}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Δεδομένου ότι αυτές οι σχέσεις περιλαμβάνουν βαθμωτά Lorentz,  $\bar{\psi}\psi$ , μπορεί να ζητηθεί να ικανοποιούνται και για  $u^{(\alpha)}(k)$  και  $v^{(\alpha)}(k)$ . Ας ξεκινήσει η διαδικασία με τους σπίνορες  $u$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= c_\alpha^*c_\beta\bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0})(\hat{k} + m)^2u^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= c_\alpha^*c_\beta\bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0})(2m^2 + 2m\hat{k})u^{(\beta)}(m, \vec{0}). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  και  $u^{\dagger(\alpha)}(m, \vec{0})$  είναι ιδιοκαταστάσεις του  $\gamma_0$  με ιδιοτιμή  $+1$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma^\mu u^{(\beta)}(m, \vec{0}) &= u^{\dagger(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0 u^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= u^{\dagger(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma_\mu u^{(\beta)}(m, \vec{0}), \end{aligned} \quad (2.96)$$

από όπου

$$\bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma^\mu u^{(\beta)}(m, \vec{0}) = g^{\mu 0}u^{\dagger(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma_0 u^{(\beta)}(m, \vec{0}) = g^{\mu 0}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.97)$$

δηλαδή

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = |c_\alpha|^2(2m^2 + 2mE)\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.98)$$

Τότε επιλέγεται

$$c_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E)}}, \quad E = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}. \quad (2.99)$$

Με ανάλογο τρόπο είναι

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= d_\alpha^*d_\beta\bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0})(-\hat{k} + m)^2v^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= d_\alpha^*d_\beta\bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0})(2m^2 - 2m\hat{k})v^{(\beta)}(m, \vec{0}) \end{aligned} \quad (2.100)$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  και  $v^{\dagger(\alpha)}(m, \vec{0})$  είναι ιδιοκαταστάσεις του  $\gamma_0$  με ιδιοτιμή  $-1$ , προκύπτει

$$\begin{aligned}\bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma^\mu v^{(\beta)}(m, \vec{0}) &= -v^{\dagger(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0 v^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= \bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma_\mu v^{(\beta)}(m, \vec{0}),\end{aligned}\quad (2.101)$$

που συνεπάγεται

$$\bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0})\gamma^\mu v^{(\beta)}(m, \vec{0}) = g^{\mu 0}\delta_{\alpha\beta}.\quad (2.102)$$

Άρα λαμβάνεται

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = -|d_\alpha|^2(2m^2 + 2mE)\delta_{\alpha\beta}\quad (2.103)$$

και τελικά

$$d_\alpha = c_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m(m+E)}}.\quad (2.104)$$

Οι κανονικοποιημένες λύσεις που έχουν ληφθεί είναι

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\hat{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}}u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \quad v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\hat{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}}v^{(\alpha)}(m, \vec{0}).\quad (2.105)$$

Σημειώνεται ότι οι θετικοί και αρνητικοί σπίνορες ενέργειας είναι ορθογώνιοι. Στη συνέχεια, θα είναι χρήσιμο να εκφραστούν οι λύσεις σε όρους με σπίνορες δύο συνιστωσών,  $\phi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  και  $\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$

$$u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \phi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}.\quad (2.106)$$

Από την μη πεπλεγμένη αναπαράσταση (2.19) των πινάκων  $\gamma^\mu$  προκύπτει

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} E & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E \end{pmatrix},\quad (2.107)$$

από όπου

$$u^{(\alpha)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m+E}{2m}}\phi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{2m(m+E)}}\phi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix},\quad (2.108)$$

$$v^{(\alpha)}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{k} \cdot \sigma}{\sqrt{2m(m+E)}}\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \sqrt{\frac{m+E}{2m}}\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}.\quad (2.109)$$

Στα επόμενα θα χρειασθεί η ρητή έκφραση για τους προβολείς των λύσεων θετικής και αρνητικής ενέργειας. Για το σκοπό αυτό, ως παρατηρηθεί ότι

$$\sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) = \frac{1 + \gamma_0}{2} \quad (2.110)$$

και ανάλογα

$$\sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \bar{v}^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = -\frac{1 - \gamma_0}{2}. \quad (2.111)$$

Χρησιμοποιώντας  $\gamma_0 \gamma_\mu = 2g_{\mu 0} - \gamma_\mu \gamma_0$  και  $k^2 = m^2$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} (\hat{k} + m) \gamma_0 (\hat{k} + m) &= (\hat{k} + m) (2E - \hat{k} \gamma_0 + m \gamma_0) \\ &= 2E(\hat{k} + m) + (\hat{k} + m)(-\hat{k} + m) \gamma_0 \\ &= 2E(\hat{k} + m). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Επομένως ο θετικός προβολέας ενέργειας δίδεται από

$$\begin{aligned} \Lambda_+(k) &= \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\hat{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} \frac{1 + \gamma_0}{2} \frac{\hat{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} \\ &= \frac{1}{2m(m+E)} \frac{(\hat{k} + m)^2 + 2E(\hat{k} + m)}{2} = \frac{\hat{k} + m}{2m}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει η έκφραση για τον αρνητικό προβολέα ενέργειας

$$\Lambda_-(k) = -\sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\hat{k} + m}{2m}. \quad (2.114)$$

Είναι τετριμένο να επαληθευθεί ότι οι πίνακες  $\Lambda_{\pm}(k)$  επαληθεύουν όλες τις ιδιότητες ενός πλήρους σύνολου τελεστών προβολής

$$\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = 0, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = 1. \quad (2.115)$$

Σε αυτή την κανονικοποίηση η πυκνότητα  $\psi^\dagger \psi$  έχει τις σωστές ιδιότητες μετασχηματισμού Lorentz

$$\begin{aligned} \psi_{(\alpha)}^{(+)\dagger}(x) \psi_{(\beta)}^{(+)}(x) &= \bar{u}^{(\alpha)}(k) \gamma_0 u^{(\beta)}(k) \\ &= \frac{1}{2m(m+E)} \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0}) (\hat{k} + m) \gamma_0 (\hat{k} + m) u^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= \frac{1}{2m(m+E)} 2E \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0}) (\hat{k} + m) u^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= \frac{2E(m+E)}{2m(m+E)} \delta_{\alpha\beta} = \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

όπου έχει γίνει χρήση της εξ. (2.112). Ως εκ τούτου η πυκνότητα για τις θετικές ενεργειακές λύσεις μετασχηματίζεται ως η τέταρτη συνιστώσα ενός τετραδιανύσματος. Το ίδιο ισχύει και για τις αρνητικές ενεργειακές λύσεις

$$\psi_{(\alpha)}^{(-)\dagger}(x)\psi_{(\beta)}^{(-)}(x) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.117)$$

Βρίσκεται επίσης ότι

$$u^{\dagger(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(\tilde{k}) = 0, \quad k^\mu = (E, \vec{k}), \quad \tilde{k}^\mu = (E, -\vec{k}). \quad (2.118)$$

Μάλιστα,

$$\begin{aligned} u^{\dagger(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(\tilde{k}) &= \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \frac{(\hat{k} + m)\gamma_0(-\hat{k} + m)}{2m(m + E)} v^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= \bar{u}^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \frac{(\hat{k} + m)(-\hat{k} + m)\gamma_0}{2m(m + E)} v^{(\beta)}(m, \vec{0}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Έπεται ότι λύσεις με αντίθετη ενέργεια και ίδιες 3-ορμές είναι ορθογώνιες

$$\begin{aligned} \psi^{(+)} &= e^{-i(Ex^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} u(k), \quad k^\mu = (E, \vec{k}), \\ \psi^{(-)} &= e^{+i(Ex^0 + \vec{k} \cdot \vec{x})} v(\tilde{k}), \quad \tilde{k}^\mu = (E, -\vec{k}). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Οι θετικές και οι αρνητικές ενεργειακές λύσεις είναι διπλά εκφυλισμένες. Είναι δυνατόν να αφαιρεθεί ο εκφυλισμός μέσω της κατασκευής προβολών για καταστάσεις με ορισμένη πόλωση. Ας εξετασθούν ξανά οι λύσεις στο σύστημα ηρεμίας. Ο γεννήτορας των περιστροφών κατά τον άξονα  $z$  δίδεται από

$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

Προφανώς οι  $u^{(1)}(m, \vec{0})$  και  $v^{(1)}(m, \vec{0})$  είναι ιδιοκαταστάσεις αυτού του τελεστή (και ως εκ τούτου της τρίτης συνιστώσας του σπινωριακού τελεστή) με ιδιοτιμές  $+1$ , ενώ οι  $u^{(2)}(m, \vec{0})$  και  $v^{(2)}(m, \vec{0})$  ανήκουν στην ιδιοτιμή  $-1$ . Ο προβολέας για τις ιδιοκαταστάσεις με ιδιοτιμές  $+1$  μπορεί να γραφθεί ως

$$\frac{1 + \sigma_{12}}{2} = \frac{1 + \sigma_{12}n_R^3}{2}, \quad (2.122)$$

όπου  $n_R^\mu = (0, 0, 0, 1)$  είναι μία μονάδα space-like τετραδιάνυσμα. Επιπλέον, έχω

$$\sigma_{12} = \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = i\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^0\gamma_5\gamma^3 = \gamma_5\gamma_3\gamma_0 \quad (2.123)$$



και

$$\sigma_{12}n_R^3 = \gamma_5 \hat{n}_R \gamma_0. \quad (2.124)$$

Η παρουσία του  $\gamma_0$  απαγορεύει μια απλή επέκταση αυτής της έκφρασης σε ένα γενικό σύστημα Lorentz. Μπορεί να αποφευχθεί αυτό, αλλάζοντας τον ορισμό της προβολής στο σύστημα ηρεμίας. Ας τεθεί

$$\Sigma(\pm n_R) = \frac{1 \pm \sigma_{12}n_R^3 \gamma_0}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \pm \sigma_3 & 0 \\ 0 & 1 \mp \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

Σε αυτή την περίπτωση τα  $\Sigma(n_R)$  και  $\Sigma(-n_R)$  προβάλλουν τα  $u^{(1)}(m, \vec{0})$ ,  $v^{(2)}(m, \vec{0})$  και  $u^{(2)}(m, \vec{0})$ ,  $v^{(1)}(m, \vec{0})$ , αντίστοιχα. Δηλαδή, το  $\Sigma(\pm n_R)$  προβάλλει τις θετικές ενεργειακές λύσεις με σπιν  $\pm 1/2$  και τις αρνητικές ενεργειακές λύσεις με σπιν  $\mp 1/2$ . Τότε, έχω

$$\Sigma(\pm n_R) = \frac{1 \pm \gamma_5 \hat{n}_R}{2}. \quad (2.126)$$

Στο σύστημα ηρεμίας  $n_R^2 = -1$ ,  $n_R \cdot k = 0$ . Μπορεί να πάει σε ένα γενικό σύστημα που διατηρεί αυτές τις συνθήκες

$$\Sigma(\pm n) = \frac{1 \pm \gamma_5 \hat{n}}{2}, \quad n^2 = -1, \quad n \cdot k = 0. \quad (2.127)$$

Ο προβολέας  $\Sigma(\pm n)$  προβάλλει τις ενεργειακά θετικές καταστάσεις ότι στο σύστημα ηρεμίας έχει μια πόλωση που δίδεται από το  $\vec{S} \cdot \vec{n} = \pm 1/2$  και οι αρνητικές καταστάσεις ενέργειας με πόλωση  $\vec{S} \cdot \vec{n} = \mp 1/2$ .

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος συμβολισμός

$$\begin{aligned} u(k_R, n_R) &= u^{(1)}(m, \vec{0}), \\ u(k_R, -n_R) &= u^{(2)}(m, \vec{0}), \\ v(k_R, -n_R) &= v^{(1)}(m, \vec{0}), \\ v(k_R, n_R) &= v^{(2)}(m, \vec{0}). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Αυτοί οι σπινορες ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\Sigma(\pm n_R)u(k_R, \pm n_R) = u(k_R, \pm n_R), \quad \Sigma(\pm n_R)v(k_R, \pm n_R) = v(k_R, \pm n_R) \quad (2.129)$$

και

$$\Sigma(\pm n_R)u(k_R, \mp n_R) = \Sigma(\pm n_R)v(k_R, \mp n_R) = 0. \quad (2.130)$$

Όλες αυτές οι σχέσεις γενικεύονται αμέσως σε ένα αυθαίρετο σύστημα αναφοράς (πάντα απαιτείται  $n^2 = -1$  και  $n \cdot k = 0$ )

$$\Sigma(\pm n)u(k, \pm n) = u(k, \pm n), \quad \Sigma(\pm n)v(k, \pm n) = v(k, \pm n), \quad (2.131)$$

$$\Sigma(\pm n)u(k, \mp n) = \Sigma(\pm n)v(k, \mp n) = 0. \quad (2.132)$$

Οι ιδιότητες των σπινωριακών προβολέων είναι

$$\Sigma(n) + \Sigma(-n) = 1, \quad \Sigma(\pm n)^2 = \Sigma(\pm n), \quad \Sigma(n)\Sigma(-n) = 0. \quad (2.133)$$

Ας επαληθευθεί η δεύτερη εξίσωση

$$\left(\frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2}\right)^2 = \frac{1 + (\gamma_5 \hat{n})^2 + 2\gamma_5 \hat{n}}{4} = \frac{2 + 2\gamma_5 \hat{n}}{4} = \Sigma(n), \quad (2.134)$$

όπου έχει γίνει χρήση της  $n^2 = -1$ . Με ανάλογο τρόπο

$$\Sigma(n)\Sigma(-n) = \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \frac{1 - \gamma_5 \hat{n}}{2} = \frac{1 - (\gamma_5 \hat{n})^2}{4} = 0. \quad (2.135)$$

## 2.5 Κυματοπακέτα και Λύσεις Αρνητικής Ενέργειας

Όπως έχει δειχθεί η εξίσωση Dirac οδηγεί σε θετική πυκνότητα πιθανότητας. Αυτό λύνει το πρόβλημα που υπάρχει στην υπόθεση Klein-Gordon. Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση Dirac δεν λύνει το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειακών λύσεων (και δεν πρέπει, όπως έχει δειχθεί από την σημασία τους για την μη τοπικότητα στη περίπτωση Klein-Gordon). Στην πραγματικότητα, η πληρότητα των σπινωριων περιλαμβάνει όλες τις λύσεις

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[ u^{(\alpha)}(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) - v^{(\alpha)}(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) \right] = \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = 1. \quad (2.136)$$

Στην περίπτωση της μη αλληλεπιδρούσας θεωρίας δεν υπάρχουν πιθανότητες μεταβάσεων μεταξύ θετικής και αρνητικής ενέργειας καταστάσεων, αλλά όταν η αλληλεπίδραση ενεργοποιηθεί μια τέτοια πιθανότητα δεν μπορεί να αποκλισθεί. Μάλιστα, αν επιχειρηθεί να εντοπισθεί ένα σωματίδιο Dirac εντός αποστάσεων τάξης  $1/m$  οι λύσεις αρνητικής ενέργειας δεν μπορούν να αγνοηθούν. Για να διευκρινισθεί αυτό το σημείο, ας εξετασθεί η εξέλιξη του χρόνου ενός κυματοπακέτου Gauss, με ανάθεση σε χρόνο  $t = 0$ ,

$$\psi(\vec{x}, 0) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2d^2}} w, \quad (2.137)$$

όπου  $w$  σταθεροποιημένος σπινωρας,  $w = (\phi, 0)$ , με  $w^\dagger w = 1$ . Όπως μπορεί να επαληθευθεί, το κυματοπακέτο ορθώς κανονικοποιείται σε ένα

$$\int d^3x \psi^\dagger \psi = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/2}} \int d^3x e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{d^2}} = 1. \quad (2.138)$$

Η λύση της εξίσωσης Dirac με αυτήν την συνοριακή συνθήκη επιτυγχάνεται με την επέκταση σε όλες τις λύσεις επίπεδων κυμάτων

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) = & \int d^3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right. \\ & \left. + d^*(k, \alpha) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (2.139)$$

και υπολογίζοντας τους συντελεστές επέκτασης  $b(k, \alpha)$  και  $d^*(k, \alpha)$ , απαιτώντας ότι η λύση συμπίπτει με την εξ. (2.137) στο χρόνο  $t = 0$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, 0) = & \int d^3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k) \right. \\ & \left. + d^*(\tilde{k}, \alpha) v^{(\alpha)}(\tilde{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2d^2}} w. \end{aligned} \quad (2.140)$$

όπου  $\tilde{k}^\mu = (E, -\vec{k})$ . Μετασχηματίζοντας κατά Fourier και τις δύο πλευρές αυτής της εξίσωσης προκύπτει

$$\begin{aligned} \int \psi(\vec{x}, 0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} &= \sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k) + d^*(\tilde{k}, \alpha) v^{(\alpha)}(\tilde{k}) \right] \\ &= \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} \int d^3x e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2d^2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} w \\ &= \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} (2\pi d^2)^{3/2} e^{-\frac{|\vec{k}|^2 d^2}{2}} w. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Από όπου

$$\sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ b(k, \alpha) u^{(\alpha)}(k) + d^*(\tilde{k}, \alpha) v^{(\alpha)}(\tilde{k}) \right] = \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\frac{|\vec{k}|^2 d^2}{2}} w. \quad (2.142)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας για τους σπίνορες βρίσκονται τα πλάτη

$$b(k, \alpha) = \sqrt{\frac{m}{E}} \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\frac{|\vec{k}|^2 d^2}{2}} u^{\dagger(\alpha)}(k) w, \quad (2.143)$$

$$d^*(\tilde{k}, \alpha) = \sqrt{\frac{m}{E}} \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\frac{|\vec{k}|^2 d^2}{2}} v^{\dagger(\alpha)}(\tilde{k}) w. \quad (2.144)$$

Εκφράζοντας τα  $u$  και  $v$  σε όρους σπινόρων δύο συνιστωσών ( βλ. εζ. (2.108) και (2.109) ) προκύπτει

$$b(k, \alpha) = \sqrt{\frac{m}{E}} \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\frac{|\vec{k}|^2 d^2}{2}} \sqrt{\frac{m+E}{2m}} \phi^{(\alpha)\dagger}(m, \vec{0}) \phi, \quad (2.145)$$

$$d^*(\tilde{k}, \alpha) = \sqrt{\frac{m}{E}} \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\frac{|\vec{k}|^2 d^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2m(m+E)}} \chi^{(\alpha)\dagger}(m, \vec{0}) \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \phi, \quad (2.146)$$

από όπου μπορεί να υπολογισθεί ο λόγος των πλατών αρνητικής ενέργειας προς των πλατών θετικής ενέργειας

$$\frac{d^*(\tilde{k}, \alpha)}{b(k, \alpha)} \approx \frac{|\vec{k}|}{m+E}. \quad (2.147)$$

Τα πλάτη (και για τα δύο πρόσημα της ενέργειας) συμβάλλουν μόνο αν  $|\vec{k}| \ll 1/d$  (λόγω του εκθετικού Gauss). Ας υποθεθεί ότι χρειάζεται να εντοπισθεί το σωματίδιο σε αποστάσεις μεγαλύτερες από  $1/m$ , δηλαδή απαιτείται  $d \gg 1/m$ . Δεδομένου ότι τα πλάτη αρνητικής ενεργειακής κατάστασης είναι σημαντικά μόνο για το  $|\vec{k}| > m \gg 1/d$ , η συμβολή τους καταθλίβεται από το εκθετικό Gauss. Από την άλλη πλευρά, αν προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε το σωματίδιο σε αποστάσεις  $d \approx 1/m$ , η συνεισφορά αρνητικών ενεργειακών καταστάσεων καθίσταται σημαντική για τις τιμές  $|\vec{k}|$  τάξης  $m$  ή της τάξης  $1/d$ , δηλαδή στην περιοχή της ορμής στην οποία τα αντίστοιχα πλάτη δεν είναι αμελητέα. Είναι φανερό λοιπόν ότι οι αρνητικές ενεργειακές λύσεις είναι απαραίτητες προκειμένου να συμβαδίζουν με την αρχή της αβεβαιότητας.

## 2.6 Ηλεκτρομαγνητική Αλληλεπίδραση ενός Σχετικιστικού Σημειακού (point-like) Σωματιδίου

Για να κατανοηθεί βαθύτερα η Φυσική της εξίσωσης Dirac, θα εισαχθεί τώρα η αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Προς το παρόν θα γίνει στο επίπεδο της κλασικής θεωρίας πεδίων. Αυτό θα επιτρέψει να συζητηθεί το σπιν του σωματιδίου Dirac και επίσης τις ιδιότητες των αντι-σωματιδίων. Για το σκοπό αυτό θα αρχισεί η μελέτη της αλληλεπίδρασης ενός σημειακού σωματιδίου

με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο σχετικιστικό φορμαλισμό. Από αυτή τη συζήτηση θα μπορέσει να αντληθεί μια συνταγή για την εισαγωγή της σύζευξης οποιουδήποτε φορτισμένου σωματιδίου στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αργότερα θα φανεί ότι αυτή η συνταγή είναι ισοδύναμη με την απαίτηση της αναλλοιώτητας βαθμίδας της θεωρίας.

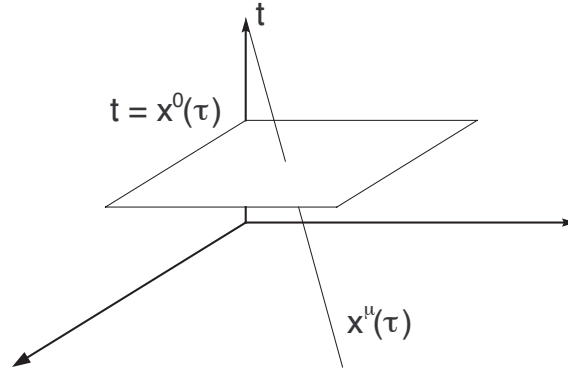
Υπενθυμίζεται ότι η κλασσική έκφραση για το ηλεκτρομαγνητικό τετραρεύμα δίδεται από

$$j^\mu = (\rho, \rho \vec{v}), \quad (2.148)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα φόρτισης και  $\vec{v}$  το πεδίο ταχύτητας. Ένα σωματίδιο που μοιάζει με ένα σημείο, ακολουθώντας μια δεδομένη κοσμική γραμμή (world line), μπορεί να περιγραφεί σε παραμετρική μορφή από τέσσερις συναρτήσεις  $x^\mu(\tau)$ , με  $\tau$  μια αυθαίρετη παράμετρο γραμμής. Η αντίστοιχη πυκνότητα φόρτισης κατά τη χρονική στιγμή  $t$  είναι εντοπισμένη στη θέση  $\vec{x}(\tau)$ , υπολογιζόμενη στην τιμή παραμέτρου  $\tau$  έτσι ώστε  $t = x^0(\tau)$  βλ. Σχ. 2.1). Επομένως

$$\rho(\vec{y}, t) = e \delta^3(\vec{y} - \vec{x}(\tau))|_{t=x^0(\tau)}. \quad (2.149)$$

Έπεται ότι



Σχήμα 2.1: Η χωροχρονική τροχιά ενός σημειακού (point-like) σωματιδίου.

$$j^\mu(y) = e \frac{dx^\mu}{dx^0} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}(\tau))|_{y^0=x^0(\tau)}. \quad (2.150)$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να τεθεί σε συναλλοίωτη μορφή χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση Υποθέτω ότι  $dx^0/d\tau > 0$  για να έχει σωστή παραμετροποίηση της τροχιάς.

$$\int d\tau f(\tau) \delta(y^0 - x^0(\tau)) = \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^{-1} f(\tau)|_{x^0(\tau)=y^0}. \quad (2.151)$$

Προκύπτει

$$j^\mu(y) = e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^4(y - x(\tau)). \quad (2.152)$$

Αυτό το τετραρεύμα διατηρείται:

$$\partial_\mu j^\mu(y) = -e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(y - x(\tau)) = 0 \quad (2.153)$$

Οι μόνες πιθανές συνεισφορές δύνανται να προέρχονται από τα τελικά σημεία  $x(\pm\infty)$ . Υπενθυμίζεται επίσης ότι οι εξισώσεις της κίνησης για ένα ελεύθερο σχετικιστικό βαθμωτό σωματίδιο μπορεί να προκύψει από την ακόλουθη δράση

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\dot{x}^2}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.154)$$

Θα ενδιαφέρει να εξαχθεί η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός φορτισμένου σωματιδίου και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (υποθέτω ότι το σωματίδιο έχει φορτίο  $e$ ). Θα πρέπει τώρα να μπορούν να εξαχθούν οι ακόλουθες εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (2.155)$$

Θα δειχθεί ότι η Λαγκρανζιανή εξαρτάται από το δυναμικό τετραδιάνυσμα  $A_\mu$  και όχι από τα πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ . Στην πραγματικότητα, θα επαληθευθεί ότι η ακόλουθη δράση αναπαράγει τις προηγούμενες εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} S &= -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\dot{x}^2} - \int d^4y A_\mu(y) j^\mu(y) \\ &= -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\dot{x}^2} - e \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau A_\mu(x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau). \end{aligned} \quad (2.156)$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -e \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} - e A_\mu \quad (2.157)$$

και τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0, \quad (2.158)$$

προκύπτει

$$-e \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu + m \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} + e \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu = 0. \quad (2.159)$$

Επομένως

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = e(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \dot{x}^\nu. \quad (2.160)$$

Δεδομένου ότι  $ds = d\tau \sqrt{\dot{x}^2}$ , όπου  $ds$  είναι το στοιχείο γραμμής που μετράται κατά μήκος της τροχιάς, φαίνεται ότι η τετραταχύτητα του σωματιδίου είναι

$$U^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}, \quad (2.161)$$

από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης σε συναλλοίωτη μορφή

$$m \frac{d}{ds} U_\mu = e F_{\mu\nu} U^\nu. \quad (2.162)$$

Εδώ έχει εισαχθεί ο τανυστής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.163)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ των δυναμικών και των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (2.164)$$

προκύπτει

$$\vec{E} = (F^{10}, F^{20}, F^{30}), \quad \vec{B} = (-F^{23}, -F^{31}, -F^{12}), \quad (2.165)$$

(δύναται επίσης να γραφθεί  $F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k$ ). Επιλέγοντας  $\tau = x^0$  στις εξ. κίνησης βρίσκεται ότι

$$m \frac{d}{dt} \frac{-v^k}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}} = e F_{k0} + e F_{ki} \frac{dx^i}{dt} = -e E^k - \epsilon_{kij} B^j v^i, \quad (2.166)$$

αναπαράγοντας τις εξ.(2.155).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να πεισθεί κανείς για την αναγκαιότητα της εμφάνισης των τετραδυναμικών μέσα στην Λαγκρανζιανή. Για παράδειγμα, ως εξετασθούν οι εξισώσεις Maxwell

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \quad \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.167)$$

όπου  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$  είναι ο τανυστής σύζευξης (dual tensor). Έχει δειχθεί πως μπορεί να εξαχθεί η έκφραση για την Λαγκρανζιανή πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις πεδίου με μια απειροελάχιστη μεταβολή των πεδίων. Στην πραγματικότητα, το να θεωρηθούν τα  $F_{\mu\nu}$  ως τα υπό μεταβολή πεδία, θα δημιουργούσε πρόβλημα διότι πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές των

εξισώσεων Maxwell με  $\delta F_{\mu\nu}$  δεν προκύπτει ένα βαθμωτό Lorentz. Αυτή η δυσκολία αποφεύγεται λαμβάνοντας τα  $A_\mu$  ως τους ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας (θαδειχθεί παρακάτω ότι και αυτή η άποψη έχει τις δικές της δυσκολίες). Σε αυτή την περίπτωση, λόγω του ορισμού (2.163) του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή, οι ομογενείς εξισώσεις Maxwell γίνονται ταυτότητες (στην πραγματικότητα, είναι απλώς η επίλυση αυτών των εξισώσεων που αρχικά εισάγονται τα διανυσματικά και τα βαθμωτά δυναμικά)

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho A^\sigma \implies \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.168)$$

ενώ οι ανομοιογενείς δημιουργούν

$$\partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \square A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = j_\nu. \quad (2.169)$$

Η προηγούμενη δυσκολία εξαφανίζεται επειδή και οι δύο πλευρές αυτής της εξίσωσης που πολλαπλασιάζονται με τα  $A_\mu$  είναι τα βαθμωτά Lorentz. Θεωρώντας το  $j_\mu$  ως δεδομένο εξωτερικό ρεύμα, ανεξάρτητο από τα  $A_\mu$ , δύναται τώρα να προκύψει εύκολα η έκφραση για την Λαγκρανζιανή. Με τον πολλαπλασιασμό των εξ. (2.169) με  $\delta A^\nu$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $d^4x$  προκύπτει

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^4x \delta A^\nu (\square A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu - j_\nu) \\ &= \int_V d^4x \left[ -\delta(\partial_\mu A_\nu) \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu (\delta A^\nu \partial^\mu A_\nu) \right. \\ &\quad \left. + \delta(\partial_\mu A_\nu) \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu (\delta A^\nu \partial_\nu A^\mu) - \delta(A^\mu j_\mu) \right] \\ &= \int_V d^4x \left[ -\frac{1}{2} \delta(\partial_\mu A_\nu) \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} \delta(\partial_\nu A_\mu) \partial^\nu A^\mu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta(\partial_\mu A_\nu) \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} \delta(\partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu - \delta(A^\mu j_\mu) \right] + \text{surface terms} \\ &= -\frac{1}{2} \int_V d^4x (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} - \int_V d^4x \delta(A^\mu j_\mu) + \text{surface terms} \\ &= \delta \left[ \int_V d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \right) \right] + \text{surface terms}. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Βλέπουμε ότι η δράση για ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που αλληλεπιδρά με ένα εξωτερικό ρεύμα  $j^\mu$  δίδεται από (εδώ  $F_{\mu\nu}$  πρέπει να θεωρηθεί ως συνάρτηση των  $A_\mu$ )

$$S = -\frac{1}{4} \int_V d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int_V d^4x j_\mu A^\mu. \quad (2.171)$$

Σημειώνεται ότι ο όρος αλληλεπίδρασης έχει την ίδια δομή που βρέθηκε για το σημειακό σωματίδιο.

Τονίζεται και πάλι ότι τα  $A_\mu$  είναι οι κανονικές μεταβλητές της ηλεκτροδυναμικής. Κατ' αρχήν, θα μπορούσε να γίνει επανεισαγωγή των πεδίων με



αναστροφή των σχέσεων μεταξύ πεδίων και δυναμικών. Ωστόσο, με αυτόν τον τρόπο, θα προέκυπτε μια μη-τοπική δράση. Ως εκ τούτου, δύναται να υποστηριχθεί ότι τα δυναμικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην κβαντική μηχανική, πολύ περισσότερο από ό,τι στην κλασική περίπτωση, όπου είναι ουσιαστικά ένα βολικό τέχνασμα. Υπενθυμίζεται επίσης ότι οι κανονικές μεταβλητές ικανοποιούν τις τοπικές μεταθετικές σχέσεις (ο μεταθέτης εξαφανίζεται σε space-like αποστάσεις), γεγονός που υποδηλώνει ότι τα τοπικά παρατηρήσιμα θα πρέπει να είναι τοπικές συναρτήσεις των δυνατοτήτων. Αυτό θα δημιουργήσει πρόβλημα επειδή η θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, ενώ τα δυναμικά δεν είναι

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (2.172)$$

(όπου  $\Lambda(x)$  είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση). Ως εκ τούτου, τα παρατηρήσιμα της θεωρίας πρέπει να είναι αναλλοίωτα κατά βαθμίδα που συνεπάγεται ότι τα δυναμικά δεν μπορούν να παρατηρηθούν. Ένα παράδειγμα ενός παρατηρήσιμου που είναι τόσο τοπικό στα δυναμικά όσο και αναλλοίωτο κατά βαθμίδα είναι ο τανυστής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου  $F_{\mu\nu}$ .

Το καθαρά ηλεκτρομαγνητικό μέρος της δράσης (2.171) είναι αφελώς αναλλοίωτο κατά βαθμίδα, που είναι συνάρτηση του  $F_{\mu\nu}$ . Όσον αφορά τον όρο αλληλεπίδρασης, είναι (υποθέτοντας ότι το ρεύμα είναι αναλλοίωτο κατά βαθμίδα)

$$j_\mu A^\mu \rightarrow j_\mu A^\mu + j_\mu \partial^\mu \Lambda = j_\mu A^\mu + \partial^\mu (j_\mu \Lambda) - (\partial^\mu j_\mu) \Lambda. \quad (2.173)$$

Η προσθήκη μιας τετραπόκλισης στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν αλλάζει τις εξισώσεις κίνησης

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \partial_\mu \chi^\mu = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \chi^0. \quad (2.174)$$

Επομένως η αναλλοίωτη της Λαγκρανζιανής κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας (αμελώντας μια τετραπόκλιση) είναι εγγυημένη, αν τα δυναμικά είναι συζευγμένα με ένα αναλλοίωτο κατά βαθμίδα και διατηρούμενο ρεύμα

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (2.175)$$

Έχει δειχθεί ότι αυτή η προϋπόθεση είναι πράγματι ικανοποιημένη για σημειακό σωματίδιο.

Προκειμένου να αντληθεί η γενική συνταγή για τη ζεύξη των ηλεκτρομαγνητικών δυναμικών σε ένα φορτισμένο σωματίδιο, ας μελετηθεί η δράση για σημειακό σωματίδιο. Αυτή η συνταγή είναι γνωστή ως ελάχιστη αντικατάσταση (**minimal substitution**). Επιλέγοντας  $x^0 = \tau$  στην Λαγκρανζιανή της εξ. (2.156), προκύπτει

$$L = -m\sqrt{1 - |\vec{v}|^2} - e(A^0 - \vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (2.176)$$

από όπου

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}} + e\vec{A}. \quad (2.177)$$

Η Χαμιλτονιανή αποκτάται μέσω του συνήθους μετασχηματισμού Legendre

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L = m \frac{|\vec{v}|^2}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}} + e\vec{v} \cdot \vec{A} + m\sqrt{1-|\vec{v}|^2} + e(A^0 - \vec{v} \cdot \vec{A}) \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}} + eA_0. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\vec{p} - e\vec{A} = m \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}, \quad H - eA^0 = \frac{m}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}, \quad (2.179)$$

όπου οι ποσότητες στις δεξίες πλευρές αυτών των δύο εξισώσεων είναι ίδιες με αυτές της ελεύθερης περίπτωσης. Από αυτό προκύπτει ότι δύναται μετάβαση από την ελεύθερη στην αλληλεπιδραστική περίπτωση, μέσω της απλής αντικατάστασης (ελάχιστη αντικατάσταση)

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu. \quad (2.180)$$

Στην ελεύθερη περίπτωση, αναστρέφοντας τις σχέσεις μεταξύ ορμών και ταχυτήτων

$$|\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{p}|^2}{m^2 + |\vec{p}|^2}, \quad 1 - |\vec{v}|^2 = \frac{m^2}{m^2 + |\vec{p}|^2}, \quad (2.181)$$

προκύπτει η Χαμιλτονιανή ως συνάρτηση των κανονικών ορμών

$$H_{\text{free}} = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}. \quad (2.182)$$

Με την ελάχιστη αντικατάσταση προκύπτει

$$H - eA^0 = \sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2}, \quad (2.183)$$

από όπου

$$H = eA^0 + \sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2}, \quad (2.184)$$

που δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εξ. (2.178), μετά την χρήση της εξ. (2.177). Από την άποψη της κανονικής κβάντωσης, η ελάχιστη αντικατάσταση αντιστοιχεί στην ακόλουθη αντικατάσταση στις παραγώγους χωροχρόνου

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + ieA^\mu. \quad (2.185)$$

## 2.7 Μη-σχετικιστικό Όριο της Εξίσωσης Dirac

Προκειμένου να κατανοηθεί βαθύτερα ο ρόλος του σπιν στην εξίσωση Dirac, θα μελετηθεί τώρα το μη-σχετικιστικό όριο με την παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0 \implies (i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi(x) = 0. \quad (2.186)$$

Παρατηρείται ότι η εξίσωση Dirac είναι αναλλοίωτη στο πλαίσιο του μετασχηματισμού (2.172)

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x), \quad (2.187)$$

αν, ταυτόχρονα, εκτελεσθεί ο ακόλουθος τοπικός μετασχηματισμός φάσης στη κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi(x). \quad (2.188)$$

Η εξ. (2.186) είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz αν, το σύστημα  $S$  πάει στο  $S'$  ( $x \rightarrow x' = \Lambda x$ ), το πεδίο  $A_\mu$  μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu(x). \quad (2.189)$$

Αυτό δείχνει ότι το  $A_\mu(x)$ , κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz συμπεριφέρεται ως  $\partial_\mu$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu. \quad (2.190)$$

Η εξ. (2.189) λέει απλά ότι το  $A_\mu$  μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Για να μελετηθεί το μη-σχετικιστικό όριο είναι προτιμότερο να γραφθεί το  $\psi(x)$  στην εξής μορφή

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.191)$$

όπου  $\tilde{\phi}(x)$  και  $\tilde{\chi}(x)$  είναι σπίνορες δύο συνιστωσών. Ορίζοντας

$$\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} \quad (2.192)$$

και χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση σε  $2 \times 2$  μπλοκ των πινάκων Dirac που δίδονται στην εξ. (2.11), προκύπτει, μετά τον πολλαπλασιασμό με  $\gamma_0$ ,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix} + eA^0 \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.193)$$

Αυτό δημιουργεί δύο συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\tilde{\chi} + (m + eA^0)\tilde{\phi}, \\
i\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\tilde{\phi} - (m - eA^0)\tilde{\chi}.
\end{aligned}
\tag{2.194}$$

Στο μη σχετικιστικό όριο και, για τα ασθενή πεδία, ο όρος μάζας είναι ο κυρίαρχος και η θετικής ενέργειας λύση συμπεριφέρονται περίπου ως  $e^{-imt}$ . Με αυτό το σκεπτικό τίθεται

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix},
\tag{2.195}$$

και υποτίθεται ότι οι  $\phi$  και  $\chi$  είναι συναρτήσεις που μεταβάλλονται αργά με το χρόνο. Με αυτόν τον τρόπο αποκτάται

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi + eA^0\phi, \\
i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\phi - (2m - eA^0)\chi.
\end{aligned}
\tag{2.196}$$

Υποθέτοντας  $eA^0 \ll 2m$ , και  $\partial\chi/\partial t \approx 0$  έχω

$$\chi \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}\phi,
\tag{2.197}$$

από όπου

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \phi.
\tag{2.198}$$

Πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή ο υπολογισμός του  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$ , επειδή οι συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{\pi}$  δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα,

$$[\pi^i, \pi^j] = [p^i - eA^i, p^j - eA^j] = ie\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - ie\frac{\partial A^i}{\partial x^j},
\tag{2.199}$$

όπου έχει γίνει χρήση του

$$[p^i, f(\vec{x})] = -i\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i}.
\tag{2.200}$$

Από την  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  έπεται ότι

$$[\pi^i, \pi^j] = ie\epsilon_{ijk}B^k
\tag{2.201}$$

και

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \sigma_i \sigma_j \pi^i \pi^j = \left( \frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j] + \frac{1}{2} [\sigma_i, \sigma_j]_+ \right) \pi^i \pi^j \\ &= |\vec{\pi}|^2 + \frac{1}{4} [\sigma_i, \sigma_j] [\pi^i, \pi^j] = |\vec{\pi}|^2 + \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k (ie) \epsilon_{ijl} B^l, \end{aligned} \quad (2.202)$$

δηλαδή

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = |\vec{\pi}|^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (2.203)$$

Η εξίσωση για το  $\phi$  γίνεται

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \phi. \quad (2.204)$$

Αυτό δεν είναι παρά η εξίσωση Pauli για ένα ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρώντας με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Πιο συγκεκριμένα, ο όρος που είναι ανάλογος προς το μαγνητικό πεδίο αντιπροσωπεύει την αλληλεπίδραση με ένα μαγνητικό δίπολο που δίδεται από

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = \frac{e}{m} \vec{S}, \quad (2.205)$$

όπου έχουν εισαχθεί οι πίνακες σπιν  $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ . Υπενθυμίζοντας ότι ο γυρομαγνητικός λόγος,  $g$ , για ένα σωματίδιο με σπιν  $\vec{S}$  και μαγνητική ροπή  $\vec{\mu}$  ορίζεται από την εξίσωση

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} g \vec{S}, \quad (2.206)$$

είναι φανερό ότι η εξίσωση Dirac προβλέπει γυρομαγνητικό λόγο ίσο με δύο. Μπορεί ναδειχθεί και αυτό με έναν ελαφρώς διαφορετικό τρόπο, λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση με ένα ασθενές ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο. Σε αυτή την περίπτωση το διανυσματικό δυναμικό δίδεται από την

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{x}. \quad (2.207)$$

Αμελώντας τον τετραγωνικό όρο στα πεδία

$$(\vec{p} - e\vec{A})^2 \approx |\vec{p}|^2 - e(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}). \quad (2.208)$$

Χρησιμοποιώντας

$$\sum_i [p^i, A^i] = -i \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (2.209)$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} (\vec{p} - e\vec{A})^2 &\approx |\vec{p}|^2 - 2e\vec{p} \cdot \vec{A} = |\vec{p}|^2 - e\vec{p} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{x}) \\ &= |\vec{p}|^2 - e p^i \epsilon_{ijk} B^j x^k = |\vec{p}|^2 - e \epsilon_{kij} x^k p^i B^j \\ &= |\vec{p}|^2 - e(\vec{x} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{B} = |\vec{p}|^2 - e\vec{L} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (2.210)$$

και τελικά

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[ \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \phi, \quad (2.211)$$

η οποία παρουσιάζει ρητά την τιμή του γυρομαγνητικού λόγου. Πειραματικά αυτό είναι πολύ κοντά στο δύο, και θα φανεί, στη συνέχεια, ότι η διαφορά εξηγείται από την κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED). Αυτό είναι, στην πραγματικότητα, ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα αυτής της θεωρίας. Ωστόσο, ως παρατηρηθεί ότι, από την άποψη της εξίσωσης Dirac, για να βρεθεί μια τιμή του γυρομαγνητικού λόγου τόσο κοντά στην πειραματική τιμή δεν είναι μια πραγματική πρόβλεψη. Στην πραγματικότητα, πρέπει να προστεθεί στη θεωρία και ένας περαιτέρω όρος αλληλεπίδρασης ανάλογος με  $F_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ . Αυτός ο όρος είναι τόσο Lorentz αναλλοίωτος όσο και κατά βαθμίδα αναλλοίωτος. Αυτός ο όρος θα δώσει μια περαιτέρω συμβολή στη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου, και ως εκ τούτου θα άλλαζε τον γυρομαγνητικό λόγο. Θα φανεί ότι η απαίτηση ότι η QED είναι επανακανονικοποιήσιμη<sup>2</sup> απαγορεύει, στην πραγματικότητα, την εμφάνιση ενός τέτοιου όρου.

## 2.8 Σύζευξη φορτίου, αντιστροφή χρόνου και μετασχηματισμοί PCT

Η εξίσωση Dirac είχε μεγάλη επιτυχία στην εξήγηση της λεπτής υφής του ατόμου του υδρογόνου, αλλά το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειακών λύσεων που καταρχήν καθιστούν τη θεωρία ασταθή, ήταν ακόμα εκεί. Ο Dirac έψαξε για λύση στο πρόβλημα αυτό εκμεταλλευόμενος την αρχή αποκλεισμού του Pauli, η οποία ισχύει σε σωματίδια ημι-ακέραιου σπιν. Ο Dirac έκανε την υπόθεση ότι όλες οι αρνητικές καταστάσεις ενέργειας καταλαμβάνονται από ηλεκτρόνια. Σε μια τέτοια κατάσταση, η αρχή του Pauli απαγορεύει σε οποιοδήποτε ηλεκτρόνιο με θετική ενέργεια να κάνει μια μετάβαση σε μια αρνητικής ενέργειας κατάσταση. Αυτό λύνει το πρόβλημα σταθερότητας, αλλά ταυτόχρονα νέα φαινόμενα υπονοούνται. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρόνιο σε μία αρνητική ενεργειακή κατάσταση θα μπορούσε να πάρει αρκετή ενέργεια (μεγαλύτερη από  $2m$  που είναι το ελάχιστο ενεργειακό χάσμα μεταξύ αρνητικών και θετικών ενεργειακών καταστάσεων) για να πραγματοποιήσει μια μετάβαση σε μια κατάσταση θετικής ενέργειας. Αν υποθεθεί ότι στην κατάσταση ενέργειας  $-E$  υπάρχουν  $N$  ηλεκτρόνια (προς απλοποίηση των πραγμάτων, διότι λόγω του εκφυλισμού της ορμής υπάρχει πραγματικά ένας άπειρος αριθμός από ηλεκτρόνια), και ότι ένα από αυτά τα ηλεκτρόνια υφίσταται μετάβαση, η ενέργεια της κατάστασης αλλάζει ως εξής

$$\mathcal{E} - NE \rightarrow \mathcal{E} - (N - 1)E = \mathcal{E} - NE + E, \quad (2.212)$$

<sup>2</sup>Επανακανονικοποιήσιμη σημαίνει ότι υπάρχει συνεπής διαδικασία για την εξάλειψη των απείρων που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό των όρων ανώτερης τάξης στη θεωρία διαταραχών (βλέπε αργότερα).

όπου  $E$  είναι η ενέργεια όλων των άλλων ηλεκτρονίων (με ενέργεια διαφορετική από την  $-E$ ) στη θεμελιώδη κατάσταση. Σημειώνεται ότι στη θεωρία Dirac η θεμελιώδης κατάσταση είναι εκείνη με όλες τις καταστάσεις αρνητικής ενέργειας κατειλημμένες και μηδέν ηλεκτρόνια στις θετικής ενέργειας καταστάσεις. Κατά μία έννοια, αυτή είναι η φυσική εξήγηση για την άπειρη ενέργεια του κενού που είναι γνωστή στην περίπτωση για το πεδίο Klein-Gordon, και θα βρεθεί και στην περίπτωση Dirac (βλ. παρακάτω). Με πλήρως ανάλογο τρόπο, και το φορτίο του κενού είναι άπειρο και η μεταβολή του στην προηγούμενη μετάβαση δίδεται από

$$Q + Ne \rightarrow Q + (N - 1)e = Q + Ne - e, \quad (2.213)$$

όπου  $e$  είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου ( $e < 0$ ). Φαίνεται ότι η ενέργεια κενού και ηλεκτρικού φορτίου αυξάνονται αντιστοίχως με  $E$  και  $-e$  στη μετάβαση. Μπορεί να ερμηνευθεί αυτό λέγοντας ότι η οπή που απομένει στο κενό από το ηλεκτρόνιο έχει φορτίο  $-e$  και ενέργεια  $E$ . Με άλλα λόγια, μπορεί να λογισθεί ότι η οπή είναι ένα σωματίδιο θετικής ενέργειας και θετικού φορτίου. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο επήλθε η ιδέα των αντι-σωματιδίων: η τρύπα θεωρείται ως το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου. Η μετάβαση ενός ηλεκτρονίου αρνητικής ενέργειας σε μια κατάσταση θετικής ενέργειας θεωρείται ως η δημιουργία ενός ζεύγους αντισωματιδίου-σωματιδίου (η οπή). Φυσικά, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν μια κατάλληλη ποσότητα ενέργειας (για παράδειγμα, ηλεκτρομαγνητική ενέργεια) απορροφάται από την ενεργειακά αρνητική κατάσταση. Με τον ίδιο τρόπο, όταν υπάρχει μια τρύπα στο κενό, μπορεί να συμβεί ότι αυτό το ηλεκτρόνιο θετικής ενέργειας κάνει μια μετάβαση στην συγκεκριμένη κατάσταση τρύπας. Σε αυτή την περίπτωση τόσο το ηλεκτρόνιο όσο και η οπή εξαφανίζονται. Αυτό είναι το φαινόμενο καταστροφής ζεύγους που συμβαίνει με απελευθέρωση ενέργειας.

Η θεωρία των οπών επανερμηνεύεται σήμερα από την άποψη των αντισωματιδίων, αλλά αυτός ο τρόπος σκέψης ήταν πολύ καρποφόρος σε πολλούς τομείς, όπως στη μελέτη των ηλεκτρονίων σε μέταλλα, στην πυρηνική φυσική και ούτω καθεξής.

Υποθέτοντας σοβαρά τη θεωρία οπών σημαίνει ότι η εξίσωση Dirac θα πρέπει να παραδεχθεί, πέρα από τις αντίστοιχες θετικές ενεργειακές λύσεις που αντιστοιχούν σε ένα ηλεκτρόνιο, άλλες θετικές ενεργειακές λύσεις με την ίδια μάζα του ηλεκτρονίου, αλλά με αντίθετο φορτίο. Για ναδειχθεί αυτό το σημείο με επίσημο τρόπο, αναζητείται ένας μετασχηματισμός της κυματοσυνάρτησης του ηλεκτρονίου,  $\psi(x)$ , στην κυματοσυνάρτηση αντιηλεκτρονίων (ποζιτρονίων)  $\psi^C(x)$ , έτσι ώστε αν το  $\psi$  ικανοποιεί την

$$(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi(x) = 0, \quad (2.214)$$

τότε η  $\psi^C$  ικανοποιεί την

$$(i\hat{\partial} + e\hat{A} - m)\psi^C(x) = 0. \quad (2.215)$$

η  $\psi^C$  λέγεται το συζευγμένο φορτίο της  $\psi$  και η λειτουργία που σχετίζεται με τις δύο κυματοσυναρτήσεις ονομάζεται **σύζευξη φορτίου (charge conjugation)**. Θα απαιτηθεί ο μετασχηματισμός να είναι τοπικός και τέτοιος ώστε η μετασχηματισμένη του αντισωματιδίου κυματοσυνάρτηση να δίδει πίσω, εκτός από έναν πιθανό παράγοντα φάσης, την κυματοσυνάρτηση ηλεκτρονίου. Για να δημιουργηθεί η  $\psi^C$  θα ξεκινήσει η διαδικασία παίρνοντας τον μιγαδικό συζυγή του  $\psi$ . Αυτός είναι σαφώς ο μόνος τρόπος αλλαγής μιας λύσης αρνητικής ενέργειας, που περιγράφεται από  $e^{iEt}$ , σε θετικά ενεργειακή λύση, που περιγράφεται από  $e^{-iEt}$ . Παίρνοντας τον ερμιτιανό συζυγή, πολλαπλασιάζοντας με  $\gamma_0$  (από τα δεξιά) και αναστρέφοντας, προκύπτει

$$\begin{aligned} (i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi(x) = 0 &\rightarrow -i\partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - e\bar{\psi} \hat{A} - m\bar{\psi} = 0 \\ &\rightarrow [\gamma^{\mu T}(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0, \end{aligned} \quad (2.216)$$

όπου

$$\bar{\psi}^T = \gamma_0^T \psi^*. \quad (2.217)$$

Αν υπάρχει ένας πίνακας  $C$ , τέτοιος ώστε

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu, \quad (2.218)$$

πολλαπλασιάζοντας την εξ. (2.216) με  $C$  προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα,

$$(i\hat{\partial} + e\hat{A} - m)C\bar{\psi}^T = 0. \quad (2.219)$$

Αυτό περιγράφει ένα σωματίδιο με φορτίο  $-e$ . Άρα, εκτός από ένα παράγοντα φάσης  $\eta_C$  μπορεί να ταυτισθεί η  $\psi^C$  με  $C\bar{\psi}^T$ :

$$\psi^C = \eta_C C\bar{\psi}^T. \quad (2.220)$$

Στην αναπαράσταση όπου ο  $\gamma_0$  είναι διαγώνιος έχω

$$\gamma_0^T = \gamma_0, \quad \gamma_1^T = -\gamma_1, \quad \gamma_2^T = \gamma_2, \quad \gamma_3^T = -\gamma_3. \quad (2.221)$$

Αρκεί να επιλεγεί  $C$  που μετατίθεται με τον  $\gamma_1$  και  $\gamma_3$  και να αντιμετατίθεται με τον  $\gamma_0$  και  $\gamma_2$ . Έπεται ότι το  $C$  πρέπει να είναι ανάλογο με τον  $\gamma_2\gamma_0$ . Ας επιλεγεί

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.222)$$

Με αυτόν τον τρόπο το  $C$  ικανοποιεί

$$-C = C^{-1} = C^T = C^\dagger. \quad (2.223)$$

Για να κατανοηθεί πως λειτουργεί ο μετασχηματισμός, ας μελετηθεί στο σύστημα ηρεμίας μια αρνητική ενεργειακή λύση με σπιν κάτω



$$\psi_{\text{down}}^{(-)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.224)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{down}}^{(-)C} &= \eta_C C \bar{\psi}_{\text{down}}^T = \eta_C C \gamma_0 \psi_{\text{down}}^{(-)*} = \eta_C i \gamma^2 \psi_{\text{down}}^{(-)*} \\ &= \eta_C e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.225)$$

και

$$\psi_{\text{down}}^{(-)C} = \eta_C e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \eta_C \psi_{\text{up}}^{(+)}. \quad (2.226)$$

Δηλαδή, δεδομένης μιας κυματοσυνάρτησης αρνητικής ενέργειας που περιγράφει ένα ηλεκτρόνιο με σπιν κάτω, το συζευγμένο φορτίο της είναι μια κυματοσυνάρτηση θετικής ενέργειας που περιγράφει ένα ποζιτρόνιο με σπιν προς τα πάνω. Για μια αυθαίρετη λύση με καθορισμένη ενέργεια και σπιν, χρησιμοποιώντας τους προβολείς της ενότητας 2.4, μπορεί να γραφθεί

$$\psi = \frac{\epsilon \hat{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi, \quad (2.227)$$

όπου το  $p_0 > 0$  και  $\epsilon = \pm 1$  επιλέγει το πρόσημο ενέργειας. Επειδή το  $C$  μετατίθεται με τα  $\gamma_5$ ,  $\gamma_5^* = \gamma_5$ , και

$$\gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0 = \gamma^{\mu T}, \quad (2.228)$$

όπως προκύπτει από

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu, \quad \gamma_0^T = \gamma_0, \quad (2.229)$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} \psi^C &= \eta_C C \gamma_0 \frac{\epsilon \hat{p}^* + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}^*}{2} \psi^* = \eta_C C \frac{\epsilon \hat{p}^T + m}{2m} \frac{1 - \gamma_5 \hat{n}^T}{2} \gamma^0 \psi^* \\ &= \frac{-\epsilon \hat{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi^C. \end{aligned} \quad (2.230)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι το  $\psi^C$  περιγράφεται από τα ίδια τετραδιανύσματα  $p^\mu$  και  $n^\mu$  που εμφανίζονται στο  $\psi$ , αλλά με αντίθετο πρόσημο ενέργειας. Έπειτα

$$u(p, n) = \eta_C v^C(p, n), \quad v(p, n) = \eta_C u^C(p, n). \quad (2.231)$$

Εφόσον ο προβολέας του σπιν επιλέγει τις καταστάσεις του σπιν  $\pm 1/2$  κατά μήκος του  $\vec{n}$  σύμφωνα με το πρόσημο της ενέργειας, προκύπτει ότι η σύζευξη φορτίου αντιστρέφει την προβολή του σπιν του σωματιδίου. Παρατηρείται επίσης ότι, αφού είναι το  $\psi^C$  μία λύση της εξίσωση Dirac με  $e \rightarrow -e$ , ο μετασχηματισμός

$$\psi \rightarrow \psi^C, \quad A_\mu \rightarrow -A_\mu \quad (2.232)$$

είναι συμμετρία της εξίσωσης Dirac. Επειδή σε αυτόν τον μετασχηματισμό αλλάζει το πρόσημο στο τετραδυναμικό, λέγεται ότι το φωτόνιο έχει σύζευξη φορτίου  $-1$ .

Ένας άλλος διακριτός μετασχηματισμός που θα εξετασθεί εδώ είναι η αντιστροφή χρόνου (time reversal). Η φυσική σημασία αυτού του μετασχηματισμού μπορεί να απεικονισθεί από την άποψη μιας ταινίας που κατέγραψε όλες τις παρατηρήσεις σχετικά με την κατάσταση που περιγράφεται από τη κυματοσυνάρτηση  $\psi(x)$ . Αν τρέξει η ταινία προς τα πίσω και γίνει μια σειρά από παρατηρήσεις που είναι φυσικά συνεπείς, λέγεται τότε ότι η θεωρία είναι αναλλοίωτη υπό την αναστροφή του χρόνου. Από μαθηματική άποψη αυτή είναι μια συμμετρία αν, στέλνοντας  $t \rightarrow t' = -t$ , είναι δυνατός ο μετασχηματισμός της κυματοσυνάρτησης έτσι ώστε να ικανοποιεί την αρχική εξίσωση Dirac. Αν αυτό συμβαίνει, η μετασχηματισμένη κυματοσυνάρτηση περιγράφει ένα ηλεκτρόνιο πολλαπλασιαζόμενη προς τα πίσω στο χρόνο. Για να δημιουργηθεί ρητά ο μετασχηματισμός αντιστροφής χρόνου, ας θεωρηθεί το ηλεκτρόνιο στην αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Είναι βολικό να γραφθεί η εξίσωση Dirac σε Χαμιλτονιανή μορφή ( βλ. εξ. (2.6) )

$$i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = H \psi(\vec{x}, t), \quad (2.233)$$

με

$$H = eA^0 + \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) + \gamma^0 m. \quad (2.234)$$

Ας ορισθεί ο μετασχηματισμός αυτός μέσω της ακόλουθης εξίσωσης

$$\psi'(\vec{x}, t') = \eta_T K \psi(\vec{x}, t), \quad t' = -t, \quad (2.235)$$

όπου  $\eta_T$  είναι ένας παράγοντας φάσης, Από την εξ. (2.233), παραλείποντας το χωρικό όρισμα

$$i \frac{\partial}{\partial t} K^{-1} \psi'(t') = H K^{-1} \psi'(t'). \quad (2.236)$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την εξίσωση με  $K$  προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t'} K(-i) K^{-1} \psi'(t') = K H K^{-1} \psi'(t'). \quad (2.237)$$

Η αναλλοιότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους

$$K(-i) K^{-1} = i; \quad K H K^{-1} = H, \quad (2.238)$$

ή

$$K(-i)K^{-1} = -i; \quad KHK^{-1} = -H. \quad (2.239)$$

Η δεύτερη δυνατότητα μπορεί να αποκλειστεί αμέσως, δεδομένου ότι κάτω από χρονική αντιστροφή, έχω

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla}, \quad \vec{A} \rightarrow -\vec{A}, \quad A^0 \rightarrow A^0. \quad (2.240)$$

Αφού έπεται, υπενθυμίζοντας ότι το διάνυσμα του δυναμικού παράγεται από μια κατανομή ρευμάτων (αλλαγή προσήμου υπό την αναστροφή χρόνου), ενώ το βαθμωτό δυναμικό δημιουργείται από μια κατανομή φορτίων. Έπειτα, ορίζεται το  $K$  ως ένας πίνακας  $4 \times 4$ ,  $T$  φορές τη λειτουργία μιγαδικής σύζευξης

$$K = T \times (\text{complex conjugation}). \quad (2.241)$$

Από την εξ. (2.237) προκύπτει

$$i \frac{\partial}{\partial t'} \psi'(t') = TH^*T^{-1} \psi'(t'). \quad (2.242)$$

Η θεωρία είναι αναλλοίωτη αν

$$TH^*T^{-1} = H. \quad (2.243)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες μετασχηματισμού των δυναμικών, προκύπτει

$$TH^*T^{-1} = T(eA'_0 + (\gamma_0 \vec{\gamma})^* \cdot (i\vec{\nabla} + e\vec{A}') + \gamma_0^* m)T^{-1}. \quad (2.244)$$

Δεδομένου ότι το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι η αναπαράγωγή του  $H$ , χρειάζεται-ται ένας πίνακας  $T$  τέτοιος ώστε

$$T\gamma_0(\vec{\gamma})^*T^{-1} = -\gamma_0\vec{\gamma}, \quad T\gamma_0T^{-1} = \gamma_0, \quad (2.245)$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι ιδιότητες πραγματικού μέρους του  $\gamma_0$ . Συμπερασματικά, το  $T$  πρέπει να μετατίθεται με το  $\gamma_0$  και να ικανοποιεί

$$T\vec{\gamma}^*T^{-1} = -\vec{\gamma}. \quad (2.246)$$

Στην αναπαράσταση αυτή, οι πίνακες  $\gamma^1$  και  $\gamma^3$  είναι πραγματικοί, ενώ ο  $\gamma^2$  είναι καθαρά φανταστικός. Επομένως

$$T\gamma^0T^{-1} = \gamma^0, \quad T\gamma^1T^{-1} = -\gamma^1, \quad T\gamma^2T^{-1} = \gamma^2, \quad T\gamma^3T^{-1} = -\gamma^3. \quad (2.247)$$

Επιλέγοντας τη φάση, τίθεται

$$T = i\gamma^1\gamma^3. \quad (2.248)$$

Με αυτή την επιλογή του  $T$  ικανοποιεί

$$T^\dagger = T, \quad T^2 = 1. \quad (2.249)$$

Για να κατανοηθεί η αντιστοιχία με τα κλασικά αποτελέσματα, όπου η ορμή και η στροφορμή αλλάζουν πρόσημο υπό την χρονική αναστροφή, ας μελετηθεί πως μεταβάλλεται μια θετικά ενεργειακή λύση:

$$\begin{aligned} K \left[ \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi(t) \right] &= T \left[ \frac{\hat{p}^* + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}^*}{2} \right] \psi^*(t) \\ &= T \left[ \frac{\hat{p}^* + m}{2m} \right] T^{-1} T \left[ \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}^*}{2} \right] T^{-1} T \psi^*(t) \\ &= \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi'(t'), \end{aligned} \quad (2.250)$$

όπου ξανά  $t' = -t$ , και

$$\tilde{p} = (p^0, -\vec{p}), \quad \tilde{n} = (n^0, -\vec{n}). \quad (2.251)$$

Οι τρεις διακριτές λειτουργίες συμμετρίας που περιγράφονται μέχρι τώρα, η ισοτιμία,  $P$ , η σύζευξη φορτίου,  $C$  και η αντιστροφή χρόνου ( $T$ ), μπορούν να συνδυαστούν σε έναν μετασχηματισμό συμμετρίας που ονομάζεται  $PCT$ . Παραλείποντας όλες τις φάσεις και υπενθυμίζοντας ότι οι πίνακες  $P$ ,  $C$  και  $T$  ορίζονται αντιστοίχως στις εξισώσεις (2.61), (2.222) και (2.241)

$$\begin{aligned} \psi_{PCT}(-x) &= PC[\overline{K\psi(x)}]^T = PC\gamma_0(K\psi(x))^* = i\gamma^0\gamma^2(-i\gamma^{1*}\gamma^{3*})\psi(x) \\ &= i\gamma_5\psi(x) \end{aligned} \quad (2.252)$$

και προτείνει μια απλή αντιστοιχία μεταξύ της κυματοσυνάρτησης ενός πο-ζιτρονίου που κινείται προς τα πίσω στο χρόνο ( $\psi_{PCT}(-x)$ ) και της κυματοσυνάρτησης ηλεκτρονίων. Για ένα ελεύθερο σωματίδιο αρνητικής ενέργειας, έχω

$$\begin{aligned} \psi_{PCT}(-x) &= i\gamma_5 \frac{-\hat{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi(x) \\ &= \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{1 - \gamma_5 \hat{n}}{2} (i\gamma_5\psi(x)) \\ &= \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{1 - \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi_{PCT}(-x). \end{aligned} \quad (2.253)$$

Σύγκριση με την εξ. (2.230), δίδει το φορτίο συζευγμένο μίας κατάστασης αρνητικής ενέργειας

$$\psi^C = \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \hat{n}}{2} \psi^C, \quad (2.254)$$

φαίνεται λοιπόν ότι οι δύο εκφράσεις διαφέρουν μόνο στην κατεύθυνση του σπιν. Παρόμοιο συμπέρασμα μπορεί να επιτευχθεί ξεκινώντας από την εξίσωση Dirac πολλαπλασιασμένη με  $i\gamma_5$ . Προκύπτει ( $x' = -x$ , και  $A'(x') = A(x)$ )

$$\begin{aligned} i\gamma_5(i\hat{\partial}_x - e\hat{A}(x) - m)\psi(x) &= (-i\hat{\partial}_x + e\hat{A}(x) - m)\psi_{PCT}(x') \\ &= (i\hat{\partial}_{x'} + e\hat{A}(x') - m)\psi_{PCT}(x'), \end{aligned} \quad (2.255)$$

δείχνοντας ότι ένα ποζιτρόνιο που κινείται προς τα πίσω με το χρόνο ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται προς τα εμπρός. Η εξ. (2.255) λέει ότι ο μετασχηματισμός  $PCT$  πάνω στο  $\psi$ , σε συνδυασμό με τον μετασχηματισμό  $PCT$  στο τετραδιάνυσμα του δυναμικού, δηλαδή  $A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(-x)$ , είναι μια συμμετρία της θεωρίας.

Η ερμηνεία των ποζιτρονίων ως αρνητικά ενεργειακά ηλεκτρόνια με κίνηση προς τα πίσω στο χρόνο είναι η βάση της θεωρίας των ποζιτρονίων από τους Ernst Stueckelberg & Richard Feynman. Στην προσέγγιση αυτή είναι δυνατόν να διαμορφωθεί η θεωρία σκέδασης χωρίς τη χρήση θεωρίας πεδίου. Στην πραγματικότητα, οι διαδικασίες δημιουργίας ζευγαριών και καταστροφής των ζευγαριών μπορούν να ερμηνευθούν εκ νέου ως προς τις διαδικασίες σκέδασης μεταξύ των ηλεκτρονίων που κινούνται προς τα εμπρός και προς τα πίσω με το χρόνο.

## 2.9 Η Κβάντωση του Πεδίου Dirac

Σε αυτή την ενότητα εγκαταλείπεται η μελέτη της εξίσωσης κύματος Dirac που θεωρείται ως γενίκευση της εξίσωσης Schrödinger, από τις δυσκολίες αντιμετώπισης σωματιδίων πολλών καταστάσεων. Θα υιοθετηθεί εδώ η οπτική γωνία της κβαντικής θεωρίας πεδίου (ΚΘΠ). Δηλαδή η σχετικιστική εξίσωση θα ερμηνευθεί εκ νέου ως μια εξίσωση για ένα πεδίο με τιμές-τελεστές. Στην περίπτωση Klein-Gordon ως γνωστό, μετά την κβάντωση, προκύπτει ένα σύστημα πολλών σωματιδίων που ικανοποιεί την Στατιστική των Bose-Einstein. Από την άλλη πλευρά, έχει επίσηςδειχθεί ότι η εξίσωση Dirac περιγράφει σωματίδια με σπιν  $1/2$ , όπου πρέπει να ικανοποιείται η Στατιστική των Fermi-Dirac. Ως εκ τούτου, αναμένεται να αντιμετωπισθούν προβλήματα αν επιχειρηθεί η κβάντωση του πεδίου Dirac όπως γίνεται για την περίπτωση Klein-Gordon. Για να δειχθεί πως συμβαίνουν αυτά τα προβλήματα, θα ακολουθηθεί ο κλασικός τρόπος κβάντωσης, δείχνοντας ότι αυτό οδηγεί σε προβλήματα με τη θετικότητα της ενέργειας. Ψάχνοντας για λύση θα βρεθεί επίσης ο τρόπος επίλυσης του λανθασμένου στατιστικού προβλήματος.

Η μελέτη θα ξεκινήσει αναζητώντας τη δράση που προκάλεσε την εξίσωση Dirac. Θα ληφθούν οι ποσότητες  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  ως ανεξάρτητες. Ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία, πολλαπλασιάζεται η εξίσωση Dirac με  $\delta\bar{\psi}$  (με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματισθεί ένα βαθμωτό Lorentz) και ολοκληρώνεται πάνω

στον χωροχρονικό όγκο  $V$

$$0 = \int_V d^4x \delta\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi = \delta \int_V d^4x \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi, \quad (2.256)$$

όπου έχει υποθεθεί ότι το  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην συνέχεια, θα υποθεθεί η εξής δράση

$$S = \int_V d^4x \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi. \quad (2.257)$$

Επαληθεύεται ότι αυτή η δράση προκαλεί την ορθή εξίσωση κίνησης για το  $\bar{\psi}$ . Μάλιστα,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = -m\bar{\psi}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu, \quad (2.258)$$

από όπου

$$-m\bar{\psi} - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = 0. \quad (2.259)$$

Οι κανονικές ορμές γίνονται

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger, \quad \Pi_{\psi^\dagger} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger} = 0. \quad (2.260)$$

Οι κανονικές ορμές δεν εξαρτώνται από τις ταχύτητες. Κατ'άρχην, αυτό δημιουργεί ένα πρόβλημα για τον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Στην πραγματικότητα μια αυστηρή προσέγγιση απαιτεί επέκταση της κλασσικής Χαμιλτονιανής προσέγγισης, η οποία έγινε από τον ίδιο τον Dirac. Σε αυτή την συγκεκριμένη περίπτωση, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το ίδιο όπως προχωρώντας με έναν αφελή τρόπο. Για το λόγο αυτό θα αποφευχθεί η περιγραφή αυτής της επέκτασης και θα συνεχισθεί αυτή όπως στην τυποποιημένη περίπτωση. Τότε, η Χαμιλτονιανή πυκνότητα αποδεικνύεται ότι είναι

$$\mathcal{H} = \Pi_\psi\dot{\psi} - \mathcal{L} = i\psi^\dagger\dot{\psi} - \bar{\psi}(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - m)\psi = \psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi. \quad (2.261)$$

Αν γίνει χρήση της εξίσωσης Dirac, είναι δυνατόν να γραφθεί η Χαμιλτονιανή πυκνότητα ως

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger i \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.262)$$

Αντίθετα με την περίπτωση Klein-Gordon «Klein Gordon Hamiltonian density», η Χαμιλτονιανή πυκνότητα δεν είναι θετικά ορισμένη. Υπενθυμίζεται η γενική έκφραση για τον ταυοστή ορμής ενέργειας

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i}\phi_{,\nu}^i - g_\nu^\mu\mathcal{L}. \quad (2.263)$$

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει

$$T_\nu^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_{,\nu} - g_\nu^\mu(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi) \quad (2.264)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Dirac

$$T_\nu^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_{,\nu}, \quad (2.265)$$

μπορεί άμεσα να επαληθευθεί ότι αυτή η έκφραση έχει μηδενική ή εξαφανιζόμενη τετραπόκλιση. Επιπλέον,

$$T_k^0 = i\psi^\dagger\partial_k\psi, \quad (2.266)$$

από όπου προκύπτει η ορμή του πεδίου

$$P^k = \int d^3x T^{0k} \implies \vec{P} = -i \int d^3x \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi. \quad (2.267)$$

Ας μελετηθεί τώρα η πυκνότητα στροφορμής

$$\mathcal{M}_{\rho\nu}^\mu = x_\rho T_\nu^\mu - x_\nu T_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^i} \Sigma_{\rho\nu}^{ij} \phi^j. \quad (2.268)$$

Οι πίνακες  $\Sigma_{\mu\nu}^{ij}$  ορίζονται σε όρους των ιδιοτήτων μετασχηματισμού του πεδίου

$$\Delta\phi^i = -\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}^{ij}\epsilon^{\mu\nu}\phi^j. \quad (2.269)$$

Από την εξ. (2.30) και εξ. (2.41) για έναν απειροελάχιστο μετασχηματισμό Lorentz, προκύπτει

$$\Delta\psi(x) = \psi'(x') - \psi(x) = [S(\Lambda) - 1]\psi(x) \approx -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\psi(x), \quad (2.270)$$

που δίδει

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (2.271)$$

Το αποτέλεσμα είναι τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\rho\nu}^\mu &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \left( x_\rho\partial_\nu - x_\nu\partial_\rho - \frac{i}{2}\sigma_{\rho\nu} \right) \psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \left( x_\rho\partial_\nu - x_\nu\partial_\rho + \frac{1}{4}[\gamma_\rho, \gamma_\nu] \right) \psi. \end{aligned} \quad (2.272)$$

Λαμβάνοντας τις χωρικές συνιστώσες, προκύπτει

$$\vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) = \int d^3x \psi^\dagger \left( -i\vec{x} \wedge \vec{\nabla} + \frac{1}{2}\vec{\sigma} \otimes 1_2 \right) \psi, \quad (2.273)$$

όπου  $1_2$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας σε 2 διαστάσεις και χρησιμοποιώντας την εξ. (2.59) έχει ορισθεί ότι

$$\vec{\sigma} \otimes 1_2 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.274)$$

Η έκφραση του  $\vec{J}$  δείχνει την αποσύνθεση της ολικής στροφορμής στην τροχιά και στο σπιν. Η θεωρία έχει μια περαιτέρω διατηρημένη ποσότητα, το ρεύμα  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ .

Θα χρειασθεί η αποσύνθεση του πεδίου Dirac σε επίπεδα κύματα. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι σπίνορες  $u(p, \pm n)$  και  $v(p, \pm n)$  που έχουν ορισθεί στο τέλος της ενότητας 2.4. Η επέκταση είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιείται στην εξ. (2.139), αλλά με συντελεστές τελεστές,  $b$  και  $d$ .

$$\psi(x) = \sum_{\pm n} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left[ b(p, n)u(p, n)e^{-ipx} + d^\dagger(p, n)v(p, n)e^{ipx} \right], \quad (2.275)$$

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x) = & \sum_{\pm n} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [d(p, n)\bar{v}(p, n)e^{-ipx} \\ & + b^\dagger(p, n)\bar{u}(p, n)e^{ipx}] \gamma_0, \end{aligned} \quad (2.276)$$

όπου  $E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ . Για ευκολία θα συγκεντρωθούν εδώ οι κύριες ιδιότητες των σπίνορων:

- Εξίσωση Dirac

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)u(p, n) &= \bar{u}(p, n)(\hat{p} - m) = 0, \\ (\hat{p} + m)v(p, n) &= \bar{v}(p, n)(\hat{p} + m) = 0. \end{aligned} \quad (2.277)$$

- Ορθογωνιότητα

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, n)u(p, n') &= -\bar{v}(p, n)v(p, n') = \delta_{nn'}, \\ u^\dagger(p, n)u(p, n') &= v^\dagger(p, n)v(p, n') = \frac{E_p}{m}\delta_{nn'}, \\ \bar{v}(p, n)u(p, n') &= v^\dagger(p, n)u(\vec{p}, n') = 0, \end{aligned} \quad (2.278)$$

όπου, αν  $p^\mu = (E_p, \vec{p})$ , τότε  $\tilde{p}^\mu = (E_p, -\vec{p})$ .

- Πληρότητα

$$\begin{aligned} \sum_{\pm n} u(p, n)\bar{u}(p, n) &= \frac{\hat{p} + m}{2m}, \\ \sum_{\pm n} v(p, n)\bar{v}(p, n) &= \frac{\hat{p} - m}{2m}. \end{aligned} \quad (2.279)$$



Είναι δυνατόν τώρα να εκφρασθεί η Χαμιλτονιανή σε όρους των τελεστών  $b(p, n)$  και  $d(p, n)$ . Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.262) και ολοκληρώνοντας πάνω στις συντεταγμένες διαστήματος, προκύπτει

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{\pm n, \pm n'} \int d^3p d^3p' \frac{E_{p'} m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \\
& \times \left[ d(p, n) b(\vec{p}, n') e^{-i(E_p + E_{p'})t} v^\dagger(p, n) u(\vec{p}, n') \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \right. \\
& + b^\dagger(p, n) b(p, n') e^{+i(E_p - E_{p'})t} u^\dagger(p, n) u(p, n') \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\
& - d(p, n) d^\dagger(p, n') e^{-i(E_p - E_{p'})t} v^\dagger(p, n) v(p, n') \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\
& - b^\dagger(p, n) d(\vec{p}, n') e^{+i(E_p + E_{p'})t} \\
& \left. \times u^\dagger(p, n) v(\vec{p}, n') \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \right]. \quad (2.280)
\end{aligned}$$

Εκτελώντας μία από τις αλληλεπιδράσεις ορμής και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας, προκύπτει

$$H = \sum_{\pm n} \int d^3p E_p [b^\dagger(p, n) b(p, n) - d(p, n) d^\dagger(p, n)]. \quad (2.281)$$

Όμοια, προκύπτει

$$\vec{P} = \sum_{\pm n} \int d^3p \vec{p} [b^\dagger(p, n) b(p, n) - d(p, n) d^\dagger(p, n)]. \quad (2.282)$$

Αν ερμηνευθούν αυτές οι εκφράσεις όπως στην περίπτωση Klein-Gordon, θα υποθεθεί ότι το διάνυσμα  $d(p, n)$  δημιουργεί από το κενό μια κατάσταση ενέργειας  $-E_p$  και ορμή  $-\vec{p}$ . Ο Dirac προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα, υποθέτοντας ότι το κενό γεμίστηκε από τις αρνητικές ενεργειακές λύσεις. Λόγω της αρχής του Pauli, αυτό θα καθιστούσε αδύνατη τη δημιουργία οποιασδήποτε άλλης αρνητικής ενεργειακής κατάστασης. Ας είναι το κενό γεμάτο από τις αρνητικές ενεργειακές λύσεις το κενό Dirac (**Dirac vacuum**). Έπειτα ο τελεστής  $d(p, n)$  πρέπει να δώσει μηδέν όταν ενεργεί σε αυτή την κατάσταση. Στη συνέχεια ορίζεται ως αληθινό κενό της θεωρίας το κενό Dirac και απαιτείται

$$d(p, n)|0\rangle_{\text{Dirac}} = 0. \quad (2.283)$$

Δηλαδή, στο κενό Dirac, ο τελεστής  $d(p, n)$  συμπεριφέρεται ως τελεστής καταστροφής, όπως αναμενόταν. Δεδομένου ότι το κενό Dirac αποκτάται εφαρμόζοντας στο αρχικό κενό ένα σύνολο τελεστών  $d(p, n)$ , με όλες τα πιθανά  $p_\mu$  και  $n_\mu$ , η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να ικανοποιηθεί υποθέτοντας την αλγεβρική ταυτότητα

$$(d(p, n))^2 = 0. \quad (2.284)$$

Μπορεί να ικανοποιηθεί αυτή η σχέση με ένα ομοιόμορφο αλγεβρικό τρόπο απαιτώντας από τους τελεστές  $d(p, n)$  να αντιμετατίθονται μεταξύ τους

$$[d(p, n), d(p', n')]_+ = 0. \quad (2.285)$$

Αυτό οδηγεί (Ernst Pascual Jordan) στην ιδέα της κβάντωσης του πεδίου Dirac σε όρους με αντιμεταθέτες

$$[b(p, n), b^\dagger(p', n')]_+ = [d(p, n), d^\dagger(p', n')]_+ = \delta_{nn'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.286)$$

Το πρόβλημα της θετικότητας τότε επιλύεται αυτόματα, αφού ο τελεστής τετραορμής μπορεί να γραφθεί ως

$$P^\mu = \sum_{\pm n} \int d^3p p^\mu \left[ b^\dagger(p, n)b(p, n) + d^\dagger(p, n)d(p, n) - [d(p, n), d^\dagger(p, n)]_+ \right]. \quad (2.287)$$

Λόγω των σχέσεων αντιμετάθεσης, ο τελευταίος όρος είναι μια άπειρη αρνητική σταθερά που φυσικά μπορεί να συσχετισθεί με την ενέργεια των άπειρων ηλεκτρονίων που γεμίζουν το κενό Dirac (που ονομάζεται επίσης θάλασσα του Dirac (Dirac sea). Αν αγνοηθεί αυτή η σταθερά (όπως στην περίπτωση Klein-Gordon), ο ενεργειακός τελεστής είναι θετικά ορισμένος. Η χρήση των αντιμεταθετών λύνει επίσης το πρόβλημα της λανθασμένης Στατιστικής. Στην πραγματικότητα, οι κυματοσυναρτήσεις είναι πλέον αντισυμμετρικές για την ανταλλαγή δύο σωματιδίων Dirac(από εδώ και πέρα θα τεθεί  $|0\rangle_{\text{Dirac}} = |0\rangle$ ):

$$b^\dagger(p_1, n_1)b^\dagger(p_2, n_2)|0\rangle = -b^\dagger(p_2, n_2)b^\dagger(p_1, n_1)|0\rangle. \quad (2.288)$$

Επομένως, τα κβάντα του πεδίου Dirac ικανοποιούν την Στατιστική Fermi-Dirac. Στην πραγματικότητα, κοιτάζοντας τον τελεστή τετραορμής, μπορεί απλά να τεθεί ότι ο  $d^\dagger(p, n)$  δημιουργεί και  $d(p, n)$  καταστρέφει μια κατάσταση ποζιτρονίου. Στη συνέχεια, θεωρείται το κενό ως κατάσταση χωρίς ηλεκτρόνια και/ή ποζιτρόνια (δηλαδή χωρίς ηλεκτρόνια και οπές).

Στην περίπτωση Klein-Gordon ερμηνεύεται το διατηρούμενο ρεύμα ως το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα. Θα δειχθεί τώρα ότι στην περίπτωση Dirac η έκφραση  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , έχει την ίδια ερμηνεία. Θα υπολογισθεί τώρα το χωρικό ολοκλήρωμα της πυκνότητας.

$$\int d^3x \psi^\dagger\psi, \quad (2.289)$$

σε όρους των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής

$$\int d^3x \psi^\dagger\psi = \sum_{\pm n} \int d^3p \left[ b^\dagger(p, n)b(p, n) + d(p, n)d^\dagger(p, n) \right]. \quad (2.290)$$

Ως γνωστό, αυτή η έκφραση είναι θετικά ορισμένη. Ωστόσο, αν γίνει σύζευξη του πεδίου Dirac στον ηλεκτρομαγνητισμό μέσω της ελάχιστης αντικατάστασης διαπιστώνεται ότι η ελεύθερη δράση(2.257) γίνεται

$$S = \int_V d^4x \bar{\psi}(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi. \quad (2.291)$$

Συνεπώς, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι συζευγμένο με το διατηρούμενο ρεύμα

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.292)$$

Αυτό ωθεί στο ότι το ολοκλήρωμα της τέταρτης συνιστώσας του ρεύματος θα πρέπει να είναι ο τελεστής φορτίου και ως εκ τούτου δεν θα πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Στην πραγματικότητα, βρίσκεται ότι

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger\psi = \sum_{\pm n} \int d^3p e[b^\dagger(p, n)b(p, n) - d^\dagger(p, n)d(p, n) + [d(p, n), d^\dagger(p, n)]_+]. \quad (2.293)$$

Η αφαίρεση του άπειρου φορτίου που συνδέεται με την θάλασσα Dirac αφήνει έναν τελεστή που δεν είναι πια θετικά ορισμένος. Είναι φανερό επίσης ότι οι τελεστές  $b^\dagger$  δημιουργούν σωματίδια φορτίου  $e$  (ηλεκτρόνια) ενώ  $d^\dagger$  δημιουργούν σωματίδια φορτίου  $-e$  (ποζιτρόνια). Σημειώνεται ότι η ερμηνεία του  $Q$ , ως ο τελεστής φορτίου δεν θα δούλευε με τη χρήση μεταθετικών σχέσεων.

Ένα περαιτέρω δυναμικό πρόβλημα συνδέεται με την αιτιότητα (causality). Στην περίπτωση Klein-Gordon έχειδειχθεί ότι οι ιδιότητες αιτιότητας είναι εγγυημένες για τα τοπικά παρατηρήσιμα, από τις κανονικές μεταθετικές σχέσεις για τα πεδία. Αλλά αυτή είναι απλά η ιδιότητα που έχει εγκαταληφθεί στην περίπτωση Dirac. Για να συζητηθεί αυτό το σημείο, ας αρχίσει ο υπολογισμός του αντιμεταθέτη ίσου χρόνου για το πεδίο Dirac

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{y}, t)]_+ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \\ &\times \left[ \left( \frac{\hat{p} + m}{2m} \right) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + \left( \frac{\hat{p} - m}{2m} \right) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right] \gamma_0 \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \left[ \left( \frac{\hat{p} + m}{2m} \right) + \left( \frac{\hat{p} - m}{2m} \right) \right] \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \frac{2E_p}{2m} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.294)$$

όπου το τετραδιάνυσμα  $\tilde{p}^\mu$  ορίζεται όπως στην εξ. (2.278), δηλαδή  $\tilde{p}^\mu = (p^0, -\vec{p})$ . Με το ίδιο τρόπο προκύπτει

$$[\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)]_+ = [\psi^\dagger(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{y}, t)]_+ = 0. \quad (2.295)$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.260), ο αντιμεταθέτης μεταξύ  $\psi$  και  $\psi^\dagger$  μπορεί να γραφθεί ως

$$[\Pi_\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)]_+ = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.296)$$

Αυτό δείχνει ότι επίσης στην περίπτωση Dirac μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κανονικός φορμαλισμός της κβάντωσης, αλλά με αντικατάσταση των μεταθετών με αντιμεταθέτες. Με τον υπολογισμό του αντιμεταθέτη για αυθαίρετους διαχωρισμούς χωροχρόνου λαμβάνεται

$$\begin{aligned} [\psi(x), \psi^\dagger(y)]_+ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \\ &\times \left[ \left( \frac{\hat{p} + m}{2m} \right) e^{-ip(x-y)} + \left( \frac{\hat{p} - m}{2m} \right) e^{ip(x-y)} \right] \gamma_0 \\ &= \left[ (i\hat{\partial} + m)_x \gamma_0 \right] \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \\ &= \left[ (i\hat{\partial} + m)_x \gamma_0 \right] i\Delta(x-y), \end{aligned} \quad (2.297)$$

όπου  $\Delta(x)$  είναι η αναλλοίωτη συνάρτηση  $\Delta(x-y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)}$  στον υπολογισμό του μεταθέτη για το πεδίο Klein-Gordon. Από τις ιδιότητες της  $\Delta(x)$ , προκύπτει ότι ο αντιμεταθέτης των πεδίων Dirac εξαφανίζεται σε space-like αποστάσεις. Επιπλέον, αξιολογώντας τον μεταθέτη του πεδίου Dirac, μπορεί ναδειχθεί ότι αυτός δεν εξαφανίζεται για έναν space-like διαχωρισμό. Επομένως, το πεδίο Dirac δεν μπορεί να είναι μια παρατηρήσιμη ποσότητα. Αυτή η παρατήρηση από μόνη της θα έθετε σε σοβαρό πρόβλημα την ιδέα της κβάντωσης του πεδίου Dirac μέσω των σχέσεων αντιμετάθεσης. Επομένως, πρέπει να λυθεί το πρόβλημα της αιτιότητας. Η κρίσιμη παρατήρηση βρίσκεται στην ακόλουθη ταυτότητα

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B, \quad (2.298)$$

που ισχύει για αυθαίρετους τελεστές. Η ταυτότητα δείχνει ότι ο  $AB$  μετατίθεται με τον  $C$  αν οι  $A$  και  $B$  και οι δύο μετατίθονται ή αντιμετατίθονται με τον  $C$ . Μια άμεση συνέπεια είναι ότι μία τοπική ποσότητα που περιέχει έναν άρτιο αριθμό πεδίων Dirac αυτομετατίθεται στις space-like αποστάσεις. Έτσι, για να συμβιβασθεί η αιτιότητα με την κβάντωση του πεδίου Dirac πρέπει να εγκαταληφθεί η πιθανότητα ότι αυτό το πεδίο είναι παρατηρήσιμο. Ωστόσο, όλες οι σημαντικές φυσικές ποσότητες, όπως ο ταυιστής ενέργειας-ορμής και το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι διγραμμικές στα πεδία Fermi και επομένως, είναι παρατηρήσιμες ποσότητες.

Αυτό που έχειδειχθεί εδώ είναι ότι, για να δοθεί νόημα στην κβάντωση του πεδίου Dirac, πρέπει να χρησιμοποιηθούν σχέσεις αντιμετάθεσης, οι οποίες, με

τη σειρά τους, υποδηλώνουν ότι τα αντίστοιχα κβάντα τηρούν την Στατιστική Fermi-Dirac. Αυτό δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα παράδειγμα του περιφήμου θεωρήματος στατιστικής σπιν (**spin statistics theorem**) που αποδείχθηκε από τον Wolfgang Pauli. Αυτό το θεώρημα λέει ότι σε μια Lorentz αναλλοίωτη τοπική θεωρία πεδίων, ακέραιου και ήμι-ακέραιου σπιν σωματίδια πρέπει να ικανοποιούν την Στατιστική των Bose-Einstein & Fermi-Dirac αντίστοιχα.

## 2.10 Άμαζα Σωματίδια με Σπιν 1/2

Εξετάζεται τώρα η εξίσωση Dirac για ένα άμαζο σωματίδιο,  $m = 0$ ,

$$i\hat{\partial}\psi(x) = 0. \quad (2.299)$$

Λαμβάνοντας μία λύση θετικής ενέργειας

$$\psi(x) = e^{-ikx}\psi(k), \quad (2.300)$$

έπεται από την (2.299),  $k^2 = 0$ . Άρα, λύσεις θετικής ενέργειας,  $E = k_0 = |\vec{k}|$ , δύνανται να γραφθεί

$$E\gamma_0\psi(k) = \vec{k} \cdot \vec{\gamma}\psi(k) \rightarrow E\psi(k) = \vec{k} \cdot \vec{\alpha}\psi(k). \quad (2.301)$$

Υπενθυμίζοντας από την 2.2 ότι

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.302)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι πολλαπλασιάζοντας με  $\gamma_5$  την δεύτερη εξίσωση στην (2.301) προκύπτει

$$\gamma_5\psi(k) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{k}|}\psi(k), \quad (2.303)$$

όπου

$$\vec{\Sigma} = \gamma_5\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.304)$$

Ο τελεστής  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{k}/|\vec{k}|$  λέγεται τελεστής ελικότητας (helicity operator) αφού λέει την κατεύθυνση του σπιν σε σχέση με την ορμή. Στην πραγματικότητα, οι ιδιοτιμές του είναι  $\pm 1$ , αφού έπεται από την

$$\left( \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \right)^2 = 1. \quad (2.305)$$

Ο τελεστής  $\gamma_5$  λέγεται και χειραλικότητα (**chirality**). Επομένως, η εξ. (2.303) λέει ότι, στην άμαζη περίπτωση, για θετικές ενεργειακές λύσεις οι helicity & chirality συμπίπτουν. Για τις αρνητικές ενεργειακές λύσεις διαφέρουν στο πρόσημο αφού  $E = -|\vec{k}|$ . Παρατηρείται ότι στην άμαζη περίπτωση δεν έχει

νόημα η χρήση των πινάκων  $4 \times 4$ . Στην πραγματικότητα η εξίσωση Dirac μπορεί να γραφθεί ως

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi(x). \quad (2.306)$$

Επειδή οι μόνοι πίνακες που εμφανίζονται εδώ είναι οι  $\alpha_i$ , με την άλγεβρα

$$[\alpha_i, \alpha_j]_+ = 2\delta_{ij}, \quad (2.307)$$

είναι σαφές ότι μπορούν να αναπαρασταθούν σε όρους  $2 \times 2$  πινάκων Pauli,  $\pm \sigma_i$ . Εδώ η επιλογή του προσήμου σχετίζεται με θετική ή αρνητική χειραλικότητα. Αυτό μπορεί να φανεί επίσης ξεκινώντας από την αναπαράσταση  $4 \times 4$  αλλά επιλέγοντας μια διαφορετική βάση για την άλγεβρα των  $\gamma$  πινάκων, την βάση χειραλικότητας **chiral basis**, όπου ο  $\gamma_5$  είναι διαγώνιος. Στη συνέχεια δίνονται οι  $\gamma$  πίνακες (βλ. Ενότητα 2.3)

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.308)$$

Σε αυτή την αναπαράσταση τα πεδία με θετικές και αρνητικές χειραλικότητες δίδονται αντιστοίχως από

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.309)$$

με τα πεδία δύο συνιστωσών που ικανοποιούν την

$$(-k^0 + \vec{k} \cdot \vec{\sigma})\phi = 0, \quad (k^0 + \vec{k} \cdot \vec{\sigma})\chi = 0. \quad (2.310)$$

Η σχετικιστική περιγραφή ενός σωματιδίου χωρίς μάζα σε όρους σπινόρων δύο συνιστωσών δόθηκε αρχικά από τον Hermann Weyl. Ωστόσο, αυτή η εξίσωση απορρίφθηκε επειδή δεν διατηρεί την ισοτιμία. Στην πραγματικότητα σε αυτή την αναπαράσταση ο τελεστής ισοτιμίας  $\gamma_0$  δεν είναι διαγώνιος και ανταλλάσσει τις δύο λύσεις χειραλικότητας. Επίσης, ο τελεστής σύζευξης φορτίου ανταλλάσσει τις δύο λύσεις. Στην πραγματικότητα ο πίνακας σύζευξης φορτίου  $C$  (βλ. εξ. (2.222) δίδεται από

$$C = -i\alpha^2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.311)$$

Αυτός ο πίνακας είναι διαγώνιος αλλά στον ορισμό της σύζευξης φορτίου υπάρχει επίσης μια σύζευξη και ένας  $\gamma_0$  (βλ. εξ. (2.220)). Ως αποτέλεσμα, η σύζευξη φορτίου ανταλλάσσει τις χειραλικότητες και στέλνει θετικές ενεργειακές λύσεις σε αρνητικές ενεργειακές λύσεις. Ωστόσο, η συνδυασμένη λειτουργία  $CP$  αφήνει αναλλοίωτη την εξίσωση Weyl. Σήμερα είναι γνωστό ότι η ισοτιμία παραβιάζεται και στην πραγματικότητα, τα φερμιόνια στο καθιερωμένα πρότυπα περιγράφονται από τις άμαζες εξισώσεις Dirac και μόνο μετά το σπάσιμο

συμμετρίας γίνονται μεγάλης μάζας. Ως εκ τούτου, τα φερμιόνια μπορούν να περιγραφούν από τις εξισώσεις Weyl ότι μετά το σπάσιμο του συνδυάζονται μαζί με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθούν πεδία Dirac μεγάλης μάζας.

Οι εξισώσεις Weyl μπορούν εύκολα να ληφθούν από τις εκτιμήσεις που έγιναν στην Ενότητα 2.3. Στην άμαζη περίπτωση (και ξεχνώντας μια αναπαράσταση με ορισμένη ισοτιμία) δεν χρειάζεται να εισαχθούν και οι δύο αναπαραστάσεις  $(1/2, 0)$  και  $(0, 1/2)$ . Στην πραγματικότητα, η εξίσωση (2.76)

$$i\partial^\mu(\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta}\zeta^\beta = 0, \quad (2.312)$$

για τους σπίνορες που ανήκουν στην  $(1/2, 0)$  αναπαράσταση είναι συνεπής από μόνη της και δεν χρειάζεται να εισαχθεί ένας στιγματιστός σπίνορας. Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που βρέθηκαν στην Ενότητα 2.3, είναι πρόδηλο ότι οι σπίνορες δύο συνιστωσών που ορίζονται στην εξ. (2.309),  $\phi$  και  $\chi$  συμπίπτουν αντίστοιχα με  $\zeta^\alpha$  και  $\eta_{\dot{\alpha}}$ .

Δεν θα μελετηθούν λεπτομερώς οι λύσεις της άμαζης εξίσωσης Dirac 2.299). Εντούτοις, η συνθήκη κανονικοποίησης θα πρέπει να τροποποιηθεί σε αυτή την περίπτωση. Μια βολική επιλογή είναι

$$u^\dagger(p, n)u^\beta(p, n') = v^\dagger(p, n)v^\beta(pn') = 2E\delta_{nn'} \quad (2.313)$$

Εναλλακτικά, κατά την αξιολόγηση της φυσικής παρατήρησης ως ενεργής διατομής, μπορεί να υποτεθεί  $m \neq 0$  στην αρχή και να ληφθεί το όριο  $m \rightarrow 0$  στο τέλος των υπολογισμών. Θα παρουσιασθεί ένα παράδειγμα αυτού στην ενότητα 5.1.





## Κεφάλαιο 3

# Διανυσματικά Πεδία

### 3.1 Το Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Ως γνωστόν, η δράση για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δύναται να εκφραστεί σε όρους τετραδιανύσματος δυναμικού  $A_\mu$ . Επιπλέον, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα για την ελεύθερη περίπτωση δίδεται από την (2.171)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

όπου

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.2)$$

Με αποτέλεσμα οι εξισώσεις κίνησης να είναι:

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0. \quad (3.3)$$

Επιπροσθέτως, τα δυναμικά ορίζονται μέχρι έναν μετασχηματισμό βαθμίδας

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x). \quad (3.4)$$

Μάλιστα, τα  $A_\mu$  και  $A'_\mu$  ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης και δίδουν το ίδιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Δηλαδή, η δράση για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι αναλλοίωτη ως προς βαθμίδα (gauge invariant). Για παράδειγμα, στην  $O(2)$  συμμετρία για το φορτισμένο βαθμωτό πεδίο ο μετασχηματισμός εξαρτάται από μία παράμετρο: την γωνία περιστροφής. Στην συμμετρία βαθμίδας υπάρχει συνεχής αριθμός παραμέτρων δοσμένα από την συνάρτηση  $\Lambda(x)$ . Μάλιστα, για κάθε χωροχρονικό σημείο, μπορεί να αλλάξει ο ορισμός του  $A_\mu$  με πρόσθεση της τετραβαθμίδας του  $\Lambda$  υπολογισμένη στο σημείο αυτό. Η κεντρική συνέπεια αυτής της αναλλοιότητας είναι η μείωση των βαθμών ελευθερίας της θεωρίας από 4 σε 2. Θα μελετηθεί πρώτα η κλασική θεωρία προς απόδειξη αυτού του ισχυρισμού. Είναι δυνατό η αναλλοιότητα βαθμίδας να απαιτεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη πάνω στο πεδίο  $A_\mu$  (gauge fixing). Για παράδειγμα, μπορεί

να εφαρμοσθεί μετασχηματισμός βαθμίδας με τέτοιο τρόπο ώστε το μετασχηματισμένο πεδίο να ικανοποιεί

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.5)$$

Δεδομένου αυθέρετου  $A_\mu$ , δύναται να μετασχηματισθεί ως προς βαθμίδα επιλέγοντας  $\Lambda(x)$  τέτοια ώστε

$$\square\Lambda + \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (3.6)$$

Έπειτα το μετασχηματισμένο πεδίο  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$  έχει μηδενική τετραπόκλιση (4-divergence). Όταν το  $A_\mu$  ικανοποιεί την συνθήκη  $\partial_\mu A^\mu = 0$  τότε το δυναμικό είναι στην βαθμίδα **Lorenz (Lorenz gauge)**. Ωστόσο, το  $A_\mu$  δεν έχει προσδιοριστεί πλήρως. Στην πραγματικότητα, μπορεί να εκτελεσθεί ένας περαιτέρω μετασχηματισμός βαθμίδας

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda', \quad (3.7)$$

με

$$\square\Lambda' = 0. \quad (3.8)$$

Στη συνέχεια, το νέο πεδίο  $A'_\mu$  ικανοποιεί  $\partial^\mu A'_\mu = 0$  και είναι ακόμα στην βαθμίδα Lorenz. Σε αυτή την βαθμίδα, οι εξισώσεις κίνησης απλοποιούνται και ανάγονται στην εξίσωση κύματος, που δεν είναι παρά η εξίσωση Klein-Gordon με  $m = 0$ . Δεδομένου ότι η συνθήκη της βαθμίδας Lorenz είναι σχετικιστικώς αναλλοίωτη, η θεωρία που διατυπώνεται σε αυτή την βαθμίδα είναι ρητώς μεταβλητή ή συναλλοίωτη (covariant), καθιστώντας αυτή την επιλογή βαθμίδας ιδιαίτερα βολική. Από την άλλη πλευρά, η μέτρηση των πραγματικών βαθμών ελευθερίας δεν είναι έτσι προφανής. Από αυτή την άποψη μια αποδοτικότερη επιλογή είναι η βαθμίδα **Coulomb(Coulomb gauge)**, που ορίζεται (στην περίπτωση που δεν αλληλεπιδρά) ως η βαθμίδα όπου εξαφανίζεται το βαθμωτό δυναμικό και η χωρική απόκλιση του διανύσματος δυναμικού. Για ναδειχθεί ότι υπάρχει τέτοια βαθμίδα, ας πραγματοποιηθεί ο ακόλουθος μετασχηματισμός βαθμίδας

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int_0^t A_0(\vec{x}, t') dt'. \quad (3.9)$$

Προφανώς

$$A'_0 = 0. \quad (3.10)$$

Τότε μπορεί να εκτελεσθεί ένας δεύτερος μετασχηματισμός βαθμίδας

$$A''_\mu = A'_\mu - \partial_\mu\Lambda, \quad (3.11)$$

με τέτοιο τρόπο ώστε  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = 0$ . Για αυτό επιλέγεται  $\Lambda(x)$  τέτοιο ώστε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \vec{\nabla}^2 \Lambda = 0. \quad (3.12)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί υπενθυμίζοντας ότι

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}). \quad (3.13)$$

Τότε

$$\Lambda(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}', t) \quad (3.14)$$

και

$$\frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}'(\vec{x}', t). \quad (3.15)$$

Από την εξίσωση Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο έπεται ότι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 A_0 - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = 0 \quad (3.16)$$

και σε όρους  $A'_\mu$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}' = 0. \quad (3.17)$$

Συνοπώς

$$\frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.18)$$

και  $A''_0 = A'_0 = 0$ . Αυτό δείχνει ότι ο δεύτερης βαθμίδας μετασχηματισμός δεν καταστρέφει την εξαφάνιση του βαθμωτού δυναμικού. Εν κατακλείδι, έχειδειχθεί ότι είναι δυνατόν να επιλεγεί μία βαθμίδα τέτοια ώστε

$$A_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.19)$$

Επομένως, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει μόνο δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας. Ένας άλλος τρόπος ναδειχθεί ότι  $A_\mu$  έχει δύο βαθμούς ελευθερίας είναι μέσω των εξισώσεων της κίνησης. Ας εξετασθεί ο τετραδιάστατος μετασχηματισμός Fourier του  $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) = \int d^4k e^{ikx} A_\mu(k). \quad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στις εξισώσεις κίνησης προκύπτει

$$-k^2 A_\mu(k) + k_\mu(k^\nu A_\nu(k)) = 0. \quad (3.21)$$

Ας διαχωρισθεί τώρα το  $A_\mu(k)$  σε όρους τεσσάρων ανεξάρτητων τετραδιανυσμάτων τα οποία μπορούν να επιλεγούν ως  $k^\mu = (E, \vec{k})$ ,  $\tilde{k}^\mu = (E, -\vec{k})$ , και δύο επιπλέον τετραδιανύσματα  $e_\mu^\lambda(k)$ ,  $\lambda = 1, 2$ , ορθογώνια στο  $k^\mu$

$$k^\mu e_\mu^\lambda = 0, \quad \lambda = 1, 2. \quad (3.22)$$

Ο διαχωρισμός του  $A_\mu(k)$  είναι

$$A_\mu(k) = a_\lambda(k)e_\mu^\lambda + b(k)k_\mu + c(k)\tilde{k}_\mu. \quad (3.23)$$

Από τις εξισώσεις κίνησης προκύπτει

$$-k^2(a_\lambda e_\mu^\lambda + b k_\mu + c \tilde{k}_\mu) + k_\mu(b k^2 + c(k \cdot \tilde{k})) = 0. \quad (3.24)$$

Ο όρος στο  $b(k)$  απλοποιείται, επομένως δεν έχει καθοριστεί από τις εξισώσεις της κίνησης. Για τις άλλες ποσότητες που έχω

$$k^2 a_\lambda(k) = c(k) = 0. \quad (3.25)$$

Η αυθαιρεσία του  $b(k)$  είναι συνέπεια της αναλλοιωτότητας της βαθμίδας. Μάλιστα, αν μετασχηματιστεί κατά βαθμίδα το  $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3.26)$$

τότε

$$A_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) + i k_\mu \Lambda(k), \quad (3.27)$$

όπου

$$\Lambda(x) = \int d^4 k e^{i k x} \Lambda(k). \quad (3.28)$$

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός βαθμίδας είναι η μεταφορά  $b(k) \rightarrow b(k) + i\Lambda(k)$ , μπορεί πάντα να επιλεγεί  $b(k) = 0$ . Επομένως, έχω δύο βαθμούς ελευθερίας που περιγράφονται από τα πλάτη  $a_\lambda(k)$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Επιπλέον αυτά τα πλάτη είναι διαφορετικά από το μηδέν μόνο αν ικανοποιηθεί η σχέση διασποράς  $k^2 = 0$ . Αυτό δείχνει ότι τα αντίστοιχα κβάντα έχουν μηδενική μάζα. Με την επιλογή  $b(k) = 0$ , το πεδίο  $A_\mu(k)$  γίνεται

$$A_\mu(k) = a_\lambda(k)e_\mu^\lambda(k), \quad (3.29)$$

αποδεικνύοντας ότι  $k^\mu A_\mu(k) = 0$ . Άρα, η επιλογή  $b(k) = 0$  είναι ισοδύναση με τον προσδιορισμό της βαθμίδας Lorenz (Lorenz gauge fixing).

### 3.2 Η Κβάντωση του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Ας εξετασθεί τώρα η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αν αγνοηθούν οι περιορισμοί στα  $A_\mu$ , που υποδηλώνουν ότι το πεδίο βαθμίδας έχει μόνο δύο ανεξάρτητες συνιστώσες, δύνανται τότε να απαιτηθούν μη τετριμμένες μεταθετικές σχέσεις για όλες τις συνιστώσες του πεδίου. Δηλαδή

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = ig_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.30)$$

$$[A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{y}, t)] = [\Pi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = 0, \quad (3.31)$$

με

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}. \quad (3.32)$$

Για τον υπολογισμό των συζυγών ορμών είναι προτιμότερο να γραφθεί η Λαγκρανζιανή πυκνότητα ( βλ. εξ. (3.1) ) με τον εξής τρόπο

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}][A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}] = -\frac{1}{2}A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}A_{\mu,\nu}A^{\nu,\mu}. \quad (3.33)$$

Επομένως

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -A^{\mu,\nu} + A^{\nu,\mu} = F^{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

που συνεπάγεται

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0}. \quad (3.35)$$

Έπεται ότι

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0. \quad (3.36)$$

Είναι εμφανές ότι είναι αδύνατο να ικανοποιείται η συνθήκη

$$[A_0(\vec{x}, t), \Pi^0(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.37)$$

Μπορεί να βρεθεί μια λύση σε αυτό το πρόβλημα που τροποποιεί την Λαγκρανζιανή πυκνότητα κατά τέτοιο τρόπο ώστε  $\Pi^0 \neq 0$ . Αλλά κάνοντας αυτό δεν θα ανακτηθούν οι εξισώσεις Maxwell. Ωστόσο, μπορεί να γίνει χρήση της αναλλοιωτότητας βαθμίδας, τροποποιώντας την Λαγκρανζιανή πυκνότητα με τέτοιο τρόπο ώστε να ανακτήσει τις εξισώσεις της κίνησης σε μία συγκεκριμένη βαθμίδα. Για παράδειγμα στην βαθμίδα Lorenz έχω τις εξισώσεις κίνησης

$$\square A_\mu(x) = 0, \quad (3.38)$$

οι οποίες μπορούν να αποκτηθούν από την Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu}, \quad (3.39)$$

(Klein-Gordon Λαγκρανζιανή). Θα φανεί ότι το μείον είναι αναγκαίο για την ανάκτηση μιας θετικής Χαμιλτονιανής πυκνότητας. Τώρα εκφράζεται αυτή η Λαγκρανζιανή πυκνότητα σε όρους αναλλοιωτότητας βαθμίδας, που δίδεται στο την εξ.(3.1). Για το σκοπό αυτό παρατηρείται ότι η διαφορά μεταξύ των δύο

Λαγκρανζιανών πυκνοτήτων δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο δεύτερος όρος της εξ. (3.33)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A_{\mu,\nu}A^{\nu,\mu} &= \partial^\mu \left[ \frac{1}{2}A_{\mu,\nu}A^\nu \right] - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_{\mu,\nu})A^\nu \\ &= \partial^\mu \left[ \frac{1}{2}A_{\mu,\nu}A^\nu \right] - \partial^\nu \left[ \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)A_\nu \right] + \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Τότε ως την τετραπόκλιση μπορεί να γραφθεί η νέα Λαγκρανζιανή πυκνότητα στην μορφή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (3.41)$$

Μπορεί να επαληθευθεί ότι αυτή η μορφή δίδει τις σωστές εξισώσεις κίνησης. Μάλιστα, από

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -A^{\mu,\nu} + A^{\nu,\mu} - g^{\mu\nu}(\partial^\lambda A_\lambda), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0, \quad (3.42)$$

προκύπτει

$$0 = -\square A^\mu + \partial^\mu(\partial^\nu A_\nu) - \partial^\mu(\partial^\lambda A_\lambda) = -\square A^\mu. \quad (3.43)$$

Ο όρος

$$-\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (3.44)$$

ο οποίος δεν είναι αναλλοίωτος ως προς βαθμίδα, και λέγεται όρος προσδιορισμού βαθμίδας (**gauge fixing term**). Γενικότερα, μπορεί να προστεθεί στην αρχική Λαγκρανζιανή πυκνότητα ένας όρος της μορφής

$$-\frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (3.45)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης θα είναι

$$\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial^\mu(\partial^\lambda A_\lambda) = 0. \quad (3.46)$$

Για  $\lambda = 1$ , αυτές οι εξισώσεις συμπίπτουν με τις εξισώσεις Maxwell στην βαθμίδα Lorenz. Άρα, στα επόμενα θα γίνει χρήση του  $\lambda = 1$ . Από την εξ. (3.42) φαίνεται ότι

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = -\partial^\mu A_\mu. \quad (3.47)$$

Στην βαθμίδα Lorenz βρίσκεται ξανά ότι  $\Pi^0 = 0$ . Προς αποφυγή του αντίστοιχου προβλήματος μπορεί να απαιτηθεί ότι  $\partial^\mu A_\mu = 0$  δεν ισχύει ως τελεστική εξίσωση, αλλά περισσότερο ως μία συνθήκη πάνω στις φυσικές καταστάσεις

$$\langle \text{phys} | \partial^\mu A_\mu | \text{phys} \rangle = 0. \quad (3.48)$$

Αντίστοιχα, το τίμημα για την κβάντωση της θεωρίας με συναλλοίωτο τρόπο είναι να γίνει χρήση ενός χώρου Hilbert μεγαλύτερο από τον φυσικό. Στην πραγματικότητα, ο χώρος Hilbert θα δοθεί από τον υπόχωρο των φυσικών καταστάσεων, εκείνων που ικανοποιούν την εξ. (3.48), καθώς και εκείνων που δεν ικανοποιούν τον περιορισμό (3.48). Ένα πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι επιτρέπει να γίνει χρήση τοπικών σχέσεων μετάθεσης. Αντίθετα, στην βαθμίδα Coulomb, πρέπει να εισαχθούν μη τοπικές σχέσεις μετάθεσης για τις κανονικές μεταβλητές. Θα μελετηθεί ξανά αργότερα η συνθήκη (3.48).

Δεδομένου ότι δεν χρειάζεται να απασχολεί πια η εξίσωση  $\Pi^0 = 0$ , μπορεί να προχωρήσει το πρόγραμμα για κανονική κβάντωση. Οι πυκνότητες κανονικής ορμής είναι

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - g^{\mu 0}(\partial^\lambda A_\lambda), \quad (3.49)$$

ορ, εξπλιζιτλψ

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= -\partial^\lambda A_\lambda = -\dot{A}_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \\ \Pi^i &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\dot{A}^i + \partial^i A^0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Δεδομένου ότι η χωρική βαθμίδα του πεδίου μετατίθεται με το πεδίο στον ίδιο χρόνο, ο κανονικός μεταθέτης (3.30) προκαλεί

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \dot{A}_\nu(\vec{y}, t)] = -ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.51)$$

Για να ληφθούν τα κβάντα του πεδίου, αναζητούνται λύσεις επίπεδου κύματος της εξίσωσης κύματος. Χρειάζονται τέσσερα ανεξάρτητα τετραδιανύσματα προκειμένου να επεκταθούν οι λύσεις στο χώρο της ορμής. Σε ένα δεδομένο σύστημα, έστω η μονάδα τετραδιανυσμάτων που καθορίζει τον άξονα του χρόνου. Αυτό πρέπει να είναι ένα διάνυσμα time-like,  $n^2 = 1$ , και θα επιλεγεί  $n^0 > 0$ . Για παράδειγμα,  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Τότε λαμβάνονται δύο τετραδιανύσματα  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ ,  $\lambda = 1, 2$ , στο επίπεδο ορθογώνια στα  $n^\mu$  και  $k^\mu$ :

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} = n^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} = 0, \quad \lambda = 1, 2. \quad (3.52)$$

Σημειώνεται ότι τώρα  $k^2 = 0$ , δεδομένου ότι εξετάζονται λύσεις της εξίσωσης κύματος. Τα τετραδιανύσματα  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ , που είναι ορθογώνια στα  $n^\mu$ , είναι space-like, τότε θα επιλεγούν ορθογώνιες και κανονικοποιημένες με τον ακόλουθο τρόπο

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')\mu} = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.53)$$

Στην συνέχεια, ορίζονται μία μονάδα space-like τετραδιανύσματος, ορθογώνια στα  $n^\mu$  και βρίσκεται στο επίπεδο  $(k, n)$

$$n_\mu \epsilon^{(3)\mu} = 0, \quad (3.54)$$

με

$$\epsilon_\mu^{(3)} \epsilon^{(3)\mu} = -1. \quad (3.55)$$

Με κατασκευή, τα  $\epsilon_\mu^{(3)}$  είναι ορθογώνια στα  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ . Αυτό το τετραδιάνυσμα είναι πλήρως σταθεροποιημένο από τις προηγούμενες συνθήκες, και προκύπτει

$$\epsilon_\mu^{(3)} = \frac{k_\mu - (n \cdot k)n_\mu}{(n \cdot k)}. \quad (3.56)$$

Ως τελευταία μονάδα τετραδιανύσματος επιλέγεται  $n^\mu$

$$\epsilon_\mu^{(0)} = n_\mu. \quad (3.57)$$

Αυτά τα τετραδιανύσματα είναι ορθοκανονικά και μπορεί να γραφθεί

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')\mu} = g^{\lambda\lambda'}. \quad (3.58)$$

και αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ικανοποιούν την σχέση πληρότητας

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda')} g_{\lambda\lambda'} = g_{\mu\nu}. \quad (3.59)$$

Χρησιμοποιώντας τις μη-πεπλεγμένες εκφράσεις για τα  $\epsilon_\mu^{(3)}$  και  $\epsilon_\mu^{(0)}$ , μαζί με την πληρότητα βρίσκεται το ακόλουθο αποτέλεσμα για τα εγχάρσιως πολωμένα διανύσματα

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - (n \cdot k)(n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu)}{(n \cdot k)^2} \quad (3.60)$$

Στο σύστημα όπου  $n^\mu = (1, \vec{0})$  και  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ , είναι

$$\epsilon^{(1)\mu} = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon^{(2)\mu} = (0, 0, 1, 0), \quad \epsilon^{(3)\mu} = (0, 0, 0, 1). \quad (3.61)$$

Το ανάπτυγμα επίπεδων κυμάτων του  $A_\mu$  ις

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \left[ a_\lambda(k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) e^{ikx} \right], \quad (3.62)$$

όπου έχει τεθεί η συνθήκη ερμιτιανότητας για το  $A_\mu(x)$  (κλασσικά είναι ένα πραγματικό πεδίο). Για κάθε σταθεροποιημένο  $\mu$  αυτή η επέκταση είναι η ίδια όπως αυτή για το πεδίο Klein-Gordon, με την αντικατάσταση  $\epsilon_\mu^{(\lambda)} a_\lambda(k) \rightarrow a(k)$ . Τότε από την εξ.  $a(\vec{k}) = i \int d^3x f_{\vec{k}}^*(x) \partial_t^{(-)} \phi(x)$ ,  $\tilde{a}(-\vec{k}) = i \int d^3x \phi(x) \partial_t^{(-)} f_{\vec{k}}(x)$

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) a_\lambda(k) = i \int d^3x f_{\vec{k}}^*(x) \partial_t^{(-)} A_\mu(x), \quad (3.63)$$



με τις συναρτήσεις  $f_{\vec{k}}(x)$  ορισμένες όπως για το πεδίο Klein-Gordon. Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των  $\epsilon^{(\lambda)\mu}$  βρίσκεται

$$a_{\lambda}(k) = ig_{\lambda\lambda'} \int d^3x \epsilon^{(\lambda')\mu}(k) f_{\vec{k}}^*(x) \partial_t^{(-)} A_{\mu}(x) \quad (3.64)$$

και ανάλογα

$$a_{\lambda}^{\dagger}(k) = ig_{\lambda\lambda'} \int d^3x \epsilon^{(\lambda')\mu}(k) A_{\mu}(x) \partial_t^{(-)} f_{\vec{k}}(x). \quad (3.65)$$

Η σύγκριση με τον υπολογισμό στην εξ.  $S_F(x) = -(i\hat{\partial} + m)\Delta_F(x)$  δείχνει ότι

$$[a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] = - \int d^3x f_{\vec{k}}^*(x) i \partial_t^{(-)} f_{\vec{k}'}(x) g_{\lambda\lambda'} \quad (3.66)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας (Klein-Gordon orthogonality), δοσμένες από την εξ.  $\langle f_{\vec{k}} | f_{\vec{k}'} \rangle = i \int d^3x f_{\vec{k}}^* \partial_t^{(-)} f_{\vec{k}'} = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$

$$[a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] = -g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.67)$$

Ανάλογα

$$[a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}(k')] = [a_{\lambda}^{\dagger}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] = 0. \quad (3.68)$$

Ξανά, σύγκριση με τους μεταθέτες Klein-Gordon συνεπάγεται

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = -ig_{\mu\nu} \Delta(x - y), \quad (3.69)$$

με την αναλλοίωτη συνάρτηση  $\Delta(x)$  που ορίζεται όπως στην εξ.  $\Delta(x - y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x - y)}$ , αλλά με  $m = 0$ . Οι κανόνες μετάθεσης που έχουν εξαχθεί για τους τελεστές  $a_{\lambda}(k)$  δημιουργούν μερικό πρόβλημα. Έστω σωματίδιο μίας κατάστασης

$$|1, \lambda\rangle = \int d^3k f(k) a_{\lambda}^{\dagger}(k) |0\rangle, \quad (3.70)$$

η νόρμα του δίδεται από

$$\begin{aligned} \langle 1, \lambda | 1, \lambda \rangle &= \int d^3k d^3k' f^*(k) f(k') \langle 0 | a_{\lambda}(k) a_{\lambda}^{\dagger}(k') | 0 \rangle \\ &= \int d^3k d^3k' f^*(k) f(k') \langle 0 | [a_{\lambda}(k), a_{\lambda}^{\dagger}(k')] | 0 \rangle \\ &= -g_{\lambda\lambda} \int d^3k |f(k)|^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Επομένως οι καταστάσεις με  $\lambda = 0$  έχουν αρνητική νόρμα. Αυτό το πρόβλημα δεν είναι εντελώς απροσδόκητο. Στην πραγματικότητα, είναι φυσικώς γνωστό ότι οι μόνες φυσικές καταστάσεις είναι οι εγκάρσιες ( $\lambda = 1, 2$ ).

Για να διευκρινιστεί η κατάσταση θα επιστρέψω στην συνθήκη προσδιορισμού βαθμίδας (gauge fixing condition)  $\langle \text{phys} | \partial^\mu A_\mu | \text{phys} \rangle = 0$ . Υπενθυμίζεται ότι είναι ο στόχος της είναι να επιλεγεί το φυσικό μέρος του συνολικού χώρου Hilbert. Επομένως, το ερώτημα είναι αν οι φυσικές καταστάσεις που ικανοποιούν αυτή την συνθήκη έχουν θετική νόρμα. Προς συζήτηση αυτού σημειώνεται ότι η συνθήκη προσδιορισμού βαθμίδας (gauge fixing condition) είναι διγραμμική στις καταστάσεις, ως εκ τούτου θα μπορούσε να καταστρέψει την γραμμικότητα του χώρου Hilbert. Έτσι θα διατυπωθεί αυτή η συνθήκη με γραμμικό τρόπο. Μια δυνατότητα θα ήταν να γραφθεί

$$\partial^\mu A_\mu | \text{phys} \rangle = 0. \quad (3.72)$$

Αλλά αυτό θα ήταν μια πολύ ισχυρή απαίτηση. Ούτε καν η κατάσταση κενού δεν το ικανοποιεί. Ωστόσο, αν εξετασθούν τα θετικά και αρνητικά τμήματα συχνότητας του πεδίου

$$A_\mu^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) a_\lambda(k) e^{-ikx}, \quad A_\mu^{(-)}(x) = (A_\mu^{(+)}(x))^\dagger, \quad (3.73)$$

είναι δυνατό να αποδυναμωθεί η συνθήκη που απαιτεί

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x) | \text{phys} \rangle = 0. \quad (3.74)$$

Κατά αυτόν τον τρόπο ικανοποιείται αυτόματα η αρχική απαίτηση

$$\langle \text{phys} | (\partial^\mu A_\mu^{(+)} + \partial^\mu A_\mu^{(-)}) | \text{phys} \rangle = 0. \quad (3.75)$$

Για να καταστεί πιο ρητή αυτή η συνθήκη, ας υπολογισθεί η τετραπόκλιση του  $A_\mu^{(+)}$

$$i\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) a_\lambda(k). \quad (3.76)$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (3.56) προκύπτει

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(3)} = -(n \cdot k), \quad k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} = (n \cdot k), \quad (3.77)$$

από όπου

$$[a_0(k) - a_3(k)] | \text{phys} \rangle = 0. \quad (3.78)$$

Σημειώνεται ότι

$$[a_0(k) - a_3(k), a_0^\dagger(k') - a_3^\dagger(k')] = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') + \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') = 0. \quad (3.79)$$

Ας συμβολισθεί με  $|\Phi_{\vec{k}}(n_0, n_3)\rangle$  την κατάσταση με  $n_0$  τα βαθμωτά φωτόνια (δηλαδή με πόλωση  $\epsilon_{\mu}^{(0)}(k)$ ), και με  $n_3$  διαμήκη φωτόνια (δηλαδή με πόλωση  $\epsilon_{\mu}^{(3)}(k)$ ). Τότε, οι ακόλουθες καταστάσεις ικανοποιούν την συνθήκη (3.74)

$$|\Phi_{\vec{k}}^{(m)}\rangle = \frac{1}{m!} (a_0^\dagger(k) - a_3^\dagger(k))^m |\Phi_{\vec{k}}(0, 0)\rangle. \quad (3.80)$$

Αυτές οι καταστάσεις έχουν εξαφανιζόμενη νόρμα

$$\| |\Phi_{\vec{k}}^{(m)}\rangle \|^2 = 0. \quad (3.81)$$

Γενικότερα μπορεί να γίνει η ακόλουθη παρατήρηση. Ας εξετασθεί ο αριθμητικός τελεστής για βαθμωτά και διαμήκη φωτόνια

$$N = \int d^3k (a_3^\dagger(k)a_3(k) - a_0^\dagger(k)a_0(k)). \quad (3.82)$$

Σημειώνεται το σύμβολο μείον που προκύπτει από τις μεταθετικές σχέσεις, και που εξασφαλίζει ότι το  $N$  έχει θετικές ιδιοτιμές. Για παράδειγμα

$$Na_0^\dagger(k)|0\rangle = - \int d^3k' a_0^\dagger(k')[a_0(k'), a_0^\dagger(k)]|0\rangle = a_0^\dagger(k)|0\rangle. \quad (3.83)$$

Ας μελετηθεί η φυσική κατάσταση  $|\varphi_n\rangle$  με συνολικό αριθμό,  $n$ , για βαθμωτά και διαμήκη φωτόνια. Τότε

$$\langle \varphi_n | N | \varphi_n \rangle = 0, \quad (3.84)$$

αφού έπεται από την εξ. (3.78). Επομένως

$$n \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 0. \quad (3.85)$$

Φαίνεται ότι όλες οι φυσικές καταστάσεις με ορισμένο αριθμό με βαθμωτά και διαμήκη φωτόνια έχουν μηδενική νόρμα, εκτός από την κατάσταση κενού ( $n = 0$ ), δηλαδή

$$\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = \delta_{n,0}. \quad (3.86)$$

Μια γενική φυσική κατάσταση με μηδενικά εγκάρσια φωτόνια είναι γραμμική υπέρθεση των καταστάσεων  $|\varphi_n\rangle$

$$|\Psi\rangle = c_0|\varphi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} c_n |\varphi_n\rangle. \quad (3.87)$$

Αυτή η κατάσταση έχει θετική ορισμένη νόρμα

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = |c_0|^2 \geq 0. \quad (3.88)$$

Η απόδειξη ότι μια φυσική κατάσταση έχει θετική νόρμα μπορεί να επεκταθεί σε καταστάσεις με εγχάρσια φωτόνια. Φυσικά, οι συντελεστές  $c_n$ , που εμφανίζονται στην έκφραση μιας φυσικής κατάστασης, είναι εντελώς αυθαίρετοι, αλλά αυτό δεν πρόκειται να τροποποιήσει τις τιμές των παρατηρήσιμων. Για παράδειγμα, ας εξετασθεί η Χαμιλτονιανή. Είναι

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x : [\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}] : \\ &= \int d^3x : \left[ F^{\mu 0} \dot{A}_\mu - (\partial^\lambda A_\lambda) \dot{A}_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\lambda A_\lambda)^2 \right] : . \end{aligned} \quad (3.89)$$

Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η Χαμιλτονιανή δίδεται από το άθροισμα όλων των βαθμών ελευθερίας που εμφανίζονται στην  $A_\mu$  περίπτωση, εξ.  $P^0 = H = \int d^3x T^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x (\Pi^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + m^2\phi^2)$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x : \left[ \sum_{i=1}^3 (\dot{A}_i^2 + (\vec{\nabla} A_i)^2) - \dot{A}_0^2 - \vec{\nabla} A_0^2 \right] : \\ &= \int d^3k \omega_k : \left[ \sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda^\dagger(k) a_\lambda(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) \right] : . \end{aligned} \quad (3.90)$$

Επειδή τα  $a_0$  και  $a_3$  δρουν με τον ίδιο τρόπο πάνω στις φυσικές καταστάσεις, προκύπτει

$$\langle \text{phys} | H | \text{phys} \rangle = \langle \text{phys} | \int d^3k \omega_k \sum_{\lambda=1}^2 a_\lambda^\dagger(k) a_\lambda(k) | \text{phys} \rangle. \quad (3.91)$$

Η γενική φυσική κατάσταση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής  $|\varphi_T\rangle \otimes |\Psi\rangle$ , με  $|\Psi\rangle$  ορισμένο όπως στην εξ. (3.87). Δεδομένου ότι μόνο το  $|\varphi_T\rangle$  συμβάλλει στην αξιολόγηση μιας παρατηρήσιμης ποσότητας, μπορεί πάντα να επιλεγεί  $|\Psi\rangle$  ανάλογο προς το  $|\varphi_0\rangle$ . Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι υπολογίζεται πάντα στον περιορισμένο φυσικό χώρο, επειδή σε ένα άθροισμα πάνω στις ενδιάμεσες καταστάσεις πρέπει να συμπεριληφθούν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας. Αυτό είναι κρίσιμο για τη ρητή συνδιακύμανση και την τοπικότητα (covariance & locality) της θεωρίας.

Η αυθαίρεσία στον ορισμό της κατάστασης  $|\Psi\rangle$  έχει μια πολύ απλή ερμηνεία. Αντιστοιχεί στην προσθήκη στο  $A_\mu$  την τετραβαθμίδα, δηλαδή για την εκτέλεση ενός μετασχηματισμού βαθμίδας. Ας εξετασθεί το ακόλουθο στοιχείο πίνακα

$$\langle \Psi | A_\mu(x) | \Psi \rangle = \sum_{n,m} c_n^* c_m \langle \varphi_n | A_\mu(x) | \varphi_m \rangle. \quad (3.92)$$

Δεδομένου ότι το  $A_\mu$  αλλάζει τον αριθμό κατοχής κατά μία μονάδα και όλες οι καταστάσεις  $|\varphi_n\rangle$  έχουν μηδενική νόρμα (εκτός από την κατάσταση με  $n = 0$ ), οι μοναδικές μη εξαφανιζόμενες συνεισφορές έρχονται από τα  $n = 0$ ,  $m = 1$  και  $n = 1$ ,  $m = 0$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | A_\mu(x) | \Psi \rangle &= c_0^* c_1 \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} e^{-ikx} [\epsilon_\mu^{(3)}(k) a_3(k) \\ &+ \epsilon_\mu^{(0)}(k) a_0(k)] | \varphi_1 \rangle + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Προκειμένου να ικανοποιηθεί η συνθήκη βαθμίδας η κατάσταση  $|\varphi_1\rangle$  πρέπει να είναι της μορφής

$$|\varphi_1\rangle = \int d^3 q f(\vec{q}) [a_3^\dagger(q) - a_0^\dagger(q)] | 0 \rangle \quad (3.94)$$

και επομένως

$$\langle \Psi | A_\mu(x) | \Psi \rangle = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} [\epsilon_\mu^{(3)}(k) + \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)] [c_0^* c_1 e^{-ikx} f(\vec{k}) + \text{c.c.}] \quad (3.95)$$

Από τις εξ. (3.56) και (3.57) είναι

$$\epsilon_\mu^{(3)} + \epsilon_\mu^{(0)} = \frac{k_\mu}{(k \cdot n)}, \quad (3.96)$$

που συνεπάγεται ότι

$$\langle \Psi | A_\mu(x) | \Psi \rangle = \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3.97)$$

με

$$\Lambda(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} \frac{1}{n \cdot k} (i c_0^* c_1 e^{-ikx} f(\vec{k}) + \text{c.c.}) \quad (3.98)$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι αυτός ο μετασχηματισμός βαθμίδας αφήνει το  $A_\mu$  στην βαθμίδα Lorenz. Στην πραγματικότητα

$$\square \Lambda = 0, \quad (3.99)$$

αφού η ορμή  $k$  εντός του ολοκληρώματος ικανοποιεί την συνθήκη mass-shell  $k^2 = 0$ .

### 3.3 Διανυσματικά Πεδία Μη-μηδενικής Μάζας ή Proca

Για λόγους πληρότητας θα σχολιασθούν εν συντομία τα μεγάλης μάζας διανυσματικά πεδία, που ονομάζονται επίσης πεδία Proca. Είναι σημαντικό να

κατανοηθούν κάποιες από τις ιδιότητές τους, όπως, το γεγονός ότι έχουν 3 ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας. Συγκεκριμένα, αυτό το σημείο είναι σημαντικό για τον μηχανισμό Higgs.

Τα μαζικά μποζονικά διανύσματα περιγράφονται από ένα διανυσματικό πεδίο  $V_\mu$  ικανοποιώντας μια εξίσωση κίνησης που γενικεύει την Maxwell

$$(\square + m^2)V_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu V_\nu) = 0. \quad (3.100)$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που προκαλεί αυτή την εξίσωση είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2V^2, \quad (3.101)$$

όπου

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad (3.102)$$

Σημειώνεται η αλλαγή προσήμου σε σχέση με την Λαγκρανζιανή πυκνότητα Klein-Gordon λόγω της επιλογής της μετρικής  $g_{\mu\nu}$ , υποδηλώνοντας ένα σύμβολο μείον για τις χωρικές συντεταγμένες. Έστω η τετραπόκλιση της εξίσωσης (3.100) προκύπτει

$$m^2\partial_\mu V^\mu = 0. \quad (3.103)$$

Συνεπώς, το  $V_\mu$  έχει μηδενική τετραπόκλιση ως συνέπεια των εξισώσεων κίνησης. Ας μετρηθεί τώρα ο αριθμός των ανεξάρτητων βαθμών ελευθερίας του  $V_\mu$ . Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Fourier του  $V_\mu(x)$

$$V_\mu(x) = \int d^4k e^{ikx} V_\mu(k). \quad (3.104)$$

Ας εισαχθούν 4 ανεξάρτητα τετραδιανύσματα,

$$k^\mu = (E, \vec{k}), \quad \epsilon^{\mu(i)} = (0, \vec{n}_i), \quad i = 1, 2, \quad \epsilon^{\mu(3)} = \frac{1}{m} \left( |\vec{k}|, \frac{E\vec{k}}{|\vec{k}|} \right), \quad (3.105)$$

με  $\vec{k} \cdot \vec{n}_i = 0$ ,  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$  και  $|\vec{n}_i|^2 = 1$ . Τότε γράφεται το  $V_\mu(k)$  ως

$$V_\mu(k) = \epsilon_\mu^{(\lambda)} a_\lambda(k) + k_\mu b(k). \quad (3.106)$$

Εισάγοντας αυτή την έκφραση στις εξ. (3.100)

$$(k^2 - m^2)(\epsilon_\mu^{(\lambda)} a_\lambda(k) + k_\mu b(k)) - k_\mu k^2 b(k) = 0, \quad (3.107)$$

δηλαδή

$$(k^2 - m^2)a_\lambda = 0, \quad m^2 b = 0. \quad (3.108)$$

Στην ηλεκτρομαγνητική περίπτωση το πεδίο  $b$  δεν καθορίστηκε λόγω της αναλλοιωτότητας βαθμίδας, ενώ στη μαζική περίπτωση είναι σταθερό να είναι μηδενικό από τις εξισώσεις κίνησης. Επομένως το πεδίο έχει τρεις βαθμούς

ελευθερίας που αντιστοιχούν σε δύο εγκάρσιες και σε μία διαμήκη πόλωση. Όλοι αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon με μάζα  $m$ . Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι το μαζικό διανυσματικό πεδίο έχει έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας (διαμήκη), σε σχέση με την άμαζη περίπτωση. Φαίνεται επίσης ότι τα τρία ανεξάρτητα πεδία που περιγράφονται από το  $a_\lambda(k)$  ικανοποιούν μια εξίσωση Klein-Gordon με μάζα  $m$ .

Αντίστοιχα το πεδίο  $A_\mu$  μπορεί να εκφρασθεί ως

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2,3} \int d^3k [f_{\vec{k}} a_\lambda(\vec{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda)} + f_{\vec{k}}^* a_\lambda^\dagger(\vec{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}], \quad (3.109)$$

με τους μη εξαφανιζόμενους μεταθέτες μεταξύ τελεστών δημιουργίας και καταστροφής που δίδονται από

$$[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.110)$$

Ως τελευταία παρατήρηση, ας παρατηρηθεί ότι εισάγοντας ένα τέταρτο κανονικοποιημένο τετραδιάνυσμα

$$\epsilon_\mu^{(0)} = \frac{k_\mu}{m}, \quad (3.111)$$

προκύπτει μία βάση στον τετραδιάστατο χώρο Minkowski, που ικανοποιεί την σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda')} g_{\lambda\lambda'} = g_{\mu\nu}. \quad (3.112)$$

Συνεπώς το άθροισμα πάνω στις φυσικές πολώσεις δίδεται από

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}. \quad (3.113)$$





## Κεφάλαιο 4

# Θεωρία Διαταραχών

Η σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου δεν προσφέρει απλά υπολογιστικά παραδείγματα και επομένως πρέπει να αναπτυχθούν διαταραχτικές μέθοδοι ώστε να μελετηθούν τα αλληλεπιδρώντα πεδία. Στα επόμενα θα περιγραφούν διαδικασίες σκέδασης, αφού αποτελούν τις τυπικές διαδικασίες που εμφανίζονται στα πειράματα στοιχειωδών σωματιδίων. Οι μέθοδοι για την εισαγωγή της θεωρίας διαταραχών είναι αρκετά γενικοί, αλλά για λόγους απλότητας θα περιγραφεί λεπτομερώς μόνο η περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων με φορτισμένα σωματίδια με σπιν 1/2 που περιγράφεται από το πεδίο Dirac. Τα αποτελέσματα μπορούν ευκολά να γενικευθούν σε άλλες θεωρίες αλληλεπιδράσεων.

### 4.1 Η Ηλεκτρομαγνητική Αλληλεπίδραση

Ως γνωστόν, η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση ενός αυθαίρετα φορτισμένου σωματιδίου λαμβάνεται μέσω της ελάχιστης αντικατάστασης (Minimal substitution) ή ισοδύναμα επικαλώντας την αρχή βαθμίδας (gauge principle)

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (4.1)$$

Για φορτισμένο σωματίδιο Klein-Gordon, ομοίως, έχω την ακόλουθη Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\rightarrow [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi] - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Το τμήμα αλληλεπίδρασης δίδεται από τους ακόλουθους δύο όρους

$$\mathcal{L}_{\text{int.}} = -ie \left[ \phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right] A^\mu + e^2 A^2 \phi^\dagger \phi. \quad (4.3)$$

Στον πρώτο όρο το πεδίο βαθμίδας είναι συζευγμένο με το ρεύμα

$$j_\mu = ie \left[ \phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right], \quad (4.4)$$

αλλά ένας άλλος όρος αλληλεπίδρασης εμφανίζεται. Αυτός ο όρος είναι μία άμεση συνέπεια της αναλλοιωτής βαθμίδας. Στην πραγματικότητα, το ρεύμα  $j_\mu$ , το οποίο διατηρείται απουσία της αλληλεπίδρασης, ούτε διατηρείται ούτε αναλλοίωτο ως προς την βαθμίδα, όταν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ενεργοποιημένο. Μάλιστα, ο μετασχηματισμός απειροελάχιστης βαθμίδας

$$\delta\phi(x) = -ie\Lambda(x)\phi(x), \quad \delta A_\mu(x) = \partial_\mu\Lambda(x), \quad (4.5)$$

τότε

$$\delta\mathcal{L}_{\text{free}} = ie\Lambda_{,\mu}\phi^\dagger\partial^\mu\phi - ie\partial_\mu\phi^\dagger\Lambda^{,\mu}\phi = j^\mu\partial_\mu\Lambda \quad (4.6)$$

και γράφοντας  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  στην μορφή

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -j_\mu A^\mu + e^2 A^2 \phi^\dagger \phi, \quad (4.7)$$

προκύπτει

$$\delta\mathcal{L}_{\text{int}} = -j_\mu\partial^\mu\Lambda - (\delta j_\mu)A^\mu + 2e^2\Lambda_{,\mu}A^\mu\phi^\dagger\phi. \quad (4.8)$$

Ο πρώτος όρος απλοποιείται με την μεταβολή της

$\mathcal{L}_{\text{free}}$ , ενώ οι άλλοι δύο όροι διαγράφονται μεταξύ τους. Μάλιστα,

$$\delta j_\mu = ie \left[ \phi^\dagger (-ie)\Lambda_{,\mu}\phi - ie\Lambda_{,\mu}\phi^\dagger\phi \right] = 2e^2\Lambda_{,\mu}\phi^\dagger\phi. \quad (4.9)$$

Αυτό δείχνει ότι ο όρος  $A^2$  είναι αναγκαίος για να ισοφαρίσει την μη-αναλλοιωτή του ρεύματος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Ακριβέστερα, το διατηρούμενο και αναλλοίωτο ως προς βαθμίδα ρεύμα κάτω δύναται να ληφθεί μέσω του θεωρήματος της Noether

$$J_\mu = ie \left[ \phi^\dagger (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi - (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^\dagger\phi \right] = j_\mu - 2e^2 A_\mu \phi^\dagger \phi. \quad (4.10)$$

Η κατάσταση είναι πολύ πιο απλή στην περίπτωση της εξίσωσης Dirac όπου

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow \bar{\psi}(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

δίδοντας τον όρο αλληλεπίδρασης

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu. \quad (4.12)$$

Εδώ το πεδίο βαθμίδας συνδέεται με ένα διατηρούμενο και αναλλοίωτο ως προς βαθμίδα ρεύμα. Κατά συνέπεια, ο  $-j_\mu A^\mu$  είναι ο μόνος όρος αλληλεπίδρασης. Οι διακυμάνσεις βαθμίδας των ελεύθερων και των αλληλεπιδρώντων Λαγκρανζιανών πυκνοτήτων είναι αντίστοιχα

$$\delta\mathcal{L}_{\text{free}} = e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\Lambda^{\cdot\mu} = j_{\mu}\Lambda^{\cdot\mu} \quad (4.13)$$

και

$$\delta\mathcal{L}_{\text{int}} = -j_{\mu}\delta A^{\mu} = -j_{\mu}\Lambda^{\cdot\mu}. \quad (4.14)$$

Η κανονική κβάντωση για ένα αλληλεπιδρών σύστημα ακολουθεί την ίδια διαδικασία όπως στην περίπτωση δίχως αλληλεπίδραση. Απαιτούνται κανονικές σχέσεις μετάθεσης και/ή αντιμετάθεσης σε ίσες χρονικές στιγμές για τα διάφορα πεδία. Για διαφορετικά πεδία απαιτούνται ίσης χρονικής στιγμής εξαφάνιση των σχέσεων μεταθετικότητας (commutation) (αντιμεταθετικότητας) (anti-commutation) για τα πεδία ακέραιου (ημι-ακέραιου) σπιν, ενώ απαιτούνται μη-δενικές σχέσεις μεταθετικότητας μεταξύ πεδίων ακέραιου σπιν και ημι-ακέραιου σπιν. Συνήθως οι κανονικές σχέσεις μεταθετικότητας μεταξύ των πεδίων δεν αλλάζουν από τις αλληλεπιδράσεις ως προς την ελεύθερη περίπτωση. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει εάν ο όρος αλληλεπίδρασης περιλαμβάνει παράγωγα των πεδίων. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό τις πυκνότητες κανονικής ορμής

$$\Pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{free}}}{\partial\dot{\phi}_i} + \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial\dot{\phi}_i}. \quad (4.15)$$

Για παράδειγμα, για το φορτισμένο βαθμωτό πεδίο προκύπτει

$$\Pi \equiv \Pi_{\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^{\dagger} - ie\phi^{\dagger}A^0, \quad \Pi^{\dagger} = \Pi_{\phi^{\dagger}} = \dot{\phi} + ie\phi A^0. \quad (4.16)$$

Δεδομένου ότι οι κανονικές ορμές περιέχουν τη συνιστώσα χρόνου του πεδίου βαθμίδας, μπορεί να επαληθευθεί ότι οι κανονικοί μεταθέτες μεταξύ των πεδίων και των παραγώγων τους μεταβάλλονται από την αλληλεπίδραση. Επιπλέον οι διαδότες τροποποιούνται. Ωστόσο, δεν θα αναπτυχθεί περισσότερο αυτό το σημείο, διότι στην πράξη δεν έχει συνέπειες για την θεωρία διαταραχών. Όταν δεν υπάρχουν παράγωγες αλληλεπιδράσεις, οι πυκνότητες κανονικής ορμής συμπίπτουν με τις ελεύθερες, και έχω

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}_{\text{free}} - \mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{\text{free}} - \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (4.17)$$

και επομένως

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (4.18)$$

Αυτό συμβαίνει για την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση μεταξύ του πεδίου Dirac και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η αντίστοιχη θεωρία ονομάζεται Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (ΚΗΔ) Quantum Electrodynamics (QED). Υπενθυμίζεται επίσης ότι γενικά η Χαμιλτονιανή Hamiltonian και το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι κανονικά διατεταγμένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε το κενό

να είναι μία ιδιοκατάσταση της ενέργειας και των τελεστών φορτίου με εξαφανισμένες ιδιοτιμές. Επομένως, ο ο όρος αλληλεπίδρασης γράφεται ως

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e : \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi : A^{\mu}. \quad (4.19)$$

Δύναται να επαληθευθεί ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{e}{2} [\bar{\psi}, \gamma_{\mu} \psi] A^{\mu}. \quad (4.20)$$

Για παράδειγμα, αν μελετηθεί το ηλεκτρικό φορτίο όπως ορίζεται έμμεσα στην εξ. (4.20), προκύπτει

$$\begin{aligned} Q &= \frac{e}{2} \int d^3x (\psi^{\dagger} \psi - \gamma_0 \psi \psi^{\dagger} \gamma_0) \\ &= \frac{e}{2} \sum_{\pm n} \int d^3p \left[ b^{\dagger}(p, n) b(p, n) + d(p, n) d^{\dagger}(p, n) \right. \\ &\quad \left. - b(p, n) b^{\dagger}(p, n) - d^{\dagger}(p, n) d(p, n) \right] \\ &= \frac{e}{2} \sum_{\pm n} \int d^3p \left[ 2b^{\dagger}(p, n) b(p, n) - 2d^{\dagger}(p, n) d(p, n) \right. \\ &\quad \left. - [b^{\dagger}(p, n), b(p, n)]_{+} + [d(p, n), d^{\dagger}(p, n)]_{+} \right] =: Q :, \quad (4.21) \end{aligned}$$

αφού οι δύο αντιμεταθέτες απλοποιούνται μεταξύ τους.

## 4.2 Ο Πίνακας Σκέδασης

Οι διαδικασίες σκέδασης αποτελούν κεντρικό στοιχείο της μελέτης των στοιχειωδών σωματιδίων. Στην τυπική διαδικασία σκέδασης τα εισερχόμενα σωματίδια προετοιμάζονται σε κατάσταση συγκεκριμένης ορμής. Τα σωματίδια αυτά αποστέλλονται είτε σε σταθερό στόχο είτε σε άλλη δέσμη που κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Μετά τη σύγκρουση εξετάζονται οι τελικές καταστάσεις που παράγονται από τη διαδικασία σκέδασης. Στην συνηθισμένη κβαντομηχανική, αυτή η κατάσταση περιγράφεται επαρκώς χρησιμοποιώντας συναρτήσεις ελεύθερου κύματος για τις αρχικές και τελικές καταστάσεις. Αυτή η περιγραφή είναι σίγουρα σωστή αν μελετώνται δυναμικά μικρής εμβέλειας. Ωστόσο, στη θεωρία πεδίων, αυτή η αναπαράσταση δεν είναι πραγματικά σωστή, καθώς και σε απουσία των αμοιβαίων αλληλεπιδράσεων, τα σωματίδια αυτοαλληλεπιδρούν ως γνωστόν. Για παράδειγμα, το πραγματικό ηλεκτρόνιο μπορεί να θεωρηθεί ότι περιβάλλεται από ένα σύννεφο φωτονίων που μπορούν να εκπέμπονται και να επαναπορροφούνται. Το θέμα είναι ότι, γενικά, ο αριθμός των σωματιδίων δεν είναι μια διατηρούμενη ποσότητα. Τα σωματίδια μπορούν να δημιουργηθούν και να καταστραφούν και αυτό μπορεί να συμβεί και εκτός της αυστηρής περιοχής αλληλεπίδρασης. Μια αυστηρή αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων δεν θα

ήταν καθόλου τετριμμένη. Ως εκ τούτου, η μελέτη θα περιοριστεί σε μια μάλλον διαισθητική αντιμετώπιση του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά, οι περιορισμοί της μεθόδου θα είναι μάλλον προφανείς, ώστε να μπορεί να δοθεί η βάση για μία πιο εκλεπτυσμένη επεξεργασία. Προς απλοποίηση του θέματος θα γίνει χρήση της αδιαβατικής υπόθεσης (**adiabatic hypothesis**). Αυτό συνίσταται στην μελέτη μιας διαδικασίας σκέδασης με τον ακόλουθο τρόπο.

Σε χρόνο  $t = -\infty$  θα υποθεθεί ότι το σύστημά μπορεί να περιγράφεται με όρους ελεύθερων σωματιδίων, δηλαδή με την αλληλεπίδραση απενεργοποιημένη. Μεταξύ  $t = -\infty$  και ενός χρόνου  $t = -T$ , πολύ πριν τη διεξαγωγή της διαδικασίας σκέδασης, αφήνεται η ζεύξη που περιγράφει την αλληλεπίδραση να αυξηθεί από το μηδέν ως στην πραγματική της τιμή. Στο διάστημα  $-T < t < +T$ , η σύζευξη παραμένει σταθερή και στη συνέχεια από  $t = +T$  και  $t = +\infty$  η ζεύξη επανέρχεται στο μηδέν. Στην πράξη, ορίζεται το μέρος αλληλεπίδρασης της Χαμιλτονιανής ως

$$H_{\text{int}}(t, \epsilon) = e^{-\epsilon|t|} H_{\text{int}}, \quad (4.22)$$

πραγματοποιώντας όλους τους υπολογισμούς και λαμβάνοντας το όριο  $\epsilon \rightarrow 0^+$  στο τέλος. Η συνέπεια αυτής της διαδικασίας έχει αποδειχθεί και θεωρείται γνωστή.

Χρησιμοποιώντας την αδιαβατική υπόθεση μπορεί τώρα να συζητηθεί ο διαταραχτικός υπολογισμός των πλατών σκέδασης. Η διαταραχτική επέκταση θα είναι δυνατή μόνο αν ο όρος αλληλεπίδρασης είναι μικρός. Για παράδειγμα, στην ΚΘΠ η διαταραγμένη επέκταση προκαλεί μια σειρά δυνάμεων στην σταθερά λεπτής υφής  $e^2/4\pi \approx 1/137$ . Επομένως, αν οι συντελεστές της επέκτασης δεν αυξάνονται πάρα πολύ, η επέκταση είναι δικαιολογημένη. Ας ξεκινήσουμε με τις εξισώσεις κίνησης για τις καταστάσεις στην αναπαράσταση Schrödinger

$$i \frac{\partial |\Phi_S(t)\rangle}{\partial t} = H_S |\Phi_S(t)\rangle. \quad (4.23)$$

Θα υποθεθεί επιπλέον ότι έχουμε δύο αλληλεπιδρώντα πεδία  $A$  και  $B$ . Τότε δύναται να γραφθεί

$$H_S = H_S^0 + H_S^I, \quad (4.24)$$

με

$$H_S^0 = H_S^0(A) + H_S^0(B) \quad (4.25)$$

και

$$H_S^I \equiv H_S^I(A, B), \quad (4.26)$$

όπου  $H_S^0(A)$  και  $H_S^0(B)$  είναι οι ελεύθερες Χαμιλτονιανές για τα πεδία  $A$  και  $B$ , και  $H_S^I$  είναι η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης. Αποδεικνύεται βολικό να εισαχθεί μια νέα αναπαράσταση για τα διανύσματα κατάστασης, η αλληλεπιδρούσα αναπαράσταση. Αυτό ορίζεται από τον ακόλουθο μοναδιαίο μετασχηματισμό πάνω στις καταστάσεις και τους τελεστές στην αναπαράσταση Schrödinger

$$|\Phi(t)\rangle = e^{iH_S^0 t} |\Phi_S(t)\rangle, \quad O(t) = e^{iH_S^0 t} O_S e^{-iH_S^0 t}. \quad (4.27)$$

Φυσικά τα στοιχεία πίνακα οποιουδήποτε τελεστή στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης είναι τα ίδια με αυτά στην αναπαράσταση Schrödinger

$$\langle \Phi'(t) | O(t) | \Phi(t) \rangle = \langle \Phi'_S(t) | O_S | \Phi_S(t) \rangle. \quad (4.28)$$

Επιπλέον έχω  $H_S^0 = H^0$ , όπου  $H^0$  είναι η ελεύθερη Χαμιλτονιανή στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης. Σημειώνεται ότι η αναπαράσταση αλληλεπίδρασης συμπίπτει με την αναπαράσταση Heisenberg όταν απενεργοποιείται η αλληλεπίδραση. Στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων υπαγορεύεται από την Χαμιλτονιανή αλληλεπίδραση.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} &= -H_S^0 e^{iH_S^0 t} |\Phi_S(t)\rangle + e^{iH_S^0 t} (H_S^0 + H_S^I) |\Phi_S(t)\rangle \\ &= e^{iH_S^0 t} H_S^I e^{-iH_S^0 t} |\Phi(t)\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

από όπου

$$i \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = H^I |\Phi(t)\rangle, \quad (4.30)$$

όπου  $H^I$  είναι η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδραση στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης. Από την άλλη, οι τελεστές εξελίσσονται με την ελεύθερη Χαμιλτονιανή. Άρα, στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης αυτοί συμπίπτουν με τους τελεστές Heisenberg της περίπτωσης που δεν αλληλεπιδρά.

Για να περιγράψουμε μια διαδικασία σκέδασης, θα ανατεθεί στο διάνυσμα της κατάστασης μία συνθήκη στο  $t = -\infty$

$$|\Phi(-\infty)\rangle \equiv |\Phi_i\rangle, \quad (4.31)$$

όπου η κατάσταση  $\Phi_i$  θα καθοριστεί με την αντιστοίχιση του συνόλου των εισερχόμενων ελεύθερων σωματιδίων σε όρους ιδιοκαταστάσεων ορμής, σπιν και άλλους πιθανούς κβαντικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, στην ΚΘΠ πρέπει να καθοριστούν πόσα ηλεκτρόνια, ποζιτρόνια και φωτόνια βρίσκονται στην αρχική κατάσταση και την στιγμή τους, την προβολή σπιν των φερμιόνων και την πόλωση των φωτονίων. Οι εξισώσεις κίνησης δείχνουν πως αυτή η κατάσταση εξελίσσεται με τον χρόνο και είναι δυνατός ο υπολογισμός της κατάστασης στο  $t = +\infty$ , όπου, ιδανικά, εντοπίζονται οι τελικές καταστάσεις. Στην πράξη, η προετοιμασία και η ανίχνευση διαδικασιών γίνονται σε ορισμένους πεπερασμένους χρόνους. Επομένως, αυτή η ιδανική περιγραφή θα είναι σωστή μόνο αν είναι αυτοί οι χρόνοι πολύ μεγαλύτεροι από τον τυπικό χρόνο αλληλεπίδρασης της διαδικασίας σκέδασης. Μόλις είναι γνωστό  $|\Phi(+\infty)\rangle$ , ενδιαφέρει να αξιολογηθεί το πλάτος πιθανότητας ανίχνευσης στο  $t = +\infty$  για ένα δεδομένο σύνολο ελεύθερων σωματιδίων (βλ. αδιαβατική υπόθεση) που καθορίζεται από

έναν διάνυσμα της κατάστασης  $|\Phi_f\rangle$ . Επομένως, το πλάτος πιθανότητας (ή πλάτος σκέδασης) που ενδιαφέρει είναι

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | \Phi(+\infty) \rangle. \quad (4.32)$$

Θα ορισθεί ο πίνακας  $S$  ως ο τελεστής που δίδει  $|\Phi(+\infty)\rangle$  ωθεν απλιδ το  $|\Phi(-\infty)\rangle$

$$|\Phi(+\infty)\rangle = S|\Phi(-\infty)\rangle. \quad (4.33)$$

Το πλάτος  $S_{fi}$  είναι τότε

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle. \quad (4.34)$$

Προκύπτει ότι το  $S_{fi}$  είναι το στοιχείο πίνακα  $S$  μεταξύ ελεύθερων καταστάσεων. Για τον υπολογισμό του στοιχείου πίνακα  $S$  πρώτα μετασχηματίζεται η εξίσωση Schrödinger στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης σε μία ολοκληρωτική εξίσωση.

$$|\Phi(t)\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle - i \int_{-\infty}^t dt_1 H^I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle. \quad (4.35)$$

Το δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης ικανοποιεί τόσο την εξίσωση Schrödinger όσο και την συνοριακή συνθήκη στο  $t = -\infty$ . Το ανάπτυγμα διαταραχής συνίσταται στον υπολογισμό του  $|\Phi(t)\rangle$  με επανάληψη της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |\Phi(-\infty)\rangle \\ &\quad - i \int_{-\infty}^t dt_1 H^I(t_1) \left[ |\Phi(-\infty)\rangle \right. \\ &\quad \left. - i \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H^I(t_2) |\Phi(t_2)\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Συνεχίζοντας την επανάληψη προκύπτει

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= \left[ 1 - i \int_{-\infty}^t dt_1 H^I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H^I(t_1) H^I(t_2) \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] |\Phi(-\infty)\rangle. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Φυσικά αυτό έχει νόημα μόνο αν το ανάπτυγμα συγκλίνει και στο όριο για  $t = +\infty$  προκύπτει το ανάπτυγμα διαταραχής για τον πίνακα  $S$

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \\ &\quad \times [H^I(t_1) H^I(t_2) \cdots H^I(t_n)]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Επιπλέον, η έκφραση αυτή δύναται να γραφθεί σε όρους  $T$  γινομένων

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T(H^I(t_1) \cdots H^I(t_n)). \quad (4.39)$$

Το  $T$  γινόμενο  $n$  όρων σημαίνει ότι οι παράγοντες πρέπει να γράφονται από τα αριστερά προς τα δεξιά σε φθίνοντες χρόνους. Για παράδειγμα, αν

$$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n, \text{ τότε}$$

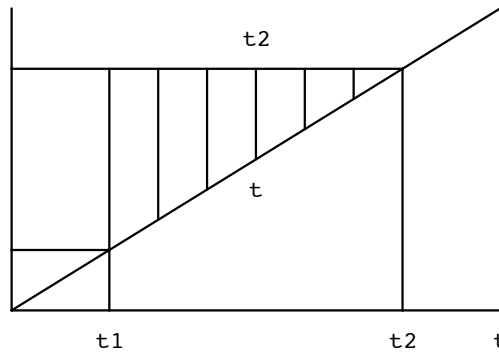
$$T(H^I(t_1) \cdots H^I(t_n)) = H^I(t_1) \cdots H^I(t_n). \quad (4.40)$$

Η ισότητα των δύο εκφράσεων (4.38) και (4.39) ισχύει όρο προς όρο. Ως παράδειγμα, ας μελετηθεί  $n = 2$  στην εξ. (4.39) για πεπερασμένα  $t_1$  και  $t_2$ . Ο όρος αυτός γράφεται

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} dt ds T(H^I(t)H^I(s)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt H^I(t) \left( \int_{t_1}^t ds H^I(s) \right) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \int_t^{t_2} ds H^I(s) \right) H^I(t). \end{aligned} \quad (4.41)$$

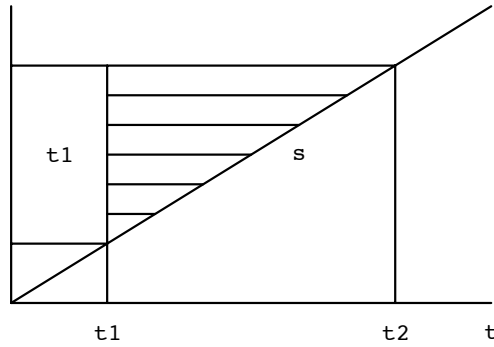
Στα Σχήματα 4.1 και 4.2 φαίνεται άμεσα ότι με ανταλλαγή των αλληλεπιδράσεων πάνω στα  $s$  και  $t$  προκύπτει

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_t^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s dt. \quad (4.42)$$



Σχήμα 4.1: Η εικόνα αναπαριστά σχηματικά το ολοκλήρωμα  $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_t^{t_2} ds$ .





Σχήμα 4.2: Η εικόνα αναπαριστά σχηματικά το ολοκλήρωμα  $\int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s dt$ .

Συνεπώς

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t ds H^I(t)H^I(s) + \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s dt H^I(s)H^I(t) \quad (4.43)$$

και με ανταλλαγή του  $s \leftrightarrow t$  στο δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$A = 2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t ds H^I(t)H^I(s). \quad (4.44)$$

Αφήνοντας το  $t_2 \rightarrow +\infty$  και το  $t_1 \rightarrow -\infty$  αποδεικνύεται η ισότητα των  $n = 2$  όρων στην (4.38) και (4.39).

Το αποτέλεσμα για τον  $n^{\text{th}}$  όρο της σειράς μπορεί να ληφθεί με εντελώς ανάλογο τρόπο.

Δεδομένου ότι ο πίνακας  $S$  συνδέει το σύνολο των ελεύθερων καταστάσεων στο  $t = -\infty$  με ένα σύνολο ελεύθερων καταστάσεων στο  $t = +\infty$ , αυτό θα πρέπει να αντιπροσωπεύει απλώς μια αλλαγή βάσης και ως τέτοια πρέπει να είναι μοναδιαία. Από αυτή την άποψη, η μοναδιαία (unitary) ιδιότητα του πίνακα  $S$  είναι πολύ σημαντική επειδή έχει να κάνει με τις θεμελιώδεις ιδιότητες της κβαντομηχανικής. Έτσι πρέπει αυτό να ελεγχθεί επίσημα <sup>1</sup> η έκφραση (4.39) αναπαριστά μοναδιαίο τελεστή. Προς απόδειξη αυτού του σημείου ξαναγράφεται ο πίνακας  $S$  στην μορφή

$$S = T\left(e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H^I(t)}\right). \quad (4.45)$$

<sup>1</sup>Η παρατήρηση αυτή αναφέρεται στο γεγονός ότι δεν είναι γνωστό πραγματικά αν η σειρά για τον πίνακα  $S$  συγκλίνει ή όχι

η οποία είναι συμβολική και ορίζεται από το ανάπτυγμα σειράς της

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} T \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dt H^I(t) \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \cdots dt_n T(H^I(t_1) \cdots H^I(t_n)). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Το κίνητρο για την εισαγωγή του  $T$  διατεταγμένου εκθετικού είναι ότι ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα παραγοντοποίησης

$$T \left( e^{\int_{t_1}^{t_3} O(t) dt} \right) = T \left( e^{\int_{t_2}^{t_3} O(t) dt} \right) T \left( e^{\int_{t_1}^{t_2} O(t) dt} \right). \quad (4.47)$$

Προς απόδειξη αυτής της σχέσης πρώτα μελετάται η εξής έκφραση ( $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ )

$$\begin{aligned} &T \left( \int_{t_1}^{t_3} O(t) dt \right)^n \equiv \int_{t_1}^{t_3} \cdots \int_{t_1}^{t_3} ds_1 \cdots ds_n T(O(s_1) \cdots O(s_n)) \\ &= \left( \int_{t_2}^{t_3} + \int_{t_1}^{t_2} \right) \left( \int_{t_2}^{t_3} + \int_{t_1}^{t_2} \right) \cdots \left( \int_{t_2}^{t_3} + \int_{t_1}^{t_2} \right) ds_1 \cdots ds_n T(O(s_1) \cdots O(s_n)) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \int_{t_2}^{t_3} \cdots \int_{t_2}^{t_3} ds_1 \cdots ds_{n-k} \\ &\quad \times \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} dz_1 \cdots dz_k T(O(s_1) \cdots O(s_{n-k}) O(z_1) \cdots O(z_k)) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \int_{t_2}^{t_3} \cdots \int_{t_2}^{t_3} ds_1 \cdots ds_{n-k} T(O(s_1) \cdots O(s_{n-k})) \\ &\quad \times \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} dz_1 \cdots dz_k T(O(z_1) \cdots O(z_k)). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Στον τελευταίο όρο έχει χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι όλες τις φορές  $z_i$  είναι μικρότερα από τις φορές  $s_i$ . Άρα, έχει δειχθεί η σχέση

$$\begin{aligned} T \left( \int_{t_1}^{t_3} dt O(t) \right)^n &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &\quad \times T \left( \int_{t_2}^{t_3} dt O(t) \right)^{n-k} T \left( \int_{t_1}^{t_2} dt O(t) \right)^k \end{aligned} \quad (4.49)$$

Η ιδιότητα παραγοντοποίησης (4.47) έπεται άμεσα από την ανάλογη ιδιότητα για το συνηθισμένο εκθετικό,

$$e^a + b = e^a e^b, \quad (4.50)$$

έπεται από το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$e^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^k, \quad (4.51)$$

χρησιμοποιώντας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \quad (4.52)$$

και αντικαθιστώντας το  $k$  με  $h = n - k$  στην εξ. (4.51). Επειδή η εξ. (4.49) γενικεύει τη διωνυμική φόρμουλα σε  $T$  γινόμενα δυνάμεων χρονικών ολοκληρωμάτων των τελεστών, με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τον τύπο (4.47). Με αυτήν την ιδιότητα δύναται τώρα να αποδειχθεί η unitarity κάθε τελεστή της μορφής

$$U = T \left( e^{-i \int_{t_i}^{t_f} dt O(t)} \right), \quad (4.53)$$

με  $O(t)$  ερμιτιανό τελεστή. Για το σκοπό αυτό θα διαιρεθεί το χρονικό διάστημα  $(t_i, t_f)$  σε  $N$  απειροελάχιστα διαστήματα  $\Delta t$  με

$$t_i \equiv t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N = t_f, \quad (4.54)$$

τότε μπορεί να γραφθεί

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i\Delta t O(t_N)} e^{-i\Delta t O(t_{N-1})} \dots e^{-i\Delta t O(t_1)}, \quad (4.55)$$

από όπου

$$U^\dagger = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{+i\Delta t O(t_1)} e^{+i\Delta t O(t_2)} \dots e^{+i\Delta t O(t_N)} \quad (4.56)$$

και η unitarity έπεται άμεσα.

Ας σημειωθεί ότι αν δεν υπάρχουν παράγωγες αλληλεπιδράσεις, τότε είναι

$$S = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H^I(t)} \right) = T \left( e^{+i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}} \right). \quad (4.57)$$

Από αυτή την έκφραση μπορεί να αποδειχθεί ότι η αναλλοιώτητα Lorentz της θεωρίας συνεπάγεται την αναλλοιώτητα του πίνακα  $S$ . Επειδή σε μια σχετικιστική θεωρία η Λαγκρανζιανή είναι Lorentz αναλλοίωτη, η προηγούμενη δήλωση θα ήταν τετριμμένη εκτός για την παρουσία του  $T$  γινομένου στην έκφραση του πίνακα  $S$ . Για λόγους απλότητας, ας εξετάσθει η συνεισφορά δεύτερης τάξης (αλλά το επιχείρημα ισχύει για οποιαδήποτε τάξη)

$$\int d^4x_1 d^4x_2 [\theta(x_1^0 - x_2^0) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)]. \quad (4.58)$$

Το  $T$  γινόμενο είναι Lorentz αναλλοίωτο για time-like διαχωρισμό των δύο τελεστών αφού ένας γνήσιος μετασχηματισμός Lorentz δεν μπορεί να αλλάξει το πρόσημο της χρονικής συνιστώσας του τετραδιανύσματος. Από την άλλη, γίνεται ολοκλήρωση πάνω στα  $x_1$  και  $x_2$  και ο διαχωρισμός μεταξύ των δύο σημείων μπορεί να είναι είτε space-like είτε time-like. Στους space-like διαχωρισμούς, και υποθέτοντας ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι μία τοπική συνάρτηση των πεδίων, προκύπτει ότι

$$[\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1), \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2)] = 0 \quad \text{for} \quad (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad (4.59)$$

και συνεπώς για  $(x_1 - x_2)^2 < 0$  προκύπτει ότι

$$T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)\mathcal{L}_{\text{int}}(x_2)) = \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)\mathcal{L}_{\text{int}}(x_2). \quad (4.60)$$

Αυτό δείχνει ότι το  $T$  γινόμενο τοπικών τελεστών αναλλοίωτων μετασχηματισμών Lorentz είναι Lorentz αναλλοίωτο. Ο υπολογισμός του διαδότη για ένα βαθμωτό πεδίο αποτελεί παράδειγμα αυτής της ιδιότητας.

### 4.3 Το Θεώρημα του Wick

Στην προηγούμενη ενότητα δείχθηκε ότι ο πίνακας  $S$  μπορεί να υπολογισθεί σε όρους με στοιχεία πίνακα των  $T$  γινομένων. Όπως θα δειχθεί στις εφαρμογές, τα στοιχεία πίνακα του πίνακα  $S$  μεταξύ καταστάσεων ελεύθερων σωματιδίων μπορούν με τη σειρά τους να εκφράζονται ως τιμές προσδοκίας κενού (vacuum expectation values (VEVs)) των  $T$  γινομένων. Αυτές οι τιμές προσδοκίας κενού (VEVs) ικανοποιούν ένα σημαντικό θεώρημα που οφείλεται στον Wick που δηλώνει ότι η τιμή προσδοκίας κενού (VEV) ενός  $T$  γινομένου ενός αυθαίρετου αριθμού ελεύθερων πεδίων (αυτά που εμφανίζονται στην αναπαράσταση αλληλεπίδρασης) μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμοί από τιμές προσδοκίας κενού VEVs  $T$  γινομένων μεταξύ δύο πεδίων, δηλαδή σε όρους με διαδότες Feynman. Για να αποδειχθεί το θεώρημα θα χρησιμοποιηθεί η τεχνική της δημιουργίας συναρτησιακών. Δηλαδή η απόδειξη θα αρχίσει με την εξής ταυτότητα

$$\begin{aligned} T\left(\exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x))\right) &=: \exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x)) : \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y)\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle\right), \end{aligned} \quad (4.61)$$

όπου  $\phi(x)$  είναι ένα ελεύθερο πραγματικό βαθμωτό πεδίο και  $j(x)$  μία συνηθισμένη πραγματική συνάρτηση. Αυτός ο τύπος μπορεί εύκολα να επεκταθεί στα φορτισμένα βαθμωτά πεδία, και πεδία φερμιονίων και φωτονίων. Το θεώρημα του Wick αποκτάται στη συνέχεια επεκτείνοντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης αυτής στις δυνάμεις του  $j(x)$  και λαμβάνοντας την VEV και των δύο πλευρών. Θα ξεκινήσω αναπτύσσοντας την αριστερή πλευρά του (4.61),

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα παραγοντοποίησης στην εξ. (4.47). Επιπλέον, θα ορισθεί

$$O(t) = \int d^3x j(x)\phi(x) \quad (4.62)$$

και παρατηρείται ότι για τα ελεύθερα πεδία το  $[O(t), O(t')]$  είναι απλώς ένας συνηθισμένος αριθμός (ο οποίος ονομάζεται  $c$  αριθμός, για να αντιπαραβληθεί με τους τελεστές που ονομάζονται  $q$  αριθμοί). Διαχωρίζοντας ξανά το διάστημα  $(t_i, t_f)$  σε  $N$  τεμάχια πλάτους  $\Delta t$  όπως και στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτει

$$T\left(\exp\left(-i \int_{t_i}^{t_f} dt O(t)\right)\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp(-i\Delta t O(t_N)) \exp(-i\Delta t O(t_{N-1})) \cdots \times \exp(-i\Delta t O(t_1)) \quad (4.63)$$

και χρησιμοποιώντας

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A+B) \exp\left(+\frac{1}{2}[A, B]\right), \quad (4.64)$$

που ισχύει αν το  $[A, B]$  μετατίθεται με τα  $A$  και  $B$ , και είναι

$$\begin{aligned} T\left(\exp\left(-i \int_{t_i}^{t_f} dt O(t)\right)\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=3}^N \exp(-i\Delta t O(t_i)) \\ &\times \exp(-i\Delta t(O(t_2) + O(t_1))) \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta t^2 [O(t_2), O(t_1)]\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=4}^N \exp(-i\Delta t O(t_i)) \exp(-i\Delta t(O(t_3) + O(t_2) + O(t_1))) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta t^2 [O(t_3), O(t_2) + O(t_1)] - \frac{1}{2}\Delta t^2 [O(t_2), O(t_1)]\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-i\Delta t \sum_{i=1}^N O(t_i)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta t^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} [O(t_j), O(t_i)]\right) \\ &= \exp\left(-i \int_{t_i}^{t_f} dt O(t)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 dt_2 \theta(t_1 - t_2) [O(t_1), O(t_2)]\right), \quad (4.65) \end{aligned}$$

από όπου

$$\begin{aligned} T\left(\exp\left(-i \int d^4x j(x)\phi(x)\right)\right) &= \exp\left(-i \int d^4x j(x)\phi(x)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y)\theta(x_0 - y_0)[\phi(x), \phi(y)]\right). \quad (4.66) \end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να επεκταθεί το πρώτο εκθετικό στο δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής σε κανονικά γινόμενα. Είναι

$$\begin{aligned} \exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x)) &= \exp(-i \int d^4x j(x)(\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))) \\ &= \exp(-i \int d^4x j(x)\phi^{(-)}(x)) \exp(-i \int d^4x j(x)\phi^{(+)}(x)) \\ &\times \exp(+\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y)[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)]), \end{aligned} \quad (4.67)$$

όπου έχει γίνει χρήση ξανά της εξ. (4.64). Οπότε

$$\begin{aligned} \exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x)) &=: \exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x)) : \\ &\times \exp(+\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y)[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)]). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (4.66)

$$\begin{aligned} T\left(\exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x))\right) &=: \exp(-i \int d^4x j(x)\phi(x)) : \\ &\times \exp(+\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y)A(x, y)), \end{aligned} \quad (4.69)$$

όπου

$$A(x, y) = [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] - \theta(x_0 - y_0)[\phi(x), \phi(y)] \quad (4.70)$$

Αυτό είναι ένας  $c$  αριθμός επειδή περιέχει μεταθέτες των ελεύθερων πεδίων, και επομένως μπορεί να υπολογισθεί λαμβάνοντας την VEV του

$$A(x, y) = \langle 0 | [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] - \theta(x_0 - y_0)[\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle. \quad (4.71)$$

Επειδή  $\phi^{(+)}|0\rangle = 0$ , μπορεί να γραφθεί

$$\begin{aligned} A(x, y) &= -\langle 0 | [\phi(y)\phi(x) + \theta(x_0 - y_0)\phi(x)\phi(y) - \theta(x_0 - y_0)\phi(y)\phi(x)] | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | [\theta(y_0 - x_0)\phi(y)\phi(x) + \theta(x_0 - y_0)\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Αυτό αποδεικνύει την ταυτότητά ( ρεφ 8.61). Ας επεκταθούν τώρα οι δύο πλευρές αυτής της ταυτότητας σε μια σειρά  $j(x)$  και ας συγκριθούν όρο προς όρο. Θα χρησιμοποιηθεί ο απλοποιημένος συμβολισμός  $\phi_i \equiv \phi(x_i)$ . Είναι

$$T(\phi) = : \phi :, \quad (4.73)$$

$$T(\phi_1\phi_2) = : \phi_1\phi_2 : + \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle, \quad (4.74)$$

$$T(\phi_1\phi_2\phi_3) = : \phi_1\phi_2\phi_3 : + \sum_{i \neq j \neq k=1}^3 : \phi_i : \langle 0|T(\phi_j\phi_k)|0\rangle, \quad (4.75)$$

$$T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + \sum_{i \neq j \neq k \neq l=1}^4 \left[ : \phi_i\phi_j : \langle 0|T(\phi_k\phi_l)|0\rangle + \langle 0|T(\phi_i\phi_j)|0\rangle \langle 0|T(\phi_k\phi_l)|0\rangle \right] \quad (4.76)$$

και ανάλογες εκφράσεις για υψηλότερης τάξης μονώνυμα στο βαθμωτό πεδίο. Λαμβάνοντας την VEV αυτών των εκφράσεων, και υπενθυμίζοντας ότι η VEV ενός κανονικού γινομένου είναι μηδέν, προκύπτει το θεώρημα του Wick. Το  $T$  γινόμενο δύο πεδιακών τελεστών ονομάζεται μερικές φορές η συστολή **contraction** των δύο τελεστών. Επομένως, για να υπολογισθεί η VEV ενός  $T$  γινομένου ενός αυθαίρετου αριθμού ελεύθερων πεδίων, αρκεί να εξεταστούν όλες οι πιθανές συστολές των πεδίων που εμφανίζονται στο  $T$  γινόμενο. Για παράδειγμα, από την τελευταία από τις προηγούμενες σχέσεις έχω

$$\langle 0|T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)|0\rangle = \sum_{i \neq j \neq k \neq l=1}^4 \langle 0|T(\phi_i\phi_j)|0\rangle \langle 0|T(\phi_k\phi_l)|0\rangle. \quad (4.77)$$

Ένα ανάλογο θεώρημα ισχύει για το πεδίο των φωτονίων. Για τα φερμιόνια σημειώνεται ότι το  $T$  γινόμενο ορίζεται με έναν ελαφρώς διαφορετικό τρόπο. Αυτό δίδει ένα αρνητικό πρόσημο κάθε φορά που η μετάθεση των φερμιονικών πεδίων είναι περιττή σε σχέση με την αρχική διάταξη. Ως παράδειγμα, ο προηγούμενος τύπος, στην περίπτωση των φερμιόνων, γίνεται

$$\langle 0|T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)|0\rangle = \sum_{i \neq j \neq k \neq l=1}^4 \sigma_P \langle 0|T(\psi_i\psi_j)|0\rangle \langle 0|T(\psi_k\psi_l)|0\rangle, \quad (4.78)$$

όπου  $\sigma_P = \pm 1$  είναι το πρόσημο της μετάθεσης  $(i, j, k, l)$  ως προς την θεμελιώδη  $(1, 2, 3, 4)$  που εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά. Πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)|0\rangle &= +\langle 0|T(\psi_1\psi_2)|0\rangle \langle 0|T(\psi_3\psi_4)|0\rangle \\ &\quad -\langle 0|T(\psi_1\psi_3)|0\rangle \langle 0|T(\psi_2\psi_4)|0\rangle \\ &\quad +\langle 0|T(\psi_1\psi_4)|0\rangle \langle 0|T(\psi_2\psi_3)|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.79)$$

#### 4.4 Υπολογισμός του Πίνακα Σκέδασης $S$ σε δεύτερη τάξη στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Στην περίπτωση της ΚΘΠ ο πίνακας  $S$  δίδεται από

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(+i)^n}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)), \quad (4.80)$$

με ( βλ. εξ.(4.19) )

$$\mathcal{L}_I = -e : \bar{\psi} \hat{A} \psi :. \quad (4.81)$$

Πρέπει τώρα να κατανοηθεί πως γίνεται χρήση του θεωρήματος του Wick στην πραγματική κατάσταση με τους κανονικά διατεταγμένους τελεστές στο εσωτερικό του  $T$  γινόμενου. Εξετάζονται, για λόγους απλότητας, δύο βαθμωτά πεδία. Από την εξ. (4.74) προκύπτει (σε ίσους χρόνους το  $T$  γινόμενο και το συνηθησμένο γινόμενο συμπίπτουν)

$$\phi_a(x)\phi_b(x) =: \phi_a(x)\phi_b(x) : + \langle 0|T(\phi_a(x)\phi_b(x))|0\rangle, \quad (4.82)$$

από όπου

$$: \phi_a(x)\phi_b(x) := \phi_a(x)\phi_b(x) - \langle 0|T(\phi_a(x)\phi_b(x))|0\rangle. \quad (4.83)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} T(: \phi_a(x)\phi_b(x) : \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)) &= T(\phi_a(x)\phi_b(x)\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)) \\ &- \langle 0|T(\phi_a(x)\phi_b(x))|0\rangle T(\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Επειδή ο δεύτερος όρος αφαιρεί την συστολή μεταξύ των δύο τελεστών που λαμβάνονται στο ίδιο σημείο, μπορεί να γενικευθεί το ανάπτυγμα ή η επέκταση Wick λέγοντας ότι, όταν τα κανονικά γινόμενα περιέχονται μέσα σε ένα  $T$  γινόμενο, ισχύει η επέκταση ή το ανάπτυγμα Wick με τον περαιτέρω κανόνα ότι οι συστολές των τελεστών στο το ίδιο σημείο, μέσα στο κανονικό γινόμενο, εξαφανίζονται. Με αυτή τη σύμβαση μπορεί να γραφθεί

$$\begin{aligned} T(: A(x_1)B(x_1) \cdots : \cdots : A(x_n)B(x_n) \cdots :) \\ = T(A(x_1)B(x_1) \cdots A(x_n)B(x_n) \cdots). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Στην περίπτωση της ΚΘΠ αυτό ισχύει υπενθυμίζοντας ότι ( βλ. τις εξ. (4.19) και (4.20) )



$$: \bar{\psi} \gamma_\mu \psi := \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi] \quad (4.86)$$

και παρατηρώντας ότι, μέσα σε ένα  $T$  γινόμενο, τα πεδία μπορούν να μετατίθενται ελεύθερα, εκτός από το να λαμβάνουν υπόψη τους την στατιστική τους. Επομένως

$$T(: \bar{\psi} \gamma_\mu \psi :) = \frac{1}{2} T([\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]) = T(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi). \quad (4.87)$$

Για την ακόλουθη ανάλυση είναι χρήσιμο να υπενθυμισθεί πως διάφοροι πεδιακοί τελεστές δρουν πάνω στα kets

$$\begin{array}{llllll} \psi^+ & \text{annihilates} & e^-, & \psi^- & \text{creates} & e^+, \\ \bar{\psi}^+ & \text{annihilates} & e^+, & \bar{\psi}^- & \text{creates} & e^-, \\ A^+ & \text{annihilates} & \gamma, & A^- & \text{creates} & \gamma. \end{array} \quad (4.88)$$

Διαχωρίζοντας την  $\mathcal{L}_I$  σε συνιστώσες θετικής και αρνητικής συχνότητας<sup>2</sup>

$$\mathcal{L}_I = -e : (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) (A_\mu^+ + A_\mu^-) \gamma^\mu (\psi^+ + \psi^-) :, \quad (4.89)$$

προκύπτουν 8 όροι με μη-εξαφανιζόμενα ή μη-μηδενικά στοιχεία πίνακα. Για παράδειγμα,

$$: \bar{\psi}_\alpha^+ \hat{A}_{\alpha\beta}^- \psi_\beta^- := -\psi_\beta^- \hat{A}_{\alpha\beta}^- \bar{\psi}_\alpha^+ \quad (4.90)$$

έχει το εξής μη-εξαφανιζόμενο στοιχείο πίνακα

$$\langle e^+ \gamma | \psi^- \hat{A}^- \bar{\psi}^+ | e^+ \rangle. \quad (4.91)$$

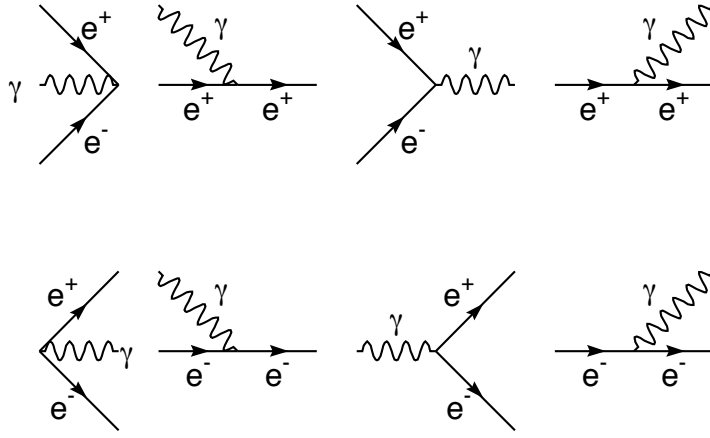
Αυτή η διαδικασία αντιστοιχεί σε ένα ποζιτρόνιο που εκπέμπει ένα φωτόνιο. Αυτή και οι άλλες επτά διαδικασίες, που περιγράφονται από τον πίνακα  $S$  στην πρώτη τάξη στην θεωρία διαταραχών.

$$S^{(1)} = -ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) :. \quad (4.92)$$

αντιπροσωπεύονται από τα διαγράμματα του Σχ. 4.3.

Ωστόσο, καμία από αυτές τις συνεισφορές δεν αντιστοιχεί σε μία φυσικά δυνατή διαδικασία, αφού η τετραορμή δεν διατηρείται. Θαδειχθεί αργότερα ότι η διατήρηση της τετραορμής είναι συνέπεια της θεωρίας. Προς το παρόν θα υποθεθεί και θαδειχθεί ότι για τα πραγματικά σωματίδια (δηλαδή για τα σωματίδια στο μαζικό shell,  $p^2 = m^2$ ) αυτές οι διαδικασίες δεν μπορούν να συμβούν. Για παράδειγμα, ας μελετηθεί

<sup>2</sup>Υπενθυμίζεται ότι το  $e$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο του σωματιδίου με το δικό του πρόσημο. Επομένως, για το ηλεκτρόνιο  $e < 0$ .



Σχήμα 4.3: Διαγράμματα για τις περιγραφόμενες διαδικασίες από το πίνακα  $S$  στην πρώτη τάξη.

$$e^-(p) \rightarrow e^-(p') + \gamma(k), \quad (4.93)$$

Αν η τετραορμή διατηρείται

$$p' = p - k, \quad (4.94)$$

από όπου

$$m'^2 = m^2 - 2p \cdot k, \quad (4.95)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί  $k^2 = 0$  για το φωτόνιο. Στο σύστημα ηρεμίας του αρχικού ηλεκτρονίου λαμβάνεται  $mk_0 = 0$ . Επομένως η διαδικασία είναι δυνατή μόνο για ένα φωτόνιο με εξαφανιζόμενη τετραορμή. Ας εξετασθεί τώρα η συνεισφορά τάξης  $2^{\text{nd}}$

$$S^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left( \bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right). \quad (4.96)$$

Μπορεί να επεκταθεί ο  $S^{(2)}$  χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Wick και ταξινομώντας τις διάφορες συνεισφορές ανάλογα με τον αριθμό των συστολών. Αν συσχετιστεί σε μια συστολή δύο πεδίων στα σημεία  $x_1$  και  $x_2$  ανά γραμμή, προκύπτει ότι οι όροι που προέρχονται από τον  $S^{(2)}$  μπορούν να ληφθούν συνδέοντας μεταξύ τους τα διαγράμματα που απεικονίζονται στο Σχ. 4.3 με όλους τους δυνατούς τρόπους. Σε αυτή την περίπτωση, οι μόνες μή-εξαφανιζόμενες συστολές είναι αυτές μεταξύ  $\psi$  και  $\bar{\psi}$ , και μεταξύ  $A_\mu$  και  $A_\nu$ . Υπενθυμίζοντας ότι

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle &= iS_F(x-y)_{\alpha\beta} \\
\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))|0\rangle &= ig_{\mu\nu}D(x-y), \tag{4.97}
\end{aligned}$$

προκύπτει

$$S^{(2)} = \sum_{i=1}^6 S_i^{(2)}, \tag{4.98}$$

όπου

$$S_1^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2) :, \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
S_2^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)iS_F(x_1-x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2) : \\
&\quad + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : \bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)iS_F(x_2-x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1) : \\
&= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : \\
&\quad \times : \bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)iS_F(x_1-x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2) :, \tag{4.100}
\end{aligned}$$

$$S_3^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)ig^{\mu\nu}D(x_1-x_2)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2) :, \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
S_4^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \\
&\quad \times : \bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu iS_F(x_1-x_2)ig^{\mu\nu}D(x_1-x_2)\gamma_\nu\psi(x_2) : \\
&\quad + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : \bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu iS_F(x_2-x_1)ig^{\mu\nu}D(x_2-x_1)\gamma_\nu\psi(x_1) : \\
&= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \\
&\quad \times : \bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu iS_F(x_1-x_2)ig^{\mu\nu}D(x_1-x_2)\gamma_\nu\psi(x_2) :, \tag{4.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_5^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 (-1) \\
&\quad \times : Tr[iS_F(x_1-x_2)\hat{A}(x_2)iS_F(x_2-x_1)\hat{A}(x_1)] :, \tag{4.103}
\end{aligned}$$

$$S_6^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 (-1) \times Tr[iS_F(x_1 - x_2)\gamma_\mu iS_F(x_2 - x_1)\gamma_\nu ig^{\mu\nu}D(x_2 - x_1)]. \quad (4.104)$$

Ο όρος  $S_1^{(2)}$  δεν είναι παρά το γινόμενο των δύο διαδικασιών τύπου  $S^{(1)}$  και δεν προκαλεί πραγματικές διαδικασίες. Ο όρος  $S_2^{(2)}$  λαμβάνεται συστέλοντας δύο φερμιονικά πεδία, που σημαίνει ότι συνδέεται μια γραμμή φερμιόνων με δύο από τις κορυφές του Σχ. 4.3. Τα πιθανά εξωτερικά σωματίδια είναι δύο  $\gamma$ , δύο  $e^-$ , δύο  $e^+$  ή ένα ζευγάρι  $e^+e^-$ . Επιλέγοντας τις εξωτερικές καταστάσεις μπορούν να ληφθούν διαφορετικά φυσικές διαδικασίες.

## 4.5 Διαγράμματα Feynman στον Χώρο των Ορμών

Σε ένα σύνηδες πείραμα στοιχειωδών σωματιδίων μία ή δύο δέσμες σωματιδίων με προκαθορισμένες ορμές προπαρασκευάζονται και οι ορμές των τελικών καταστάσεων μετρώνται. Για αυτό είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί ο χώρος των ορμών. Οι εκφράσεις για τους διαδότες φερμιονίων και φωτονίων είναι

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} S_F(p) \quad (4.105)$$

και

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} D(p), \quad (4.106)$$

όπου

$$S_F(p) = \frac{1}{\hat{p} - m + i\epsilon} \quad (4.107)$$

και

$$D(p) = -\frac{1}{p^2 + i\epsilon}. \quad (4.108)$$

Η δράση του μέρους θετικής συχνότητας των  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  και  $A_\mu$  πάνω στις καταστάσεις ενός σωματιδίου μπορεί να υπολογισθεί από το ανάπτυγμα των πεδίων σε όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Έτσι, προκύπτει

$$\psi^+(x)|e^-(p, r)\rangle = \sum_{\pm s} \int d^3k \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_k}} e^{-ikx} u(k, s) b(k, s) b^\dagger(p, r) |0\rangle, \quad (4.109)$$

όπου οι δείκτες  $r, s$  σημαίνουν την πόλωση των φερμιονίων. Τότε, χρησιμοποιώντας

$$\left[ b(k, s), b^\dagger(p, r) \right]_+ = \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{k}), \quad (4.110)$$

Έπεται ότι

$$\psi^+(x) |e^-(p, r)\rangle = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_k}} u(p, r) e^{-ipx} |0\rangle. \quad (4.111)$$

Θα χρησιμοποιηθεί η κανονικοποίηση στο κουτί, παρά η συνεχής, αφού είναι βολικότερη για τις εφαρμογές που μελετώνται. Αυτό ισοδυναμεί με την αντικατάσταση

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (4.112)$$

και με την χρήση διακριτών ορμών  $\vec{p} = (2\pi/L)^3 \vec{n}$ . Έτσι, προκύπτει

$$\psi^+(x) |e^-(p, r)\rangle = \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p, r) e^{-ipx} |0\rangle, \quad (4.113)$$

$$\bar{\psi}^+(x) |e^+(p, r)\rangle = \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \bar{v}(p, r) e^{-ipx} |0\rangle \quad (4.114)$$

και για το φωτόνιο

$$A_\mu^+(x) |\gamma(k, \lambda)\rangle = \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} |0\rangle. \quad (4.115)$$

Παίρνοντας τους συζυγείς αυτών των εκφράσεων προκύπτει η δράση των τελεστών αρνητικής συχνότητας πάνω στα διανύσματα bra. Για παράδειγμα, ως εξετασθεί η διαδικασία που έχει σχέση με τον  $S^{(1)}$

$S^{(1)}$

$$|i\rangle = |e^-(p)\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-(p'), \gamma(k)\rangle. \quad (4.116)$$

Από την (4.92) προκύπτει ότι<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= -ie \int d^4x \langle e^-(p'), \gamma(k) | \bar{\psi}^-(x) A_\mu^-(x) \gamma^\mu \psi^+(x) | e^-(p) \rangle \\ &= -ie \int d^4x \left( \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \bar{u}(p') e^{ip'x} \right) \\ &\quad \times \left( \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \hat{\epsilon}^*(k) e^{ikx} \right) \left( \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p) e^{-ipx} \right) \\ &= \frac{-iem}{\sqrt{V^3 E_p E_{p'} 2E_k}} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k - p) \bar{u}(p') \hat{\epsilon}^*(k) u(p). \quad (4.117) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Σημειώνεται ότι τα διανύσματα πόλωσης των φωτονίων μπορεί να είναι πραγματικά, όπως στην γραμμική πόλωση ή μιγαδικά όπως στην κυκλική πόλωση.

Αυτή η έκφραση γράφεται και ως

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k - p) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \mathcal{M}, \quad (4.118)$$

όπου η ποσότητα

$$\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\hat{\epsilon}^*(k)u(p) \quad (4.119)$$

λέγεται αναλλοίωτο πλάτος ή πλάτος Feynman για την διαδικασία. Σημειώνεται ότι η  $\mathcal{M}$  είναι Lorentz αναλλοίωτη ποσότητα. Ο όρος  $(2\pi)^4 \delta^4(p' + k - p)$  δίδει την διατήρηση της τετραορμής στην διαδικασία, ενώ οι άλλοι παράγοντες σχετίζονται με διάφορα εξωτερικά σωματίδια, τόσο εισερχόμενα, όσο και εξερχόμενα. Αυτή η διαδικασία δεν είναι δυνατή στην Φυσική, αφού δεν ακολουθεί την διατήρηση της τετραορμής.

Η δομή αυτή είναι αρκετά γενική και για κάθε διαδικασία μία συνάρτηση δέλτα που εκφράζει την διατήρηση της τετραορμής εμφανίζεται. Επιπροσθέτως, υπάρχουν παράγοντες όπως η  $\sqrt{m/VE_p}$  για κάθε εξωτερικό φερμιόνιο και  $\sqrt{1/2VE_k}$  για κάθε μποζόνιο. Τώρα θα παρουσιαστούν οι κανόνες για τον υπολογισμό του αναλλοίωτου πλάτους  $\mathcal{M}$ . Για αυτό το σκοπό μελετάται η σκέδαση Compton

$$|i\rangle = |e^-(p), \gamma(k)\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-(p'), \gamma(k')\rangle. \quad (4.120)$$

Το στοιχείο πίνακα  $S$  για την σκέδαση Compton δίδεται στις εξ. (6.1), (6.2) και (6.3)

$$S_2^{(2)}(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b \quad (4.121)$$

και

$$\begin{aligned} \langle f|S_a|i\rangle &= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\ &\quad \times \bar{u}(p') e^{ip'x_1} \hat{\epsilon}^*(k') e^{ik'x_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x_1 - x_2)} S_F(q) \\ &\quad \times \hat{\epsilon}(k) e^{-ikx_2} u(p) e^{-ipx_2} \\ &= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\ &\quad \times e^{i(p' + k' - q)x_1} e^{-i(p + k - q)x_2} \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \\ &\quad \times \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{i}{\hat{q} - m + i\epsilon} \gamma^\nu u(p) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\ &\quad \times \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p). \quad (4.122) \end{aligned}$$

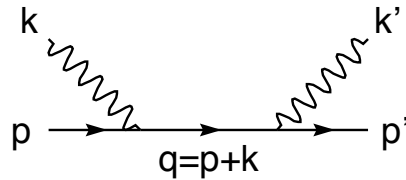
Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση, δύναται να είναι

$$\langle f|S_a|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \mathcal{M}_a, \quad (4.123)$$

με

$$\mathcal{M}_a = \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\hat{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p), \quad q = p + k. \quad (4.124)$$

Το διάγραμμα του Σχ. σχετίζεται με την έκφραση 6.2.



Σχήμα 4.4: Συνεισφορά s-channel στην σκέδαση Compton.

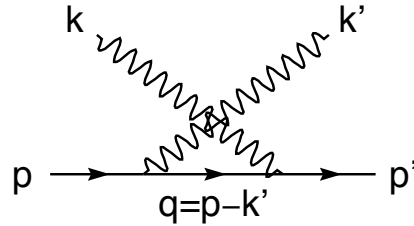
Η τετραορμή  $q$  υπολογίζεται από την διατήρηση της τετραορμής στις κορυφές:  $q = p + k = p' + k'$ . Ωστόσο, σημειώνεται ότι γενικώς είναι  $q^2 = m^2 + 2p \cdot k \neq m^2$ , δηλαδή το ανταλλαγμένο σωματίδιο, που περιγράφεται από τον διαδότη, δεν είναι ένα πραγματικό σωματίδιο αλλά εικονικό (**virtual**). Από τις εκφράσεις προκύπτει άμεσα πως τα διάφορα κομμάτια συνδέονται με τα στοιχεία του διαγράμματος. Πιο συγκεκριμένα ισχύουν οι εξής κανόνες για κάθε δεδομένο διάγραμμα Feynman:

- Γράψε το πλάτος ξεκινώντας από τα εξερχόμενα σωματίδια,
- Για κάθε κορυφή υπάρχει ένας παράγοντας  $-ie\gamma_\mu$ ,
- Για κάθε εσωτερικό φερμιονική γραμμή υπάρχει ένας παράγοντας  $iS_F(p)$  φερμιονικός διαδότης (Fermion Propagator),
- Για κάθε εσωτερική ή/και εξωτερική φερμιονική γραμμή υπάρχει ένας παράγοντας  $u(p)$  και/ή  $\bar{u}(p)$ ,
- Για κάθε εσωτερική ή/και εξωτερική φωτονική γραμμή υπάρχει ένας παράγοντας  $\epsilon_\mu^\lambda$  ή ο μιγαδικός συζυγής του για εξωτερικά φωτόνια αν μελετάται μιγαδική πόλωση όπως η κυκλική.

Σημειώνεται επιπλέον ότι οι σπινωριακοί παράγοντες ξεκινούν από τις τελικές καταστάσεις και τελειώνουν με τις αρχικές. Η επιπλέον συνεισφορά στην

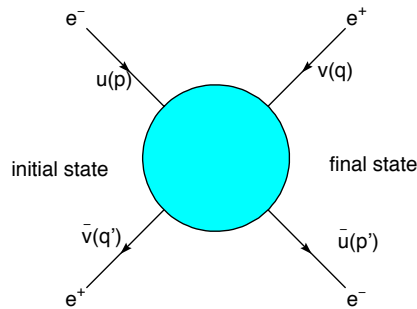
σκέδαση Compton που δίδεται από την  $S_b$  αντιστοιχεί στο διάγραμμα του Σχ. 6.3, και χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους κανόνες, έχω

$$\mathcal{M}_b = \bar{u}(p')(-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\hat{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma_\nu) u(p) \epsilon^\mu(k) \epsilon^\nu(k'), \quad q = p - k'. \quad (4.125)$$



Σχήμα 4.5: Η συνεισφορά t-channel στην σκέδαση Compton.

Το πλάτος σκέδασης Compton για τα ποζιτρόνια πρέπει να συσχετίζει τα  $\bar{v}(p)$ ,  $v(p)$  στις αρχικές και τελικές καταστάσεις αντίστοιχα. Αυτό φαίνεται από την εξ. (4.114) που δείχνει ότι ο τελεστής καταστροφής για τα ποζιτρόνια σχετίζεται με το  $\bar{v}(p)$ . Για αυτό τον λόγο όταν σχεδιάζονται τα διαγράμματα στον χώρο των ορμών είναι συνήθως βολικότερο να αντιστραφεί η κατεύθυνση των ποζιτρονικών γραμμών, με τέτοιο τρόπο ώστε να ακολουθούν τον κανόνα που συσχετίζει σπίνορες δίχως bar (unbarred spinors) με εισερχόμενες φερμιονικές γραμμές και σπίνορες με bar (barred spinors) με εξερχόμενες γραμμές (βλ. Σχ. 4.6).



Σχήμα 4.6: Οι σπινωριακές συμβάσεις για αντιφερμιόνια.

Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζεται προσοχή στην κατεύθυνση των ορμών που ρέουν προς μία κατεύθυνση αντίθετη ως προς το βέλος της περίπτωσης των αντισωματιδίων. Όσο για τις εσωτερικές γραμμές, δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ σωματιδίων και αντισωματιδίων. Άρα, τα βέλη γενικώς σχεδιάζονται με τρόπο



συνεπή με την ροή των ορμών. Ας μελετηθεί τώρα η σκέδαση  $e^-e^-$  που δίδει ακόμη έναν κανόνα για τα διαγράμματα Feynman. Τα διαγράμματα για αυτήν την διαδικασία είναι στο Σχ. 4.7 και το στοιχείο πίνακα δίδεται από

$$\langle f|S_3^{(2)}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \prod_{i=1}^4 \sqrt{\frac{m}{VE_i}} \mathcal{M}, \quad (4.126)$$

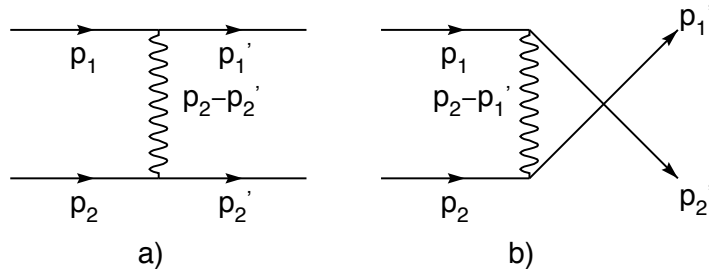
όπου  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$ , με

$$\mathcal{M}_a = \bar{u}(p'_1)(-ie\gamma_\mu)u(p_1)ig^{\mu\nu}D(p_2 - p'_2)\bar{u}(p'_2)(-ie\gamma_\nu)u(p_2) \quad (4.127)$$

και

$$\mathcal{M}_b = -\bar{u}(p'_2)(-ie\gamma_\mu)u(p_1)ig^{\mu\nu}D(p_2 - p'_1)\bar{u}(p'_1)(-ie\gamma_\nu)u(p_2). \quad (4.128)$$

Το σχετικό (-) πρόσημο προέρχεται από την ανταλλαγή των δύο ηλεκτρονίων στην τελική κατάσταση, δηλαδή από την στατιστική Fermi.



Σχήμα 4.7: Διαγράμματα Feynman για την σκέδαση  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ .

Από αυτό το παράδειγμα λαμβάνεται ένας ακόμη κανόνας για τα διαγράμματα Feynman

- Για κάθε εσωτερική φωτονική γραμμή υπάρχει ένας παράγοντας  $ig^{\mu\nu}D(p)$  διαδότης.

Ως τελευταίο σχετικό παράδειγμα μελετάται η αυτο-ενέργεια ηλεκτρονίου (electron self-energy)

$$|i\rangle = |e^-(p)\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-(p')\rangle, \quad (4.129)$$

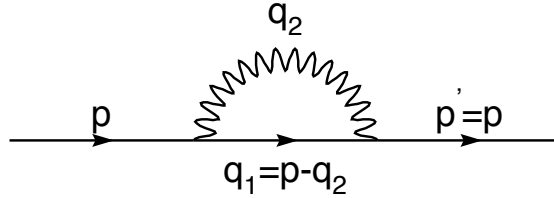
Το στοιχείο πίνακα  $S$  είναι

$$\begin{aligned}
\langle f|S_4^{(2)}|i\rangle &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \bar{u}(p') e^{ip'x_1} \\
&\times \gamma_\mu \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} e^{-iq_1(x_1 - x_2)} iS_F(q_1) \\
&\times \gamma_\nu \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} e^{-iq_2(x_1 - x_2)} iD(q_2) u(p) e^{-ipx_2} \\
&= \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p' - q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(p - q_1 - q_2) \\
&\times \bar{u}(p') (-ie\gamma_\mu) iS_F(q_1) (-ie\gamma_\nu) u(p) ig^{\mu\nu} D(q_2) \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p) \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \mathcal{M}, \tag{4.130}
\end{aligned}$$

όπου στον τελευταίο όρο έγινε ολοκλήρωση πάνω στο  $q_1$ . Το  $\mathcal{M}$  δίδεται από

$$\mathcal{M} = \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') (-ie\gamma_\mu) iS_F(p - q_2) (-ie\gamma_\nu) u(p) ig^{\mu\nu} D(q_2), \tag{4.131}$$

που αντιστοιχεί στο διάγραμμα του Σχ. 4.8.



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα Feynman για την αυτο-ενέργεια ηλεκτρονίου (electron self-energy).

Έπεται ότι ο κανόνας διατήρησης της τετραορμής είναι πάντα έγκυρος και επιπλέον ότι πρέπει να ολοκληρωθεί με το  $d^4q/(2\pi)^4$  πάνω σε όλες τις ορμές που δεν βρίσκονται από την αρχή διατήρησης. Για την γενική περίπτωση είναι βολικότερο να διατυπωθεί ο εξής κανόνας:

- Για κάθε κορυφή υπάρχει ένας σαφής παράγοντας  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_{\text{ent}} p_{\text{ent}})$ , όπου  $p_{\text{in}}$  είναι οι ορμές που εισέρχονται στην κορυφή,
- Ολοκλήρωσε όλες τις εσωτερικές ορμές,  $p_{\text{int}}$ , με το  $d^4p_{\text{int}}/(2\pi)^4$ .

Με αυτόν τον τρόπο ο παράγοντας  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{\text{ext}})$  παράγεται αυτόματα. Αυτός ο κανόνας επαληθεύεται στην περίπτωση για την αυτο-ενέργεια ηλεκτρονίου (electron self-energy).

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p) (2\pi)^4 \delta^4(p' - q_1 - q_2) \\ = (2\pi)^4 \delta^4(p' - p) \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Ως τελευταίο κανόνα έχω

- Έναν παράγοντα  $(-1)$  για κάθε φερμιονικό βρόχο.



## Κεφάλαιο 5

# Ενεργές Διατομές

Έστω η διαδικασία σκέδασης με ένα σύνολο από αρχικά σωματίδια με τετραορμές  $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$  που συγκρούονται και παράγουν ένα σύνολο από τελικά σωματίδια με τετραορμές  $p_f = (E_f, \vec{p}_f)$ . Από γνωστούς κανόνες ισχύει ότι κάθε εξωτερική φωτονική γραμμή συνεισφέρει με ένα παράγοντα  $(1/2VE)^{1/2}$ , ενώ κάθε εξωτερική φερμιονική γραμμή συνεισφέρει με ένα παράγοντα  $(m/VE)^{1/2}$ . Επιπλέον, η διατήρηση της συνολικής τετραορμής δίδει έναν όρο  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i - \sum_f p_f)$ . Αν απομονωθεί στον πίνακα  $S$  ο όρος  $\delta_{fi}$  που δεν αντιστοιχεί σε συμβάντα σκέδασης, τότε μπορεί να γραφεί

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) \times \prod_{\text{ferm}} \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \prod_{\text{bos}} \left(\frac{1}{2VE}\right)^{1/2} \mathcal{M}, \quad (5.1)$$

όπου  $\mathcal{M}$  είναι το πλάτος Feynman το οποίο μπορεί να υπολογισθεί σχεδιάζοντας το αντίστοιχο διάγραμμα Feynman.

Ας εξετασθεί η περίπτωση σύγκρουσης δύο σωματιδίων που δίδει  $N$  σωματίδια στην τελική κατάσταση. Η πιθανότητα της μετάβασης είναι το τετράγωνο του μέτρου του δεύτερου όρου στην εξίσωση (5.1), αφού εξετάζεται η περίπτωση όπου η τελική κατάσταση είναι διαφορετική από την αρχική. Στις πράξεις προκύπτει το τετράγωνο του Dirac delta που δεν είναι μία ορισμένη ποσότητα. Ωστόσο, η κβάντωση της θεωρίας γίνεται σε ένα κουτί και θεωρείται το σύστημα για ένα πεπερασμένο, αλλά μεγάλο, χρονικό διάστημα που παραμετροποιείται ως  $(-T/2, T/2)$ . Επομένως, πρακτικά ενδιαφέρει περισσότερο η  $(P_{i(f)} = \sum_{i(f)} p_{i(f)})$  από την συνάρτηση δέλτα.

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \rightarrow \int_V d^3x \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(P_f - P_i)x}. \quad (5.2)$$

Ας θεωρηθεί τώρα ένας από τους παράγοντες που φαίνονται σε αυτή την εξίσωση, για παράδειγμα το χρονικό ολοκλήρωμα. Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$(\Delta E = E_f - E_i)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\Delta E t} = \frac{2 \sin(T\Delta E/2)}{\Delta E}. \quad (5.3)$$

και υπολογίζοντας το τετράγωνο του μέτρου

$$|(2\pi)\delta(E_f - E_i)|^2 \rightarrow \frac{4 \sin^2(T\Delta E/2)}{(\Delta E)^2}. \quad (5.4)$$

Στο δεξιό μέλος είναι μία συνάρτηση  $\Delta E$ , του οποίου το ολοκλήρωμα κρατάει  $2\pi T$ , και έχει μία κορυφή στο  $\Delta E = 0$ . Άρα, καθώς  $T \rightarrow \infty$  προκύπτει η δέλτα συγκλίνουσα ακολουθία

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4 \sin^2(T\Delta E/2)}{(\Delta E)^2} = 2\pi T \delta(E_f - E_i). \quad (5.5)$$

Όμοια, για τα χωρικά ολοκληρώματα, προκύπτει

$$\left| (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \right|^2 \rightarrow (2\pi)^4 L^3 T \delta^4(P_f - P_i), \quad (5.6)$$

όπου  $L$  είναι η πλευρά του όγκου  $V = L^3$ . Επομένως, η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου της μετάβασης είναι

$$w = V (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \prod_i \frac{1}{2VE_i} \prod_f \frac{1}{2VE_f} \prod_{\text{ferm}} (2m) |\mathcal{M}|^2. \quad (5.7)$$

Για ευκολία έχει γραφεί

$$\frac{m}{VE} = (2m) \frac{1}{2VE}. \quad (5.8)$$

το  $w$  δίνει την πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου της μετάβασης προς μία κατάσταση με καλώς ορισμένους κβαντικούς αριθμούς, αλλά ενδιαφέρουν περισσότερο οι τελικές καταστάσεις που έχουν ορμές μεταξύ  $\vec{p}_f$  και  $\vec{p}_f + d\vec{p}_f$ . Επειδή στον όγκο  $V$  η ορμή δίδεται από  $\vec{p} = 2\pi\vec{n}/L$ , ο αριθμός των τελικών καταστάσεων είναι

$$\left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3p. \quad (5.9)$$

Η ενεργός διατομή ορίζεται ως η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου διαιρεμένη από την ροή των εισερχομένων σωματιδίων (ο αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας και μονάδα χρόνου) και έχει διαστάσεις τετραγωνισμένου μήκους

$$\begin{aligned} [\text{cross - section}] &= [\text{Probability per unit time/Flux}] \\ &= [t^{-1}/(\ell^{-2}t^{-1})] = [\ell^2]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Η ροή δίδεται από την σχετική ταχύτητα των δύο δεσμίδων ή την ταχύτητα της δέσμης την στιγμή της σκέδασης πάνω σε έναν σταθερό στόχο, επί την πυκνότητα των σωματιδίων,  $\rho$ :

$$v_{\text{rel}}\rho = v_{\text{rel}}/V, \quad (5.11)$$

αφού στην προκειμένη κανονικοποίηση υπάρχει ένα σωματίδιο στον όγκο  $V$ , και  $v_{\text{rel}}$  είναι η σχετική ταχύτητα των εισερχομένων σωματιδίων. Για τα μποζόνια αυτό προκύπτει από την συνθήκη κανονικοποίησης. Για φερμιόνια, στην κανονικοποίηση κουτιού, η κυματοσυνάρτηση είναι

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{EV}} u(p) e^{-ipx}, \quad (5.12)$$

από όπου προκύπτει ότι ο συνολικός αριθμός σωματιδίων στον όγκο  $V$  είναι μονάδα:

$$\int_V d^3x |\psi(x)|^2 = \int_V d^3x \frac{m}{VE} u^\dagger(p) u(p) = 1. \quad (5.13)$$

Η ενεργός διατομή για τις τελικές καταστάσεις με ορμές μεταξύ  $\vec{p}_f$  και  $\vec{p}_f + d\vec{p}_f$  δίδεται από

$$d\sigma = w \frac{V}{v_{\text{rel}}} dN_F = w \frac{V}{v_{\text{rel}}} \prod_f \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3}. \quad (5.14)$$

Προκύπτει

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{V}{v_{\text{rel}}} \left( \prod_f \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3} \right) V (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \frac{1}{4V^2 E_1 E_2} \\ &\times \prod_f \frac{1}{2VE_f} \prod_{\text{ferm}} (2m) |\mathcal{M}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{\text{rel}}} \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \prod_{\text{ferm}} (2m) |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Τονίζεται ότι η εξάρτηση από την χβάντωση του όγκου  $V$  απαλείφεται, όπως πρέπει άλλωστε, στην τελική κατάσταση. Επιπλέον, η συνολική ενεργός διατομή που προκύπτει από την ολοκλήρωση της προηγούμενης έκφρασης πάνω σε όλες τις τελικές ορμές είναι Lorentz αναλλοίωτη. Μάλιστα, και οι δύο παράγοντες  $\mathcal{M}$  και  $d^3p/2E$  είναι αναλλοίωτοι. Επιπροσθέτως,

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2}, \quad (5.16)$$

αλλά στο ΑΣΑ όπου το σωματίδιο 2 είναι σε ηρεμία (ΑΣΑ εργαστηρίου) είναι  $p_2 = (m_2, \vec{0})$  και  $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1$ , από όπου

$$\begin{aligned}
E_1 E_2 |\vec{v}_{\text{rel}}| &= E_1 m_2 \frac{|\vec{p}_1|}{E_1} = m_2 |\vec{p}_1| = m_2 \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \\
&= \sqrt{m_2^2 E_1^2 - m_1^2 m_2^2} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Όπου και αυτός ο παράγοντας είναι Lorentz αναλλοίωτος.

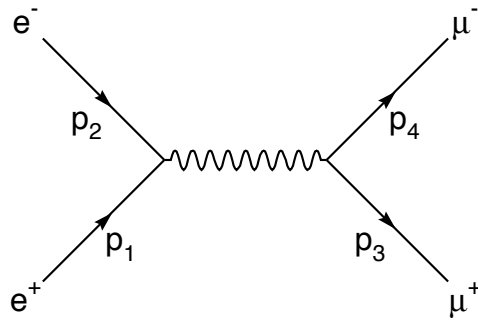


## 5.1 Η Σκέδαση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

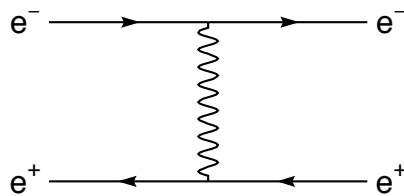
Επί την βάση των προηγούμενων τεχνικών, θα μελετηθεί τώρα η διαδικασία  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι <sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_I = -e \left[ \bar{\psi}_e \gamma^\lambda \psi_e + \bar{\psi}_\mu \gamma^\lambda \psi_\mu \right] A_\lambda, \quad (5.18)$$

όπου  $\psi_e$  και  $\psi_\mu$ , είναι τα πεδία ηλεκτρονίου και μιονίου <sup>2</sup>. Το σχήμα 5.1 αναπαριστά το διάγραμμα Feynman για αυτή την διαδικασία στην δεύτερη τάξη (στο διάγραμμα τα βέλη προσανατολίζονται σύμφωνα με την κατεύθυνση των ορμών). Τονίζεται ότι σε αντίθεση με την διαδικασία  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  το διάγραμμα στο ενεργό κανάλι, Σχήμα 5.2, τώρα δεν εμφανίζεται.



Σχήμα 5.1: Το διάγραμμα Feynman για την σκέδαση  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .



Σχήμα 5.2: Το ενεργό διάγραμμα για την σκέδαση  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

<sup>1</sup>Θεωρείται μόνον η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, αμελώντας την συνεισφορά λόγω της ανταλλαγής του διανυσματικού μποζονίου  $Z$ .

<sup>2</sup>Το μόνιο είναι ένα σωματίδιο με σπιν και ηλεκτρικό φορτίο ίδιο με αυτό του ηλεκτρονίου, αλλά η μάζα του είναι 105.66 Mev, δηλαδή περίπου 200 φορές η μάζα του ηλεκτρονίου.

Το πλάτος Feynman είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \bar{u}(p_4, r_4)(-ie\gamma_\mu)v(p_3, r_3)\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2}\bar{v}(p_1, r_1)(-ie\gamma_\nu)u(p_2, r_2) \\ &= ie^2\bar{u}(p_4, r_4)\gamma_\mu v(p_3, r_3)\frac{1}{(p_1 + p_2)^2}\bar{v}(p_1, r_1)\gamma^\mu u(p_2, r_2),\end{aligned}\quad (5.19)$$

όπου έχει εισαχθεί η πόλωση των φερμιονίων,  $r_i$  (με την κατεύθυνση του σπιν στο ΑΣΑ ηρεμίας). Συνήθως, ενδιαφέρουν οι μη-πολωμένες ενεργές διατομές. Σε αυτή την περίπτωση, πρέπει οι ενεργές διατομές να αθροισθούν πάνω στις τελικές πολώσεις και να υπολογισθεί η μέση τιμή πάνω στις αρχικές. Με άλλα λόγια, έχει υποτεθεί ότι τόσο οι αρχικές, όσο και οι τελικές καταστάσεις είναι σε στατιστικό μίγμα. Ακολούθως χρειάζεται να υπολογισθεί η εξής ποσότητα

$$X = \frac{1}{4} \sum_{r_i} |\mathcal{M}|^2. \quad (5.20)$$

Χρησιμοποιώντας

$$\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 = \gamma_\mu, \quad (5.21)$$

Μπορεί να γραφεί

$$\mathcal{M}^* = -ie^2\bar{v}(p_3, r_3)\gamma_\mu u(p_4, r_4)\frac{1}{(p_1 + p_2)^2}\bar{u}(p_2, r_2)\gamma^\mu v(p_1, r_1). \quad (5.22)$$

Το πλάτος  $\mathcal{M}$  μπορεί να εκφρασθεί στην ακόλουθη μορφή

$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2} A_\mu^{\text{muons}}(r_3, r_4) A_{\text{electrons}}^\mu(r_1, r_2), \quad (5.23)$$

με

$$\begin{aligned}A_\mu^{\text{muons}} &= \bar{u}(p_4, r_4)\gamma_\mu v(p_3, r_3), \\ A_\mu^{\text{electrons}} &= \bar{v}(p_1, r_1)\gamma_\mu u(p_2, r_2).\end{aligned}\quad (5.24)$$

Επομένως

$$X = \frac{1}{4} \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \sum_{r_1, r_2} \left( A_\mu^{\text{electrons}} A_\nu^{\text{electrons}*} \right) \sum_{r_3, r_4} \left( A_\mu^{\text{muons}} A_\nu^{\text{muons}*} \right). \quad (5.25)$$

Ορίζοντας την ποσότητα

$$\begin{aligned}A_{\mu\nu}^{\text{electrons}} &= \sum_{r_1, r_2} \left( A_\mu^{\text{electrons}} A_\nu^{\text{electrons}*} \right) \\ &= \sum_{r_1, r_2} \bar{v}(p_1, r_1)\gamma_\mu u(p_2, r_2)\bar{u}(p_2, r_2)\gamma_\nu v(p_1, r_1)\end{aligned}\quad (5.26)$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις για τους θετικούς και αρνητικούς προβολικούς τελεστές (projection operators) ενέργειας, προκύπτει

$$A_{\mu\nu}^{\text{electrons}} = Tr \left[ \frac{\hat{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\hat{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma_\nu \right] \quad (5.27)$$

και η ανάλογη ποσότητα για τα μίονια είναι

$$A_{\mu\nu}^{\text{muons}} = Tr \left[ \frac{\hat{p}_4 + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\mu \frac{\hat{p}_3 - m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\nu \right]. \quad (5.28)$$

Για τον υπολογισμό του ίχνους των πινάκων ή μητρώων Dirac θα γίνει χρήση των αλγεβρικών ιδιοτήτων τους. Ας δειχθεί ότι το ίχνος ενός περιττού αριθμού από μητρώα Γάμμα είναι μηδέν. Μάλιστα, για περιττό αριθμό  $n$  είναι

$$\begin{aligned} Tr [\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n] &= Tr [\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \gamma_5 \gamma_5] = Tr [\gamma_5 \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \gamma_5] \\ &= (-1)^n Tr [\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n], \end{aligned} \quad (5.29)$$

όπου έχει γίνει χρήση της κυκλικής ιδιότητας του ίχνους και της μη-μεταθετικότητας των  $\gamma_5$  και  $\gamma_\mu$ . Προφανώς, είναι

$$Tr[1] = 4. \quad (5.30)$$

Επιλέον

$$Tr[\hat{a}\hat{b}] = \frac{1}{2} Tr[\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}] = \frac{1}{2} a_\mu b_\nu Tr([\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+) = 4a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = 4a \cdot b. \quad (5.31)$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας  $\hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} + 2a \cdot b$  μπορεί να υπολογισθεί

$$\begin{aligned} Tr[\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4] &= Tr[(-\hat{a}_2 \hat{a}_1 + 2a_1 \cdot a_2) \hat{a}_3 \hat{a}_4] \\ &= -Tr[\hat{a}_2(-\hat{a}_3 \hat{a}_1 + 2a_1 \cdot a_3) \hat{a}_4] + 8(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) \\ &= Tr[\hat{a}_2 \hat{a}_3(-\hat{a}_4 \hat{a}_1 + 2a_1 \cdot a_4)] - 8(a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + 8(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) \\ &= -Tr[\hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_1] + 8(a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3) - \\ &\quad - 8(a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + 8(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4), \end{aligned} \quad (5.32)$$

δηλαδή

$$Tr[\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4] = 4[(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3)]. \quad (5.33)$$

Αυτή η σχέση μπορεί εύκολα να επεκταθεί, με επαγωγή, στο ίχνος  $2n$   $\gamma$ -μητρώων. Άλλες χρήσιμες ιδιότητες είναι

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \quad (5.34)$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \gamma^\mu = (-\hat{a} \gamma_\mu + 2a_\mu) \gamma^\mu = -2\hat{a} \quad (5.35)$$

και

$$\gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b. \quad (5.36)$$

Τώρα για την προκειμένη διαδικασία, υπολογίζοντας το ίχνος προκύπτει

$$\begin{aligned} A_{\text{electrons}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4m_e^2} \text{Tr}[(\hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_2 \gamma^\nu) - m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= \frac{1}{m_e^2} [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2 + m_e^2)]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Όμοια, προκύπτει

$$A_{\text{muons}}^{\mu\nu} = \frac{1}{m_\mu^2} [p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - g^{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2)]. \quad (5.38)$$

Αντικαθιστώντας στο  $X$  προκύπτει

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 (p_1 + p_2)^4} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad + m_\mu^2 (p_1 \cdot p_2) + m_e^2 (p_3 \cdot p_4) + 2m_e^2 m_\mu^2]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Αυτή η διαδικασία μελετάται σε διατάξεις που λέγονται επιταχυντές, όπου μία δέσμη ηλεκτρονίων και μία ποζιτρονίων, ίδιας ενέργειας, συγκρούονται, και κατόπιν αναζητείται ένα τελικό ζεύγος  $\mu^+ - \mu^-$ . Οπότε, για ευκολία θα γίνει χρήση του ΑΣΑ κέντρου μάζας για το ζεύγος  $e^+ - e^-$ . Θα επιλεγούν οι μεταβλητές ορμής όπως στην 5.3 με

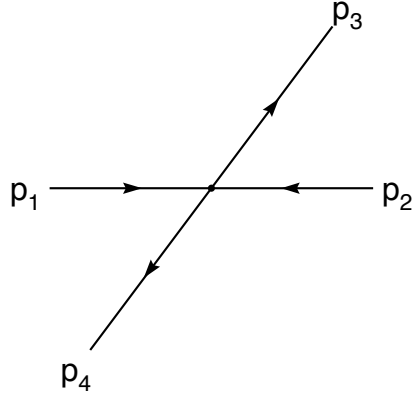
$$p_1 = (E, \vec{p}), \quad p_2 = (E, -\vec{p}), \quad p_3 = (E, \vec{p}'), \quad p_4 = (E, -\vec{p}'). \quad (5.40)$$

Σε αυτό το ΑΣΑ τα βαθμωτά προϊόντα μπορούν να εκφραστούν ως

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = E^2 - pp' \cos \theta, \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = E^2 + pp' \cos \theta, \quad (5.41)$$

$$p_1 \cdot p_2 = E^2 + p^2, \quad p_3 \cdot p_4 = E^2 + p'^2, \quad (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \quad (5.42)$$

όπου  $p = |\vec{p}|$  και  $p' = |\vec{p}'|$ . Για να είναι η διαδικασία κινηματικά δυνατή πρέπει  $E > m_\mu \approx 200 m_e$ . Έπειτα η  $m_e$  μπορεί να αμεληθεί ως προς την  $E$  και  $m_\mu$ , λαμβάνοντας έτσι



Σχήμα 5.3: Η κινηματική της σκέδασης  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2} \frac{1}{16E^4} [(E^2 - pp' \cos \theta)^2 + (E^2 + pp' \cos \theta)^2 + m_\mu^2(E^2 + p^2)] \\
 &= \frac{e^4}{16m_e^2 m_\mu^2} \frac{1}{E^2} [E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2], \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

από όπου

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{e^4}{16m_e^2 m_\mu^2} \frac{1}{E^2} [E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
 &\times \frac{1}{4(E^2 + p^2)} (2m_e)^2 (2m_\mu)^2 \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^6 4E^2} = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
 &\times \frac{e^4}{128\pi^2} \frac{1}{E^6} [E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2] d^3 p_3 d^3 p_4, \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι  $E^2 = p^2$ , αφού έχει αμεληθεί η μάζα του ηλεκτρονίου. Η έκφραση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί πάνω στα  $\vec{p}_4$  και  $|\vec{p}_3|$  χρησιμοποιώντας την διατήρηση των τετραορμών που δίδεται από την συνάρτηση δέλτα. Με χρήση της  $d^3 p_3 = p'^2 dp' d\Omega$  προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int p'^2 dp' \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{e^4}{128\pi^2} \frac{1}{E^6} (E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2) \\
 &= \left[ \frac{\partial(E_3 + E_4)}{\partial p'} \right]^{-1} \frac{e^4}{128\pi^2} \frac{p'^2}{E^6} (E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2). \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

Η παράγωγος μπορεί να υπολογισθεί παρατηρώντας ότι

$$E_3^2 = E_4^2 = m_\mu^2 + p'^2$$

$$\frac{\partial(E_3 + E_4)}{\partial p'} = 2\frac{p'}{E}. \quad (5.46)$$

Χρησιμοποιώντας ότι  $e^2 = 4\pi\alpha$  προκύπτει η διαφορική ενεργός διατομή

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8} \frac{p'^2}{E^6} \frac{E}{2p'} (E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2) = \frac{\alpha^2}{16E^4} \frac{p'}{E} (E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2). \quad (5.47)$$

Στο ακραίο σχετικιστικό όριο  $E \gg m_\mu$  ( $p' \approx E$ ) προκύπτει η έκφραση

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (5.48)$$

από όπου η συνολική ενεργός διατομή είναι

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{16E^2} \int d\Omega (1 + \cos^2 \theta) = \frac{\alpha^2}{16E^2} 2\pi \int_{-1}^1 dw (1 + w^2) = \frac{\alpha^2 \pi}{3E^2}. \quad (5.49)$$

Στην γενική περίπτωση προκύπτει

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\alpha^2}{16E^4} \frac{p'}{E} \int d\Omega (E^2 + p'^2 \cos^2 \theta + m_\mu^2) \\ &= \frac{\pi \alpha^2}{4E^4} \frac{p'}{E} \left( E^2 + \frac{1}{3} p'^2 + m_\mu^2 \right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Στο όριο υψηλών ενεργειών μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί η συνολική ενεργός διατομή. Υπενθυμίζοντας ότι

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0.389 \text{ mbarn}, \quad (5.51)$$

προκύπτει ότι

$$\sigma \approx \frac{5.6 \cdot 10^{-5} (\text{mbarn})}{(E(\text{GeV}))^2} \cdot 0.389 \approx \frac{2.17 \cdot 10^{-5} (\text{mbarn})}{(E(\text{GeV}))^2}, \quad (5.52)$$

ή σε όρους nanobarns,  $1 \text{ nbarn} = 10^{-6} \text{ mbarn}$ ,

$$\sigma \approx \frac{20 (\text{nbarn})}{(E(\text{GeV}))^2}. \quad (5.53)$$

Η ενεργός διατομή  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  είναι πολύ χρήσιμη στον υπολογισμό της αναλογίας

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.54)$$

Όντως, είναι δυνατό ναδειχθεί ότι αυτή η αναλογία, φράζοντας τις διορθώσεις υψηλότερης τάξης, μπορεί να εκφρασθεί στους όρους των φορτίων των στοιχειωδών συστατικών των ανδρονίων(hadrons), δηλαδή τα κουάρκς (quarks).

$$R = \sum_{\text{quarks with } m < E} Q_q^2 + \text{higher order corrections} \quad (5.55)$$

Η μέτρηση του  $R$  έχει αποτελέσει ένα από τα ορόσημα στην προσπάθεια ναδειχθεί η ύπαρξη των κουάρκς και ότι αυτά, εκτός από το ότι έχουν ένα κλασματικό ηλεκτρικό φορτίο, έχουν και άλλο βαθμό ελευθερίας που λέγεται χρώμα (**color**). Κάθε κουάρκ υπάρχει σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις αυτού του επιπλέον βαθμού ελευθερίας.

Τέλος, ας σχολιασθεί η περίπτωση των άμαζων φερμιονίων. Ως γνωστόν, στον υπολογισμό της ενεργού διατομής δεν υπάρχει πρόβλημα στο όριο  $m_e \rightarrow 0$ . Το ίδιο ισχύει και για την  $m_\mu$ . Το θέμα είναι ότι για κάθε παράγοντα  $1/m$  που αναδύεται από τον προβολικό τελεστή, υπάρχει ένας αντίστοιχος παράγοντας  $m$  λόγω της κυματοσυνάρτησης των εξωτερικών φερμιονίων (βλ. εξ. 5.15).





## Κεφάλαιο 6

# Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Στη περίπτωση της Κβαντοηλεκτροδυναμικής πρόβλεψης για την σκέδαση Compton  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$  πρέπει στις  $S_2^{(2)}$ ,  $\psi^+(x_2)$  να επιλεγεί να καταστρέφεται το αρχικό ηλεκτρόνιο και στην  $\bar{\psi}^-(x_1)$  να δημιουργείται το τελικό. Όσον αφορά τα φωτόνια, αφού το  $A_\mu$  είναι πραγματικό πεδίο, μπορεί να καταστρέφεται το αρχικό φωτόνιο τόσο στην  $x_2$  όσο και στην  $x_1$  και να δημιουργείται το τελικό φωτόνιο στο άλλο σημείο. Επομένως, λαμβάνονται δύο συνεισφορές.

$$S_2^{(2)}(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b, \quad (6.1)$$

με

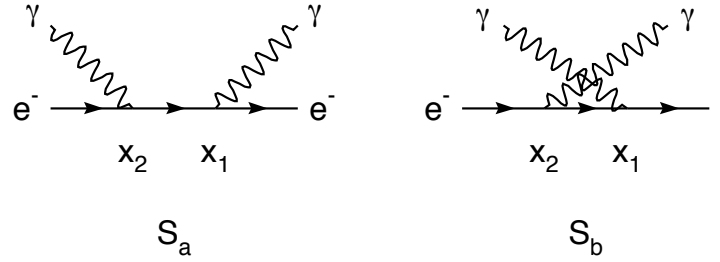
$$S_a = (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu A_\mu^-(x_1) A_\nu^+(x_2) \psi^+(x_2) \quad (6.2)$$

και

$$S_b = (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu A_\nu^-(x_2) A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_2). \quad (6.3)$$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα δίδονται στο Σχήμα 6.1.

Οι όροι που αντιστοιχούν στην σκέδαση Compton για ένα ποζιτρόνιο λαμβάνονται από τις προηγούμενες σχέσεις με αντικατάσταση του  $\psi^+$ , που καταστρέφει ένα ηλεκτρόνιο, με  $\psi^-$ , που δημιουργεί ένα ποζιτρόνιο και  $\bar{\psi}^-$ , που δημιουργεί ένα ηλεκτρόνιο με  $\bar{\psi}^+$  που καταστρέφει ένα ποζιτρόνιο.



Σχήμα 6.1: Διαγράμματα για την σκέδαση Compton

## 6.1 Τα Αθροίσματα Πόλωσης Φωτονίων

Για να τετραγωνίσω το αναλλοίωτο πλάτος  $\mathcal{M}$  πάνω σε όλες τις φυσικές on-shell πολώσεις χρειάζεται ένα τριχ για το άθροισμα πόλωσης φωτονίων. Δεν υπάρχει τρόπος να γραφθεί το άθροισμα πάνω στους εγχάρσιους τρόπους σε Lorentz αναλλοίωτη μορφή, αφού οι μόνοι διαθέσιμοι αδιάστατοι ταυιστές είναι ο  $g_{\mu\nu}$  και  $\frac{p^\nu p^\mu}{p^2}$  αλλά on-shell  $p^2 = 0$  και άρα το  $\frac{p^\nu p^\mu}{p^2}$  είναι αόριστο.

Οι φυσικές πολώσεις δύνανται να ορισθούν ως ορθογώνιες στο  $p^\mu$  και ορθογώνιες σε κάθε άλλο lightlike διάνυσμα αναφοράς  $r^\mu$  όσο το  $r^\mu$  δεν είναι ανάλογο του  $p^\mu$ . Για παράδειγμα, αν  $p^\mu = (E, 0, 0, E)$ , τότε οι κανονικές πολώσεις  $\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$  και  $\epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$  που είναι ορθογώνιες στο  $\bar{p}^\mu = (E, 0, 0, -E)$ . Πιο γενικά, αν  $p^\mu = (E, \vec{p})$ , τότε επιλέγοντας το διάνυσμα αναφοράς ως  $r^\mu = \bar{p}^\mu$  όπου  $\bar{p}^\mu = (E, -\vec{p})$  προσδιορίζει μοναδικά τις δύο εγχάρσιες πολώσεις. Άλλες επιλογές του διανύσματος αναφοράς  $r^\mu$  οδηγούν σε εγχάρσιες πολώσεις που σχετίζονται με τις κανονικές εγχάρσιες πολώσεις με μετασχηματισμούς μικρής ομάδας (μετασχηματισμοί Lorentz που ισχύουν για σταθερό  $p^\mu$ ). Για παράδειγμα, με  $p^\mu = (E, 0, 0, E)$  επιλέγοντας  $r^\mu = (1, 0, 1, 0)$  οδηγεί στο  $\hat{\epsilon}_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$  και  $\hat{\epsilon}_2^\mu = (1, 0, 1, 1)$ . Επειδή  $\hat{\epsilon}_2^\mu = \epsilon_2^\mu + \frac{1}{E}p^\mu$  δεν θα υπάρξει διαφορά στα στοιχεία του πίνακα που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας αυτά τα διαφορετικά σύνολα πόλωσης από την ταυτότητα του Ward. Στην πραγματικότητα, η αναλλοιότητα υπό την αλλαγή του διανύσματος αναφοράς παρέχει ένα σημαντικό περιορισμό στη μορφή που μπορούν να έχουν τα στοιχεία πίνακα. Με την επιλογή  $r^\mu = \bar{p}^\mu$  έχει επαληθευθεί ότι (βλ. σχέση πληρότητας)

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_\mu^{i*} \epsilon_\nu^i = -g_{\mu\nu} + \frac{1}{2E^2} p_\mu \bar{p}_\nu + \bar{p}_\mu p_\nu \quad (6.4)$$

Τώρα, ας υποθεθεί ότι υπάρχει ένα πλάτος που περιλαμβάνει ένα φωτόνιο. Γράφοντας  $\mathcal{M} = \epsilon_\mu M_\mu$ , προκύπτει

$$\sum_i |\mathcal{M}|^2 = \epsilon_\mu^{i*} M_\mu^* M_\nu \epsilon_\nu^i = -M_\mu^* M_\mu + \frac{1}{2E^2} p_\mu M_\mu^* M_\nu \bar{p}_\nu + \bar{p}_\mu M_\mu^* M_\nu p_\nu \quad (6.5)$$

Από την ταυτότητα Ward,  $p^\mu M_\mu = 0$ , και επομένως μπορεί απλά να αντικατασταθεί στις πολώσεις

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_\mu^{i*} \epsilon_\nu^i \rightarrow -g_{\mu\nu} \quad (6.6)$$

σε οποιοδήποτε στοιχείο φυσικού πίνακα. Σημειώνεται ότι αυτή η αντικατάσταση λειτουργεί μόνο για το άθροισμα όλων των σχετικών διαγραμμμάτων, τα μεμονωμένα διαγράμματα δεν είναι αναλλοίωτα κατά βαθμίδα.

## 6.2 Το Στοιχείο Πίνακα

Οι κανόνες για τον υπολογισμό του αναλλοίωτου πλάτους  $\mathcal{M}$  για την σκέδαση Compton είναι

$$|i\rangle = |e^-(p), \gamma(k)\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-(p'), \gamma(k')\rangle. \quad (6.7)$$

Το στοιχείο πίνακα  $S$  για την σκέδαση Compton δίδεται από τις εξ. (6.1), (6.2) και (6.3)

$$S_2^{(2)}(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b \quad (6.8)$$

και

$$\begin{aligned} \langle f|S_a|i\rangle &= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\ &\quad \times \bar{u}(p') e^{ip'x_1} \epsilon^*(k') e^{ik'x_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x_1 - x_2)} S_F(q) \\ &\quad \times \hat{\epsilon}(k) e^{-ikx_2} u(p) e^{-ipx_2} \\ &= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\ &\quad \times e^{i(p' + k' - q)x_1} e^{-i(p + k - q)x_2} \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \\ &\quad \times \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} \gamma^\nu u(p) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\ &\quad \times \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p). \quad (6.9) \end{aligned}$$

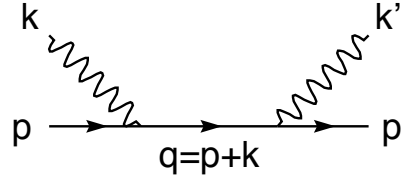
Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση, δύναται να είναι

$$\langle f|S_a|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \mathcal{M}_a, \quad (6.10)$$

με

$$\mathcal{M}_a = \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p), \quad q = p + k. \quad (6.11)$$

Το διάγραμμα του Σχ. σχετίζεται με την έκφραση 6.2.

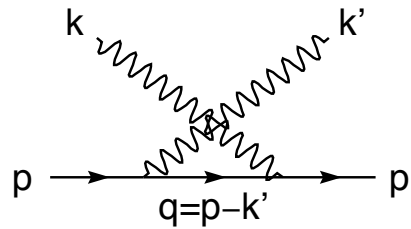


Σχήμα 6.2: Συνεισφορά s-channel στην σκέδαση Compton.

Η τετραορμή  $q$  υπολογίζεται από την διατήρηση της τετραορμής στις κορυφές:  $q = p + k = p' + k'$ . Ωστόσο, σημειώνεται ότι γενικώς είναι  $q^2 = m^2 + 2p \cdot k \neq m^2$ , δηλαδή το ανταλλαγμένο σωματίδιο, που περιγράφεται από τον διαδότη, δεν είναι ένα πραγματικό σωματίδιο αλλά εικονικό (**virtual**). Από τις εκφράσεις προκύπτει άμεσα πως τα διάφορα κομμάτια συνδέονται με τα στοιχεία του διαγράμματος.

Σημειώνεται επιπλέον ότι οι σπινωριακοί παράγοντες ξεκινούν από τις τελικές καταστάσεις και τελειώνουν με τις αρχικές. Η επιπλέον συνεισφορά στην σκέδαση Compton που δίδεται από την  $S_b$  αντιστοιχεί στο διάγραμμα του Σχ. 6.3, και χρησιμοποιώντας τους κανόνες, έχω

$$\mathcal{M}_b = \bar{u}(p') (-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma_\nu) u(p) \epsilon^\mu(k) \epsilon^\nu(k'), \quad q = p - k'. \quad (6.12)$$



Σχήμα 6.3: Η συνεισφορά t-channel στην σκέδαση Compton.

Επιστρέφοντας στη διαδικασία  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  της σκέδασης Compton, υπολογίζεται τώρα, το  $|\mathcal{M}|^2$ , αθροισμένο πάνω στα σπιν και τις πολώσεις. Το  $|\mathcal{M}|^2$  περιλαμβάνει όρους από τα διαγράμματα t-channel και s-channel τετραγωνισμένα καθώς και τους ανάμεικτους όρους τους  $\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_s^* \mathcal{M}_t$ . Για

να φανεί τι εμπλέκεται, ας υπολογισθεί πρώτα ένα κομμάτι στο όριο της υψηλής ενέργειας όπου μπορεί να ορισθεί  $m = 0$ . Στο όριο αυτό μπορεί να εκφρασθεί το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Mandelstam:

$$s = (p_i + k_i)^2, \quad t = (p_f - p_i)^2, \quad u = (p_f - k_i)^2 \quad (6.13)$$

Σημειώνεται ότι οι μεταβλητές αυτές δεν είναι ανεξάρτητες, αφού

$$s + t + u = 0 \quad (6.14)$$

Επομένως, στο όριο αυτό, γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$\mathcal{M}_t = -\frac{e^2}{t} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{4*} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma^\nu u(p_2) \quad (6.15)$$

και χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη σχέση πληρότητας της προηγούμενης παραγράφου είναι

$$\sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{e^4}{t^2} \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma_\mu] \quad (6.16)$$

Θα γίνει τώρα χρήση των  $\gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu = -2\not{p}$  και  $q^\mu = p_2^\mu - p_4^\mu = p_3^\mu - p_1^\mu$

$$\sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = 4 \frac{e^4}{t^2} \text{Tr}[\not{p}_3 \not{q} \not{p}_2 \not{q}] = 16 \frac{e^4}{t^2} (2(p_3 \cdot q)(p_2 \cdot q) - p_{23} q^2) \quad (6.17)$$

και χρησιμοποιώντας ότι  $p_3^2 = p_2^2 = 0$ , δύναται να απλοποιηθεί αυτή, στην

$$\sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = 16 \frac{e^4}{t^2} (2p_{13} p_{24} + 2p_{23} p_{13}) = 8 \frac{e^4}{t^2} (t^2 + ut) = -8e^4 \frac{s}{t} = 8e^4 \frac{p_{12}}{p_{24}} \quad (6.18)$$

Σημειώνεται ότι όλοι οι παράγοντες του  $t$  απλοποιήθηκαν και άρα η απόκλιση στο  $t = 0$  δεν είναι  $\frac{1}{t^2}$  αλλά απλώς  $\frac{1}{t}$ . Συμπεριλαμβανομένων όλων των όρων προκύπτει

$$\mathcal{M} = e^2 \epsilon_\mu^{\text{in}} \epsilon_\nu^{\text{out}*} \bar{u}(p_3) \left[ \frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \right] u(p_2) \quad (6.19)$$

όπου

$$\mathcal{M}_s = e^2 \epsilon_\mu^{\text{in}} \epsilon_\nu^{\text{out}*} \bar{u}(p_3) \left[ \frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} \right] u(p_2) \quad (6.20)$$

και

$$\mathcal{M}_t = e^2 \epsilon_\mu^{\text{in}} \epsilon_\nu^{\text{out}*} \bar{u}(p_3) \left[ \frac{\gamma^\mu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \right] u(p_2) \quad (6.21)$$

Στη συνέχεια, αθροίζοντας / υπολογίζοντας κατά μέσο όρο πάνω στα σπιν και τις πολώσεις, βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left\{ (p_3 + m) \times \left[ \frac{\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} + \frac{\gamma^\mu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \times (p_2 + m) \left[ \frac{\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\nu}{s - m^2} + \frac{\gamma^\nu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\mu}{t - m^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

ή

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left\{ (p_3 + m) \frac{\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} \times (p_2 + m) \frac{\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\nu}{s - m^2} \right. \\ &\quad + (p_3 + m) \frac{\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} \times (p_2 + m) \frac{\gamma^\nu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\mu}{t - m^2} \\ &\quad + (p_3 + m) \frac{\gamma^\mu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \times (p_2 + m) \frac{\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\nu}{s - m^2} \\ &\quad \left. + (p_3 + m) \frac{\gamma^\mu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \times (p_2 + m) \frac{\gamma^\nu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\mu}{t - m^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

που αρχικά περιέχει 144 όρους. Δεδομένου ότι το ίχνος γινομένου περιττού αριθμού πινάκων  $\gamma$  είναι μηδέν, απομένουν μη-μηδενικοί όροι με ίχνος γινομένου τεσσάρων, έξι και οκτώ πινάκων  $\gamma$  αντίστοιχα. Ενδεικτικά, υπολογίζονται οι εξής όροι

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = 16m^4 g^{\nu\mu} g^{\nu\mu} = 64m^4 \end{aligned} \quad (6.24)$$

με παρονομαστή  $4p_{12}^2$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{16m^4}{p_{12}^2}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= 4m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\nu] = 16m^4 g^{\nu\mu} g^{\mu\nu} = 64m^4 \end{aligned} \quad (6.25)$$

με παρονομαστή  $4p_{24}^2$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{16m^4}{p_{24}^2}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= -2m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = -8m^4 g^{\nu\mu} g^{\mu\nu} = -32m^4 \end{aligned} \quad (6.26)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{8m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= -2m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\nu] = -8m^4 g^{\nu\mu} g^{\mu\nu} = -32m^4\end{aligned}\quad (6.27)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{8m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu] = -8p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32m^2 p_2^2 = -32m^4\end{aligned}\quad (6.28)$$

με παρονομαστή  $4p_{12}^2$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{-8m^4}{p_{12}^2}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\ &= 16p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 64m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2 p_2^2 = 64m^4\end{aligned}\quad (6.29)$$

με παρονομαστή  $4p_{12}^2$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{16m^4}{p_{12}^2}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = -8p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32m^2 p_2^2 = -32m^4\end{aligned}\quad (6.30)$$

με παρονομαστή  $4p_{24}^2$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{-8m^4}{p_{24}^2}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu] \\ &= 16p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 64m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2 p_2^2 = 64m^4\end{aligned}\quad (6.31)$$

με παρονομαστή  $4p_{24}^2$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{16m^4}{p_{24}^2}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4\end{aligned}\quad (6.32)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu] \\ &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4\end{aligned}\quad (6.33)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4\end{aligned}\quad (6.34)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\ &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4\end{aligned}\quad (6.35)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= -2p_2^2 p_3^\lambda p_2^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\rho \gamma^\nu] \\ &= -8m^2 p_3^\lambda p_2^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\rho] \\ &= -32m^2 p_3^\lambda p_2^\rho g^{\lambda\rho} = -32m^2 p_{23}\end{aligned}\quad (6.36)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $8m^2 \frac{p_{23}}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] &= p_3^\lambda p_2^2 p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\ &= -2m^2 p_3^\lambda p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\nu] = -8m^2 p_3^\lambda p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\kappa] \\ &= -32m^2 p_{13} = -32m^2 p_{24}\end{aligned}\quad (6.37)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $\frac{8m^2}{p_{12}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] &= -p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu] \\ &= 2p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma^\nu] = -4p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\kappa \gamma^\rho] \\ &= 32p_3 p_4 p_2 p_1 = 32p_{12}^2\end{aligned}\quad (6.38)$$

με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $-8\frac{p_{12}}{p_{24}}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= -p_3^\lambda p_4^\rho p_2^2 \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu] \\ &= 2m^2 p_3^\lambda p_4^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma^\nu] = -4m^2 p_3^\lambda p_4^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\kappa \gamma^\rho] \\ &= -16p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_2^\kappa (g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\rho\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa}) \\ &= -16p_3 p_4 p_2^2 = -16m^2 p_{34} = -16m^2 p_{12}\end{aligned}\quad (6.39)$$



με παρονομαστή  $-4p_{12}p_{24}$  λαμβάνεται ο όρος  $4\frac{m^2}{p_{24}}$   
 Πιο αναλυτικά, είναι

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} (I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22}) \quad (6.40)$$

όπου

$$\begin{aligned} I_{11} &= \text{Tr} \left[ \frac{(p_3 + m)\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m)\gamma^\mu (p_2 + m)\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m)\gamma^\nu}{(s - m^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4p_{12}^2} \text{Tr} [(p_3 + m)\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m)\gamma^\mu (p_2 + m)\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m)\gamma^\nu] \end{aligned} \quad (6.41)$$

αφού

$$\begin{aligned} (s - m^2)^2 &= ((p_1 + p_2)^2 - m^2)^2 = (p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 - m^2)^2 \\ &= (0 + m^2 + 2p_1p_2 - m^2)^2 = 4p_{12}^2 = 4p_{34}^2 \end{aligned} \quad (6.42)$$

και περιέχει τους εξής όρους:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = 16m^4 g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} = 64m^4 \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2\gamma^\mu p_1\gamma^\nu] &= -2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_1 \gamma^\nu] \\ &= -8m^2 \text{Tr}[p_2 p_1] = -32m^2 p_2^\rho p_1^\sigma g^{\rho\sigma} \\ &= -32m^2 p_2 p_1 = -32m^2 p_{12} \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2\gamma^\mu p_2\gamma^\nu] &= -2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_2 \gamma^\nu] \\ &= -8m^2 \text{Tr}[p_2 p_2] = -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\ &= -32m^2 p_2^2 = -32m^4 \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu p_1\gamma^\mu m\gamma^\mu p_1\gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_1 p_1 \gamma^\nu] \\ &= 16m^2 \text{Tr}[p_1 p_1] \\ &= 64m^2 p_1^\rho p_1^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2 p_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu p_1\gamma^\mu m\gamma^\mu p_2\gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_1 p_2 \gamma^\nu] \\ &= 16m^2 \text{Tr}[p_1 p_2] \\ &= 64m^2 p_1^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2 p_{12} \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_1\gamma^\mu p_2\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[p_1\gamma^\mu p_2\gamma^\mu] \\
&= -8m^2\text{Tr}[p_1p_2] \\
&= -32m^2p_1^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32m^2p_{12}
\end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2\gamma^\mu m\gamma^\mu p_1\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[\gamma^\nu p_2p_1\gamma^\nu] \\
&= 16m^2\text{Tr}[p_2p_1] \\
&= 64m^2p_2^\rho p_1^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2p_{12}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2\gamma^\mu m\gamma^\mu p_2\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[\gamma^\nu p_2p_2\gamma^\nu] \\
&= 16m^2\text{Tr}[p_2p_2] = 64m^2p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= 64m^2p_2^2 = 64m^4
\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2\gamma^\mu p_2\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[p_2\gamma^\mu p_2\gamma^\mu] \\
&= -8m^2\text{Tr}[p_2p_2] = -32m^2p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2p_2^2 = -32m^4
\end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\mu p_1\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[p_3\gamma^\nu p_1\gamma^\nu] \\
&= -8m^2\text{Tr}[p_3p_1] = -32m^2p_3^\rho p_1^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2p_{13} = -32m^2p_{24}
\end{aligned} \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\mu p_2\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[p_3\gamma^\nu p_2\gamma^\nu] \\
&= -8m^2\text{Tr}[p_3p_2] = -32m^2p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2p_{23}
\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= -2m^2\text{Tr}[p_3\gamma^\mu p_2\gamma^\mu] \\
&= 4m^2\text{Tr}[p_3p_2] = 16m^2p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2p_{23}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3\gamma^\nu p_1\gamma^\mu m\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= 4m^2\text{Tr}[p_3\gamma^\nu p_1\gamma^\nu] \\
&= -8m^2\text{Tr}[p_3p_1] = -32m^2p_3^\rho p_1^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2p_{13} = -32m^2p_{24}
\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3\gamma^\nu p_1\gamma^\mu p_2\gamma^\mu p_1\gamma^\nu] &= -2\text{Tr}[p_3\gamma^\nu p_1p_2p_1\gamma^\nu] \\
&= 4\text{Tr}[p_3p_1p_2p_1] = 4p_3^\lambda p_1^\sigma p_2^\rho p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\kappa] \\
&= 16p_3^\lambda p_1^\sigma p_2^\rho p_1^\kappa (g^{\lambda\sigma}g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho}g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa}g^{\sigma\rho}) \\
&= 16(p_{13}p_{12} - p_{23}p_1^2 + p_{13}p_{12}) = 32p_{13}p_{12}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_1 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] &= -2\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_1 p_2 p_2 \gamma^\nu] \\
&= 4\text{Tr}[p_3 p_2 p_2 p_1] = 4p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= 16p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_1^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= 16(p_{23}p_{12} - p_{23}p_{12} + p_{13}p_2^2) = 16m^2 p_{13} = 16m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu m \gamma^\mu m \gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\nu] \\
&= -8m^2 \text{Tr}[p_3 p_2] = -32m^2 p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu m \gamma^\mu m \gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\nu] \\
&= -8m^2 \text{Tr}[p_3 p_2] = -32m^2 p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_1 \gamma^\nu] &= -2\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 p_2 p_1 \gamma^\nu] \\
&= 4\text{Tr}[p_3 p_1 p_2 p_2] = 4p_3^\lambda p_1^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= 16p_3^\lambda p_1^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= 16(p_{13}p_2^2 - p_{23}p_{12} + p_{23}p_{12}) = 16m^2 p_{13}
\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] &= -2\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 p_2 p_2 \gamma^\nu] \\
&= 4\text{Tr}[p_3 p_2 p_2 p_2] = 4p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= 16p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= 16(p_{23}p_2^2 - p_{23}p_2^2 + p_{23}p_2^2) = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{4p_{12}^2} (64m^4 - 32m^4 + 64m^4 - 32m^4 - 32m^2 p_{12} + 64m^2 p_{12} \\
&\quad - 32m^2 p_{12} + 64m^2 p_{12} - 32m^2 p_{13} - 32m^2 p_{13} + 16m^2 p_{13} + 16m^2 p_{13} \\
&\quad - 32m^2 p_{23} - 32m^2 p_{23} + 16m^2 p_{23} + 16m^2 p_{23} + 32p_{13}p_{12}) \\
&= \frac{1}{4p_{12}^2} (64m^4 + 64m^2 p_{12} - 32m^2 p_{13} - 32m^2 p_{23} + 32p_{13}p_{12}) \\
&= \frac{8}{p_{12}^2} (2m^4 + 2m^2 p_{12} - m^2 p_{24} - m^2 p_2 (p_1 + p_2 - p_4) + p_{24}p_{12}) \\
&= \frac{8}{p_{12}^2} (2m^4 + 2m^2 p_{12} - m^2 p_{24} - m^2 (p_{12} + m^2 - p_{24}) + p_{24}p_{12}) \\
&= \frac{8}{p_{12}^2} (m^4 + m^2 p_{12} + p_{24}p_{12})
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Ομοίως, όπου

$$I_{22} = \text{Tr}\left[\frac{(p_3 + m)\gamma^\nu(p_2 - p_4 + m)\gamma^\mu(p_2 + m)\gamma^\mu(p_2 - p_4 + m)\gamma^\nu}{(t - m^2)^2}\right] \quad (6.63)$$

$$= \frac{1}{4p_{24}^2} \text{Tr}[(p_3 + m)\gamma^\mu(p_2 - p_4 + m)\gamma^\nu(p_2 + m)\gamma^\nu(p_2 - p_4 + m)\gamma^\mu]$$

αφού

$$(t - m^2)^2 = ((p_2 - p_4)^2 - m^2)^2 = (p_2^2 + p_4^2 - 2p_2p_4 - m^2)^2 \quad (6.64)$$

$$= (m^2 + 0 - 2p_2p_4 - m^2)^2 = 4p_{24}^2 = 4p_{13}^2$$

και περιέχει τους εξής όρους:

$$\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\mu m\gamma^\nu] = m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] \quad (6.65)$$

$$= 4m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = 16m^4 g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} = 64m^4$$

$$\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] = -2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_2 \gamma^\nu] \quad (6.66)$$

$$= -8m^2 \text{Tr}[p_2 p_2] = -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma}$$

$$= -32m^2 p_2^2 = -32m^4$$

$$\text{Tr}[-m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_4 \gamma^\nu] = 2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_4 \gamma^\nu] \quad (6.67)$$

$$= 8m^2 \text{Tr}[p_2 p_4] = 32m^2 p_2^\rho p_4^\sigma g^{\rho\sigma}$$

$$= 32m^2 p_2 p_4 = 32m^2 p_{24}$$

$$\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2 \gamma^\mu m\gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] = 4m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_2 \gamma^\nu] \quad (6.68)$$

$$= 16m^2 \text{Tr}[p_2 p_2] = 64m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma}$$

$$= 64m^2 p_2^2 = 64m^4$$

$$\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_2 \gamma^\mu m\gamma^\mu p_4 \gamma^\nu] = -4m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_4 \gamma^\nu] \quad (6.69)$$

$$= -16m^2 \text{Tr}[p_2 p_4] = -64m^2 p_2^\rho p_4^\sigma g^{\rho\sigma}$$

$$= -64m^2 p_2 p_4 = -64m^2 p_{24}$$

$$\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu] = -2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2 p_2 \gamma^\nu] \quad (6.70)$$

$$= -8m^2 \text{Tr}[p_2 p_2] = -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma}$$

$$= -32m^2 p_2^2 = -32m^4$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_4 \gamma^\mu m \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] &= -4m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_4 p_2 \gamma^\nu] \\
&= -16m^2 \text{Tr}[p_4 p_2] = -64m^2 p_4^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -64m^2 p_2 p_4 = -64m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_4 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu m \gamma^\nu] &= 2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_4 p_2 \gamma^\nu] \\
&= 8m^2 \text{Tr}[p_4 p_2] = 32m^2 p_4^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= 32m^2 p_2 p_4 = 32m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.72}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu m \gamma^\mu m \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\nu] \\
&= -8m^2 \text{Tr}[p_3 p_2] = -32m^2 p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2 p_3 p_2 = -32m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.73}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-p_3 \gamma^\nu m \gamma^\mu m \gamma^\mu p_4 \gamma^\nu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_4 \gamma^\nu] \\
&= 8m^2 \text{Tr}[p_3 p_4] = 32m^2 p_3^\rho p_4^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= 32m^2 p_3 p_4 = 32m^2 p_{34} = 32m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.74}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu m \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu m \gamma^\nu] &= -2m^2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu] \\
&= 4m^2 \text{Tr}[p_3 p_2] = 16m^2 p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu m \gamma^\mu m \gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\nu] \\
&= -8m^2 \text{Tr}[p_3 p_2] = -32m^2 p_3^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -32m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.76}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu] &= -2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 p_2 p_2 \gamma^\nu] \\
&= 4 \text{Tr}[p_3 p_2 p_2 p_2] = 4p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= 16p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= 16(p_{23} p_2^2 - p_{23} p_2^2 + p_{23} p_2^2) = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu p_4 \gamma^\nu] &= 2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 p_2 p_4 \gamma^\nu] \\
&= -4 \text{Tr}[p_3 p_4 p_2 p_2] = -4p_3^\lambda p_4^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= -16p_3^\lambda p_4^\sigma p_2^\rho p_2^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= -16(p_{34} p_2^2 - p_{23} p_{24} + p_{23} p_{24}) = -16m^2 p_{34} = -16m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu m \gamma^\mu m \gamma^\nu] &= -4m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\nu] \\
&= 8m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_4] = 32m^2 p_3^\rho p_4^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= 32m^2 p_{34} = 32m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.79}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= 2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 \not{p}_2 \not{p}_2 \gamma^\nu] \\
&= -4 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_2 \not{p}_2 \not{p}_4] = -4 p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_4^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= -16 p_3^\lambda p_2^\sigma p_2^\rho p_4^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= -16(p_{23} p_{24} - p_{23} p_{24} + p_{34} p_2^2) = -16m^2 p_{34} = -16m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.80}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu] &= -2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 \not{p}_2 \not{p}_4 \gamma^\nu] \\
&= 4 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_4 \not{p}_2 \not{p}_4] = 4 p_3^\lambda p_4^\sigma p_2^\rho p_4^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\kappa] \\
&= 16 p_3^\lambda p_4^\sigma p_2^\rho p_4^\kappa (g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\sigma\rho}) \\
&= 16(p_{34} p_{24} - p_{23} p_4^2 + p_{34} p_{24}) = 32 p_{34} p_{24} = 32 p_{12} p_{24}
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{1}{4p_{24}^2} (64m^4 - 32m^4 + 64m^4 - 32m^4 + 32m^2 p_{24} - 64m^2 p_{24} \\
&\quad - 64m^2 p_{24} + 32m^2 p_{24} - 32m^2 p_{23} + 16m^2 p_{23} - 32m^2 p_{23} + 16m^2 p_{23} \\
&\quad + 32m^2 p_{12} - 16m^2 p_{12} + 32m^2 p_{12} - 16m^2 p_{12} + 32p_{12} p_{24}) \\
&= \frac{1}{4p_{24}^2} (64m^4 - 64m^2 p_{24} - 32m^2 p_{23} + 32m^2 p_{12} + 32p_{12} p_{24}) \\
&= \frac{8}{p_{24}^2} (2m^4 - 2m^2 p_{24} - m^2 p_{23} + m^2 p_{12} + p_{12} p_{24}) \\
&= \frac{8}{p_{24}^2} (2m^4 - 2m^2 p_{24} - m^2 p_2 (p_1 + p_2 - p_4) + m^2 p_{12} + p_{12} p_{24}) \\
&= \frac{8}{p_{24}^2} (2m^4 - 2m^2 p_{24} - m^2 (p_{12} - p_{24} + m^2) + m^2 p_{12} + p_{12} p_{24}) \\
&= \frac{8}{p_{24}^2} (m^4 - m^2 p_{24} + p_{12} p_{24})
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Ομοίως, όπου

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \text{Tr} \left[ \frac{(\not{p}_3 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\mu}{(s - m^2)(t - m^2)} \right] \\
&= -\frac{1}{4p_{12} p_{24}} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\mu]
\end{aligned} \tag{6.83}$$

αφού

$$\begin{aligned}
(s - m^2)(t - m^2) &= ((p_1 + p_2)^2 - m^2)((p_2 - p_4)^2 - m^2) \\
&= (p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 - m^2)(p_2^2 + p_4^2 - 2p_2p_4 - m^2) \\
&= (0 + m^2 + 2p_1p_2 - m^2)(m^2 + 0 - 2p_2p_4 - m^2) = -4p_{12}p_{24}
\end{aligned} \tag{6.84}$$

και περιέχει τους εξής όρους:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
&= -2m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = -8m^4 g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} = -32m^4
\end{aligned} \tag{6.85}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2^\nu p_2^\mu \gamma^\nu] &= -2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2^\nu \gamma^\nu p_2^\mu] \\
&= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\nu p_2^\nu] = 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= 16m^2 p_2^2 = 16m^4
\end{aligned} \tag{6.86}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2^\nu p_4^\mu \gamma^\nu] &= 2m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu p_2^\nu \gamma^\nu p_4^\mu] \\
&= -4m^2 \text{Tr}[p_2^\nu p_4^\nu] = -16m^2 p_2^\rho p_4^\sigma g^{\rho\sigma} \\
&= -16m^2 p_2 p_4 = -16m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.87}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_1^\nu \gamma^\mu m\gamma^\nu p_2^\mu \gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_1^\mu p_2^\mu \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 p_1^\mu \text{Tr}[p_2^\mu \gamma^\nu] = 16m^2 p_1^\mu p_2^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_1 p_2 = 16m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_1^\nu \gamma^\mu m\gamma^\nu p_4^\mu \gamma^\nu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_1^\mu p_4^\mu \gamma^\nu] \\
&= -4m^2 p_1^\mu \text{Tr}[p_4^\mu \gamma^\nu] = -16m^2 p_1^\mu p_4^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= -16m^2 p_1 p_4 = -16m^2 p_{14}
\end{aligned} \tag{6.89}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2^\nu \gamma^\mu m\gamma^\nu p_2^\mu \gamma^\nu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_2^\mu \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_2^\mu \gamma^\nu] = 16m^2 p_2^\mu p_2^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_2^2 = 16m^4
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_2^\nu \gamma^\mu m\gamma^\nu p_4^\mu \gamma^\nu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_4^\mu \gamma^\nu] \\
&= -4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_4^\mu \gamma^\nu] = -16m^2 p_2^\mu p_4^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= -16m^2 p_2 p_4 = -16m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \not{p}_2 \not{p}_2^\nu] \\
&= 4m^2 \not{p}_2^\nu \text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_2] = 16m^2 \not{p}_2^\nu \not{p}_2^\sigma g^{\sigma\nu} \\
&= 16m^2 \not{p}_2^2 = 16m^4
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= -2m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\mu] \\
&= 4m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_2] = 16m^2 \not{p}_3^\rho \not{p}_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu] &= 2m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\mu] \\
&= -4m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_4] = -16m^2 \not{p}_3^\rho \not{p}_4^\sigma g^{\rho\sigma} = -16m^2 p_{34}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2^\nu] \\
&= 4m^2 \not{p}_2^\nu \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu] = 16m^2 \not{p}_2^\nu \not{p}_3^\sigma g^{\nu\sigma} = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= -2m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_1] = 16m^2 \not{p}_3^\rho \not{p}_1^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_{13}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= -2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2] \\
&= -8 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_1^\nu \not{p}_2^\nu \not{p}_2] = -32 \not{p}_1^\nu \not{p}_2^\nu \not{p}_3^\rho \not{p}_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32 p_{12} p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu] &= 2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_2] \\
&= 8 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_1^\nu \not{p}_4^\nu \not{p}_2] = 32 \not{p}_1^\nu \not{p}_4^\nu \not{p}_3^\rho \not{p}_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 32 p_{14} p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= -2m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_2] = 16m^2 \not{p}_3^\rho \not{p}_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= -2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2] \\
&= -8 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_2^\nu \not{p}_2^\nu \not{p}_2] = -32 \not{p}_2^\nu \not{p}_3^\rho \not{p}_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32 m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu] &= 2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_2] \\
&= 8 \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_2^\nu \not{p}_4^\nu \not{p}_2] = 32 \not{p}_2^\nu \not{p}_4^\nu \not{p}_3^\rho \not{p}_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 32 p_{23} p_{24}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Άρα,



$$\begin{aligned}
I_{12} &= -\frac{1}{4p_{12}p_{24}}(-32m^4 + 16m^4 + 16m^4 + 16m^4 - 16m^2p_{24} - 16m^2p_{24} \\
&+ 16m^2p_{12} + 16m^2p_{12} - 16m^2p_{14} + 16m^2p_{23} + 16m^2p_{23} + 16m^2p_{23} \\
&- 32m^2p_{23} - 16m^2p_{34} + 16m^2p_{13} - 32p_{12}p_{23} + 32p_{14}p_{23} + 32p_{24}p_{23}) \\
&= -\frac{1}{4p_{12}p_{24}}(16m^4 - 32m^2p_{24} + 32m^2p_{12} - 16m^2p_{14} \\
&+ 16m^2p_{23} - 16m^2p_{34} + 16m^2p_{13} - 32p_{12}p_{23} + 32p_{14}p_{23} + 32p_{24}p_{23}) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(2p_{24} - 2p_{12} + p_{14} - p_{23} \\
&+ p_{34} - p_{13} + 2p_{12}p_{23} - 2p_{14}p_{23} - 2p_{24}p_{23})) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(2p_{24} - 2p_{12} + (p_3 + p_4 - p_2)p_4 \\
&- (p_{12} - p_{24} + m^2) + p_{12} - p_{24} + 2p_{12}(p_{12} - p_{24} + m^2) \\
&- 2p_{14}(p_{12} - p_{24} + m^2) - 2p_{24}(p_{12} - p_{24} + m^2))) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(-p_{12} + p_{24} - m^2 + 2p_{12}(p_{12} - p_{24} + m^2) \\
&- 2(p_{12} - p_{24})(p_{12} - p_{24} + m^2) - 2p_{24}(p_{12} - p_{24} + m^2))) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(-p_{12} + p_{24} - m^2 + 2(p_{12}^2 - p_{12}p_{24} \\
&+ m^2p_{12} - (p_{12}^2 + p_{24}^2 - 2p_{12}p_{24}) - m^2p_{12} + m^2p_{24} - p_{24}p_{12} + p_{24}^2 - m^2p_{24}))) \\
&= \frac{4m^2}{p_{12}p_{24}}(-p_{12} + p_{24} - m^2)
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Ομοίως, όπου

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \text{Tr} \left[ \frac{(p_3 + m)\gamma^\nu (p_2 - p_4 + m)\gamma^\mu (p_2 + m)\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m)\gamma^\mu}{(t - m^2)(s - m^2)} \right] \\
&= -\frac{1}{4p_{12}p_{24}} \text{Tr} [(p_3 + m)\gamma^\nu (p_2 - p_4 + m)\gamma^\mu (p_2 + m)\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m)\gamma^\mu]
\end{aligned} \tag{6.90}$$

αφού

$$\begin{aligned}
(t - m^2)(s - m^2) &= ((p_2 - p_4)^2 - m^2)((p_1 + p_2)^2 - m^2) \\
&= (p_2^2 + p_4^2 - 2p_2p_4 - m^2)(p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 - m^2) \\
&= (m^2 + 0 - 2p_2p_4 - m^2)(0 + m^2 + 2p_1p_2 - m^2) = -4p_{12}p_{24}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

και περιέχει τους εξής όρους:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
&= -2m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = -8m^4 g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} = -32m^4
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2^\nu p_1^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_1^\mu] \\
&= 4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_1^\mu] = 16m^2 p_2^\mu p_1^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_1 p_2 = 16m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu p_2^\nu p_2^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_2^\mu] \\
&= 4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_2^\mu] = 16m^2 p_2^\mu p_2^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_2^2 = 16m^4
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2^\mu m\gamma^\nu p_1^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_1^\mu] \\
&= 4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_1^\mu] = 16m^2 p_2^\mu p_1^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_1 p_2 = 16m^2 p_{12}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2^\mu m\gamma^\nu p_2^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_2^\mu] \\
&= 4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_2^\mu] = 16m^2 p_2^\mu p_2^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_2^2 = 16m^4
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[m\gamma^\nu p_2^\mu p_2^\nu m\gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu p_2^\mu p_2^\mu] \\
&= 4m^2 p_2^\nu \text{Tr}[p_2^\nu] = 16m^2 p_2^\nu p_2^\sigma g^{\sigma\nu} \\
&= 16m^2 p_2^2 = 16m^4
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_4^\mu m\gamma^\nu p_1^\mu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_4^\mu p_1^\mu] \\
&= -4m^2 p_4^\mu \text{Tr}[p_1^\mu] = -16m^2 p_4^\mu p_1^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= -16m^2 p_1 p_4 = -16m^2 p_{14}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_4^\mu m\gamma^\nu p_2^\mu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_4^\mu p_2^\mu] \\
&= -4m^2 p_4^\mu \text{Tr}[p_2^\mu] = -16m^2 p_4^\mu p_2^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= -16m^2 p_2 p_4 = -16m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-m\gamma^\nu p_4^\mu p_2^\nu m\gamma^\mu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_4^\mu p_2^\mu] \\
&= -4m^2 p_4^\mu \text{Tr}[p_2^\mu] = -16m^2 p_4^\mu p_2^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= -16m^2 p_2 p_4 = -16m^2 p_{24}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu m \gamma^\mu m \gamma^\nu p_1 \gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_1^\nu p_3 \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 p_1^\nu \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu] = 16m^2 p_1^\nu p_3^\sigma g^{\sigma\nu} \\
&= 16m^2 p_1 p_3 = 16m^2 p_{13}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu m \gamma^\mu m \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\nu p_3 \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 p_2^\nu \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu] = 16m^2 p_2^\nu p_3^\sigma g^{\sigma\nu} \\
&= 16m^2 p_2 p_3 = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu m \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu m \gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\nu p_3 \gamma^\nu] \\
&= 4m^2 p_2^\nu \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu] = 16m^2 p_2^\nu p_3^\sigma g^{\sigma\nu} \\
&= 16m^2 p_2 p_3 = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu m \gamma^\nu m \gamma^\mu] &= 4m^2 \text{Tr}[p_2^\mu p_3 \gamma^\mu] \\
&= 4m^2 p_2^\mu \text{Tr}[p_3 \gamma^\mu] = 16m^2 p_2^\mu p_3^\sigma g^{\sigma\mu} \\
&= 16m^2 p_2 p_3 = 16m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu p_1 \gamma^\mu] &= -2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 p_1 \gamma^\nu p_2] \\
&= -8 \text{Tr}[p_3 p_1^\nu p_2^\nu p_2] = -32 p_1^\nu p_2^\nu p_3^\sigma p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32 p_{12} p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu] &= -2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_2 p_2 \gamma^\nu p_2] \\
&= -8 \text{Tr}[p_3 p_2^\nu p_2^\nu p_2] = -32 p_2^\nu p_3^\sigma p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32 m^2 p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-p_3 \gamma^\nu p_4 \gamma^\mu m \gamma^\nu m \gamma^\mu] &= -4m^2 \text{Tr}[p_2^\nu p_3 \gamma^\nu] \\
&= -4m^2 p_4^\nu \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu] = -16m^2 p_4^\nu p_3^\sigma g^{\sigma\nu} \\
&= -16m^2 p_3 p_4 = -16m^2 p_{34}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-p_3 \gamma^\nu p_4 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu p_1 \gamma^\mu] &= 2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_4 p_1 \gamma^\nu p_2] \\
&= 8 \text{Tr}[p_3 p_4^\nu p_1^\nu p_2] = 32 p_4^\nu p_1^\nu p_3^\sigma p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 32 p_{14} p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[-p_3 \gamma^\nu p_4 \gamma^\mu p_2 \gamma^\nu p_2 \gamma^\mu] &= 2 \text{Tr}[p_3 \gamma^\nu p_4 p_2 \gamma^\nu p_2] \\
&= 8 \text{Tr}[p_3 p_4^\nu p_2^\nu p_2] = 32 p_4^\nu p_2^\nu p_3^\sigma p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 32 p_{24} p_{23}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
I_{21} &= -\frac{1}{4p_{12}p_{24}}(-32m^4 + 16m^4 + 16m^4 + 16m^4 - 16m^2p_{24} - 16m^2p_{24} \\
&+ 16m^2p_{12} + 16m^2p_{12} - 16m^2p_{14} + 16m^2p_{23} + 16m^2p_{23} + 16m^2p_{23} \\
&- 32m^2p_{23} - 16m^2p_{34} + 16m^2p_{13} - 32p_{12}p_{23} + 32p_{14}p_{23} + 32p_{24}p_{23}) \\
&= -\frac{1}{4p_{12}p_{24}}(16m^4 - 32m^2p_{24} + 32m^2p_{12} - 16m^2p_{14} \\
&+ 16m^2p_{23} - 16m^2p_{34} + 16m^2p_{13} - 32p_{12}p_{23} + 32p_{14}p_{23} + 32p_{24}p_{23}) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(2p_{24} - 2p_{12} + p_{14} - p_{23} + p_{34} - p_{13} + 2p_{12}p_{23} - 2p_{14}p_{23} - 2p_{24}p_{23})) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(2p_{24} - 2p_{12} + (p_3 + p_4 - p_2)p_4 \\
&- (p_{12} - p_{24} + m^2) + p_{12} - p_{24} + 2p_{12}(p_{12} - p_{24} + m^2) \\
&- 2p_{14}(p_{12} - p_{24} + m^2) - 2p_{24}(p_{12} - p_{24} + m^2))) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(-p_{12} + p_{24} - m^2 + 2p_{12}(p_{12} - p_{24} + m^2) \\
&- 2(p_{12} - p_{24})(p_{12} - p_{24} + m^2) - 2p_{24}(p_{12} - p_{24} + m^2))) \\
&= \frac{4}{p_{12}p_{24}}(-m^4 + m^2(-p_{12} + p_{24} - m^2 + 2(p_{12}^2 - p_{12}p_{24} \\
&+ m^2p_{12} - (p_{12}^2 + p_{24}^2 - 2p_{12}p_{24}) - m^2p_{12} + m^2p_{24} - p_{24}p_{12} + p_{24}^2 - m^2p_{24}))) \\
&= \frac{4m^2}{p_{12}p_{24}}(-p_{12} + p_{24} - m^2) = I_{12}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4}(I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22}) \\
&= \frac{e^4}{4} \left[ \frac{8}{p_{12}^2}(m^4 + m^2p_{12} + p_{24}p_{12}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{p_{24}^2}(m^4 - m^2p_{24} + p_{12}p_{24}) + \frac{8m^2}{p_{12}p_{24}}(-p_{12} + p_{24} - m^2) \right]
\end{aligned} \tag{6.90}$$

και τελικά βρίσκεται ότι

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[ \frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} + 2m^2 \left( \frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}} \right)^2 \right] \tag{6.90}$$

### 6.3 Η Σχέση Klein-Nishina

Η εξαγωγή θα ξεκινήσει με το όριο χαμηλής ενέργειας,  $\omega \ll m$ , όπου έχει νόημα να γίνει στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Τότε

$$\begin{aligned} p_1 &= (\omega, 0, 0, \omega), \\ p_2 &= (m, 0, 0, 0), \\ p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = (E', p'), \\ p_4 &= (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Σημειώνεται ότι η συνθήκη on-shell  $p_3^2 = m^2$  συνεπάγεται ότι

$$0 = p_{12} - p_{14} - p_{24} = \omega m - \omega \omega' (1 - \cos \theta) - m \omega', \quad (6.88)$$

και άρα

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} \quad (6.88)$$

που είναι ο τύπος για τη μετατοπισμένη συχνότητα ως συνάρτηση της γωνίας. Δεν υπάρχει QED σε αυτή τη σχέση, αλλά είναι απλώς η διατήρηση της ορμής και είναι η ίδια με την σχέση του Compton για την μετατόπιση του μήκους κύματος:

$$\Delta \lambda = \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \theta) \quad (6.88)$$

Έπειτα, αφού  $p_{12} = \omega m$  και  $p_{24} = \omega' m$ , προκύπτει μια απλή σχέση για το  $|\mathcal{M}|^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 &= 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (6.88)$$

Τώρα πρέπει να μελετηθεί ο χώρος φάσης. Στο εργαστηριακό σύστημα, και επιστρέφοντας στο γενικό τύπο, είναι

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}} = \frac{1}{4\omega m} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}} \quad (6.88)$$

και

$$\int d\Pi_{\text{LIPS}} = \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} [(2\pi)^4 \delta^4(p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu)] \quad (6.88)$$

Η συνάρτηση  $\delta$  καθορίζει τις 3-ορμές κατά την ολοκλήρωση πάνω στο  $d^3p_4$ , αφήνοντας τον περιορισμό της ενέργειας

$$\int d\Pi_{\text{LIPS}} = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \omega'^2 d\Omega d\omega' \frac{1}{\omega' E'} \delta(\sum E) = \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta d\omega' \frac{\omega'}{E'} \delta(\sum E) \quad (6.88)$$

Τώρα πρέπει να γίνει ολοκλήρωση πάνω στο  $\omega'$  για την επιβολή του ενεργειακού περιορισμού  $E' + \omega' = m + \omega$ . Αλλά τα  $E'$  &  $\omega'$  έχουν ήδη περιορισθεί από την συνθήκη on-shell του ηλεκτρονίου:

$$E'^2 = m^2 + p'^2 = m^2 + (\omega' \sin\theta)^2 + (\omega' \cos\theta - \omega)^2 = m^2 + \omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta. \quad (6.88)$$

Άρα

$$E' \frac{dE'}{\omega'} = \omega' - \omega \cos\theta \quad (6.88)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \int d\Pi_{\text{LIPS}} &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta d\omega' \frac{\omega'}{E'} \delta(\omega' + E'(\omega') - m - \omega) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{\omega'}{E'} \left(1 + \frac{dE'}{d\omega'}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{\omega'}{E'} \left(1 + \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{E'}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{(\omega')^2}{\omega m} \end{aligned} \quad (6.88)$$

όπου το  $\omega'$  τώρα αναφέρεται στην παραπάνω εξίσωση, και όχι στη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Αυτό οδηγεί στο:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{4\omega m} \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (6.88)$$

ή απλούστερα

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (6.88)$$

Αυτή είναι η σχέση Klein-Nishina. Αρχικά υπολογίστηκε από τους Klein και Nishina το 1929 και ήταν μία από τις πρώτες δοκιμές της QED. Αντικαθιστώντας το  $\omega'$  προκύπτει

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left[ 1 + \cos^2\theta - \frac{2\omega}{m} (1 + \cos^2\theta)(1 - \cos\theta) + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^2}{m^2}\right) \right]. \quad (6.88)$$

Σημειώνεται ότι στο όριο  $m \rightarrow \infty$  είναι

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} [1 + \cos^2\theta] \quad (6.88)$$

Αυτή είναι η ενεργός διατομή σκέδασης Thomson για κλασική ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Έχουν έτσι υπολογισθεί οι πλήρεις σχετικιστικές διορθώσεις.

## 6.4 Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Στη συνέχεια, εξετάζεται το αντίθετο όριο,  $\omega \gg m$ . Στο όριο αυτό δύναται να κατανοηθεί κάποια από τη Φυσική της σκέδασης Compton, ειδικότερα, η εξάρτηση από το σπιν και την πόλωση και η προέλευση μιας φαινομενικής ιδιομορφίας για ακριβή οπισθοσκέδαση,  $\theta = \pi$ . Στις υψηλές ενέργειες, το σύστημα κέντρου μάζας είναι το πιο κατάλληλο. Τότε

$$\begin{aligned} p_1 &= (\omega, 0, 0, \omega), \\ p_2 &= (E, 0, 0, -\omega), \\ p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = (E, -\omega \sin\theta, 0, -\omega \cos\theta), \\ p_4 &= (\omega, \omega \sin\theta, 0, \omega \cos\theta). \end{aligned} \quad (6.86)$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} p_{12} &= \omega(E + \omega) \\ p_{24} &= \omega(E + \omega \cos\theta) \end{aligned} \quad (6.86)$$

και

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \left[ \frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} \right] = 2e^4 \left[ \frac{E + \omega \cos\theta}{E + \omega} + \frac{E + \omega}{E + \omega \cos\theta} \right]. \quad (6.86)$$

Για  $\omega \gg m$ ,  $E = \sqrt{m^2 + \omega^2} \approx \omega \left(1 + \frac{m^2}{2\omega^2}\right)$  και

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \left[ \frac{1 + \cos\theta}{4} + \frac{1}{\frac{m^2}{2\omega^2} + 1 + \cos\theta} \right]. \quad (6.86)$$

Διατηρήθηκαν μόνο οι συντελεστές του  $m$  που απαιτούνται για να διακοπεί η ιδιομορφία στο  $\cos\theta = -1$ . Η ενεργός διατομή για  $\omega \gg m$  είναι

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \approx \frac{2\pi}{64\pi^2(2\omega)^2} \left( \frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 \right) \approx \frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2} \left[ \frac{1 + \cos\theta}{4} + \frac{1}{\frac{m^2}{2\omega^2} + 1 + \cos\theta} \right]. \quad (6.86)$$

Κοντά στην  $\theta = \pi$ ,  $\omega \gg m$ , είναι εμφανές ότι η ενεργός διατομή γίνεται πολύ μεγάλη (αλλά είναι ακόμα πεπερασμένη). Σε αυτήν την περιοχή του χώρου φάσης, το φωτόνιο και το ηλεκτρόνιο αναπηδούν το ένα το άλλο και επιστρέφουν στον δρόμο από όπου ήλθαν. Ή, στην γλώσσα αναλλοιωτικότητας Lorentz, η κατεύθυνση της εξερχόμενης ορμής φωτονίων είναι η ίδια με την κατεύθυνση της εισερχόμενης ορμής ηλεκτρονίων. Ας εξετασθεί τώρα η προέλευση της ιδιομορφίας  $\theta = \pi$ . Δεδομένου ότι το στοιχείο πίνακα μπορεί να γραφθεί στο άμαζο όριο ως

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[ \frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} \right] \approx -2e^4 \left[ \frac{t}{s} + \frac{s}{t} \right] \quad (6.86)$$

για  $\omega \gg m$  και

$$t \approx -2p_{24} = -2\omega^2(1 + \cos \theta) \quad (6.86)$$

φαίνεται πως η προέλευση του πόλου στο  $\theta = \pi$  οφείλεται στην ανταλλαγή του t-channel. Από τα προηγούμενα, το στοιχείο πίνακα t-channel είναι

$$\mathcal{M}_t = -\frac{e^2}{t} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{4*} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (p_2 - p_4) \gamma^\nu u(p_1) \quad (6.86)$$

Δεδομένου ότι αυτό κλιμακώνεται κατά  $\frac{1}{t}$  ίσως αναμένεται η ενεργός διατομή να αποκλίνει κατά  $\frac{1}{t^2} \sim \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}$ . Μάλιστα, αυτό θα συνέβαινε σε μια θεωρία βαθμωτού πεδίου, όπως μία με αλληλεπίδραση  $g\phi^3$  για την οποία

$$\mathcal{M} \sim \frac{g^2}{t}, |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{g^4}{t^2}, \quad (6.86)$$

που έχει έναν ισχυρό  $t^2$  πόλο. Στην QED, υπολογίστηκε το διάγραμμα t-channel στο άμαζο όριο και βρέθηκε ότι

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = -2e^4 \frac{s}{t} = 4e^4 \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad (6.86)$$

Αυτό δίδει ολόκληρο τον πόλο  $\frac{1}{t}$ , οπότε δεν χρειάζεται να απασχολεί η παρεμβολή για την κατανόηση της ιδιομορφίας. Ας μελετηθεί τώρα από πού προήλθε ο άλλος παράγοντας  $t$  για την απλοποίηση του πόλου.

$$\begin{aligned} p_1 &= (\omega, 0, 0, \omega), \\ p_2 &= (\omega, 0, 0, -\omega), \\ p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = (\omega, -\omega\phi, 0, \omega), \\ p_4 &= (\omega, \omega\phi, 0, -\omega). \end{aligned} \quad (6.84)$$

και τότε



$$t = -\omega^2 \phi^2. \quad (6.84)$$

Έτσι ένας πόλος  $\frac{1}{t}$  έχει ως  $\frac{1}{\phi^2}$ , αλλά ένας  $\frac{1}{t^2}$  έχει ως  $\frac{1}{\phi^4}$ . Αλλά ας παρατηρηθεί ότι ο παράγοντας ορμής στο στοιχείο πίνακα εξαφανίζεται επίσης καθώς  $p_2 \rightarrow p_4$ :

$$p_2 - p_4 = -\omega \phi k, \quad k^\mu = (0, 1, 0, 0). \quad (6.84)$$

Οπότε,

$$\mathcal{M}_t = \frac{e^2}{\omega^2 \phi^2} \bar{u}(p_3) \epsilon_1 (p_2 - p_4) \epsilon_4^* u(p_2) = -\frac{e^2}{\omega \phi} \bar{u}(p_3) \epsilon_1 k \epsilon_4^* u(p_2) \quad (6.84)$$

Άρα, ένας παράγοντας του  $\phi$  απλοποιείται. Αυτός ο παράγοντας προήλθε από τους σπίνορες και είναι αποτέλεσμα της διατήρησης της στροφορμής.

Αν συμπεριληφθεί και η μάζα των ηλεκτρονίων, όπως στην εξίσωση για το  $\frac{d\sigma}{d \cos \theta}$ , θα βρεθεί ότι  $\frac{\omega \phi}{\omega^2 \phi^2 + m_e^2}$  αντί του  $\frac{1}{\omega \phi}$ , το οποίο είναι πεπερασμένο ακόμη και για ακριβή οπισθοσκέδαση. Επομένως, δεν υπάρχει πραγματικά απόκλιση. Ακόμη, η ενεργός διατομή γίνεται πολύ μεγάλη για την σχεδόν οπισθοσκέδαση.



## Βιβλιογραφία

Compton, A. H. 1923. A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements. *Physical Review*. 21 (5): 483–502.

Griffiths, D. 2008. *Introduction to Elementary Particles*. Weinheim: Wiley-VCH.

Halzen, F., and Martin, A. D. 1984. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. New York: John Wiley & Sons.

Itzykson, c., and Zuber, J. B. 1980. *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill.

Peskin, M. E., and Schroeder, D. V. 1995. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Schwartz, M. D. 2014. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge: Cambridge University Press

Stuewer, R. H. 1975. *The Compton Effect: Turning Point in Physics*. New York: Science History Publications.

Srednicki, M. 2007. *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weinberg, S. 1995. *The Quantum Theory of Fields. Volume 1: Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weinberg, S. 1996. *The Quantum Theory of Fields. Volume 2: Modern Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zee, A. 2003. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton, NJ: Princeton University Press.