

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΤΖΩΡΤΖΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ Κ. , ΗΡΓΕΣ Ν. , ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ Γ.

Copyright © 2016 by Tzortzis Dimitris
All rights reserved

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για τη στήριξη τους, καθώς και τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας Κωνσταντίνο Αναγνωστόπουλο, για τις χρήσιμες συμβουλές που μου έδωσε.

Περιεχόμενα

Abstract	7
Περίληψη	8
1 Κλασική μηχανική	9
1.1 Νόμοι Νεύτωνα	9
1.2 Γενικευμένες συντεταγμένες	10
1.3 Αρχή D'Alembert	10
1.4 Εξισώσεις Euler-Lagrange	11
1.5 Αρχή Hamilton	12
1.6 Συμμετρίες	13
1.7 Χαμιλτονιανός φορμαλισμός	15
1.8 Εξισώσεις Lagrange σε πεδία	16
1.9 Συμμετρίες σε πεδία	17
2 Ειδική θεωρία σχετικότητας	18
2.1 Ιστορική αναδρομή	18
2.2 Χώρος Minkowski	18
2.3 Κώνος φωτός	19
2.4 Μετασχηματισμοί Lorentz	19
2.5 Τετρανύσματα	21
2.5.1 Τετρανύσματα βάσης	21
2.5.2 Εσωτερικό γινόμενο	21
2.6 Μηχανική	21
2.6.1 Κινηματική	21
2.6.2 Δυναμική	22
2.6.3 Κυματόνυμα	22
2.7 Αρχή των μεταβολών	23
2.8 Παρατηρητές	23
3 Πολλαπλότητες	24
3.1 Τοπολογικοί χώροι	24
3.2 Απεικονίσεις	25
3.3 Πολλαπλότητες(Manifolds)	25
3.4 Διανυσματικοί χώροι	26
3.5 Τανυστές	27
3.6 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες	28

3.7	Διανύσματα σε πολλαπλότητες	28
3.7.1	Συνιστώσες διανυσμάτων	29
3.7.2	Απόκλιση συνάρτησης	29
3.7.3	Μετασχηματισμός συντεταγμένων	29
3.8	Διανυσματικά και τανυστικά πεδία	30
3.9	Συνδέσεις	31
3.10	Παράλληλη μετατόπιση	32
3.11	Μετρική	33
3.11.1	Συντεταγμένες Riemann	33
3.11.2	Ταχύτητα και Μήκος καμπύλης	34
3.12	Γεωδαιτικές	34
3.13	Τανυστής στρέψης	35
3.14	Τανυστής Riemann	35
3.14.1	Ιδιότητες τανυστή Riemann	36
3.15	Ταυτότητα Bianchi	37
3.16	Γεωδαιτική απόκλιση	37
3.17	Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες	38
3.18	Pullback και Pushforward	40
3.19	Παράγωγος Lie	41
3.20	Συμμετρίες	42
3.21	Τανυστής ενέργειας-ορμής	43
4	Γενική θεωρία σχετικότητας	45
4.1	Νόμος Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη	45
4.2	Αρχή ισοδυναμίας	46
4.3	Μετατόπιση προς το ερυθρό	47
4.4	Καμπυλωμένος χωροχρόνος	48
4.5	Εξισώσεις Einstein	49
4.6	Φορμαλισμός Lagrange	51
4.7	Κοσμολογική σταθερά	54
4.8	Μετρική Schwarzschild	55
4.9	Μελανές οπές	58
5	Βαρυτικά κύματα	60
5.1	Γραμμικοποιημένη βαρύτητα	60
5.2	Μετασχηματισμοί βαθμίδας	61
5.3	Κίνηση σωματιδίων	63
5.4	Βαθμοί ελευθερίας	64
5.5	Εγκάρσια βαθμίδα	65
5.6	Βαρυτικά κύματα	66
5.7	Πόλωση βαρυτικών κυμάτων	68
5.8	Παραγωγή βαρυτικών κυμάτων από πηγές	70
5.9	Σύστημα διπλών αστερών	74
5.10	Τανυστής ενέργειας-ορμής βαρυτικών κυμάτων	75
5.11	Ρυθμός απώλειας ενέργειας	77
5.12	Βαρυτόνια	80

6 Ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων	81
6.1 Πηγές βαρυτικών κυμάτων	81
6.2 Εκτίμηση πλάτους	82
6.3 Συμβολομετρία	83
6.4 Εναλλακτικές μέθοδοι	84
6.5 Το πείραμα LIGO	86
6.5.1 Τεχνολογία	87
6.5.2 Ανίχνευση	88
Συμπεράσματα	91
Παράρτημα:Βαθμίδα Lorenz	92
Βιβλιογραφία	94

Abstract

This thesis explores gravitational waves as solutions of the Einstein equations according to a linear approach. Chapter first begins with a brief introduction of the Lagrangian and the Hamiltonian formalism in classical mechanics, since a similar formalism will lead us to the Einstein-Hilbert action, wherefrom we shall derive the Einstein equations. In another chapter we analyse special relativity, it being a prerequisite in order to move on to the general theory of relativity. Furthermore, we present in detail the formalisms of differentiable manifolds and of differential geometry which are the mathematical tools to describe spacetime as a pseudo-Riemannian manifold. We then derive the Einstein equations. Following that, we derive the solutions of the linearized Einstein equations that take the form of a wave and analyse their main characteristics. Finally, the last chapter presents the basic principles of gravitational wave detection, while special mention is made to their recent discovery by LIGO observatory.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθώ με τα βαρυτικά κύματα που αποτελούν λύση των εξισώσεων Einstein σε γραμμική προσέγγιση. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια μικρή εισαγωγή στο Λαγκραντζιανό και Χαμιλτονιανό φορμαλισμό στην κλασική μηχανική, καθώς ένας παρόμοιος φορμαλισμός θα μας οδηγήσει στη δράση Einstein-Hilbert, από όπου θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις Einstein. Ακολουθεί το κεφάλαιο της ειδικής σχετικότητας η οποία αποτελεί προαπαιτούμενο για τη μετάβαση στη γενική θεωρία σχετικότητας. Στη συνέχεια, γίνεται μια εκτενής παρουσίαση του φορμαλισμού διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων και διαφορικής γεωμετρίας που είναι τα μαθηματικά εργαλεία για την περιγραφή του χωροχρόνου ως μιας ψευδο-Riemann πολλαπλότητας. Στο επόμενο κεφάλαιο εξάγουμε τις εξισώσεις Einstein. Έπειτα, εξάγω τις λύσεις των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Einstein που παίρνουν τη μορφή κύματος και αναλύω τα βασικά χαρακτηριστικά τους. Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο κάνω μια παρουσίαση των βασικών αρχών ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων, καταλήγοντας στην πρόσφατη ανακάλυψή τους από το παρατηρητήριο LIGO.

Κεφάλαιο 1

Κλασική μηχανική

1.1 Νόμοι Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι αν σε ένα σώμα ασκείται συνισταμένη δύναμη ίση με μηδέν τότε αυτό το σώμα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή:

$$\vec{F} = 0 \leftrightarrow \vec{u} = \text{σταθερή} \quad (1.1.1)$$

και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ο δεύτερος νόμος Νεύτωνα μας λέει ότι:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.1.2)$$

με $\vec{p} = m\vec{u}$ την ορμή ενός σώματος. Για ένα σώμα που εκτελεί περιστροφική κίνηση ορίζουμε τη στροφορμή:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.1.3)$$

και τη ροπή

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.1.4)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1.1.5)$$

Το έργο μιας δύναμης για μία διαδρομή από το σημείο (1) έως το σημείο (2) ορίζεται ως

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1.1.6)$$

Για σταθερή μάζα m παίρνουμε:

$$W_{12} = m \int_1^2 \frac{d\vec{u}}{dt} \vec{u} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt} u^2 dt = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \quad (1.1.7)$$

με $T = \frac{1}{2} m u^2$ την κινητική ενέργεια του συστήματος. Ακόμη, ορίζουμε ένα σύστημα ως συντηρητικό αν

$$W_{12} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.1.8)$$

δηλαδή το έργο της δύναμης είναι ανεξάρτητο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, απ' όπου προκύπτει ότι η δύναμη μπορεί να γραφεί στη μορφή $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$. Πολλές φορές είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε ένα σώμα ως ένα σύστημα πολλών σωματιδίων στα οποία μπορεί να ασκούνται εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων. Εκφράζοντάς το μαθηματικά ο 2ος νόμος Νευτωνα θα γίνεται:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} \quad (1.1.9)$$

Όμως αν λάβουμε υπόψη μας τον 3ο νόμο του Νεύτωνα δράσης-αντίδρασης ο 2ος όρος ισούται με 0. Αν ακόμη ορίσουμε το κέντρο μάζας ως:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (1.1.10)$$

θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)} \implies M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)} \quad (1.1.11)$$

1.2 Γενικευμένες συντεταγμένες

Πολλές φορές ένα μηχανικό σύστημα υπόκειται σε περιορισμούς λόγω γεωμετρίας και άλλων παραγόντων. Αυτοί οι περιορισμοί ονομάζονται **δεσμοί**. Πιο συγκεκριμένα αν οι δεσμοί δίνονται στη μορφή:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0 \quad (1.2.1)$$

τότε ονομάζονται **ολόνομοι δεσμοί**. Γενικά ένα σύστημα N σωματιδίων θα προσδιορίζεται από $3N$ το πλήθος συντεταγμένες. Αν όμως έχω k - δεσμούς τότε το σύστημα θα περιγράφεται από $3N - k$ συντεταγμένες q_i που περιγράφουν πλήρως το σύστημα και ονομάζονται **γενικευμένες συντεταγμένες**. Δηλαδή θα έχουμε ένα μετασχηματισμό του τύπου:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Έτσι οι ανεξάρτητες συντεταγμένες q_i περικλύουν την πληροφορία των δεσμών και ο χώρος που ορίζουν ονομάζεται θεσικός χώρος καταστάσεων.

1.3 Αρχή D'Alembert

Για να μελετήσουμε ένα μηχανικό σύστημα είναι χρήσιμο να ορίσουμε την έννοια της **δυνατής μετατόπισης** δr_i που είναι μια μικρή μετατόπιση του συστήματος που είναι συμβατή με τους δεσμούς και γίνεται παγώνοντας το χρόνο ($\delta t = 0$). Στην αναλυτική δυναμική κάνουμε τη μετάβαση από

εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις σε ασκούμενες δυνάμεις και δυνάμεις δεσμών. Έτσι η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο θα γράφεται ως:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i \quad (1.3.1)$$

Μας ενδιαφέρουν κυρίως οι δυνάμεις δεσμών οι οποίες δεν παράγουν έργο κατά τις δυνατές μετατοπίσεις, δηλαδή

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.3.2)$$

δηλαδή οι δυνάμεις δεσμών είναι κάθετες στις δυνατές μετατοπίσεις. Αν ένα σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία τότε θα έχουμε:

$$\vec{F}_i = 0 \implies \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \implies \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.3.3)$$

Για σύστημα που βρίσκεται σε κίνηση και σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε:

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \implies \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i) \delta r_i = 0 \implies \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \delta r_i = 0 \quad (1.3.4)$$

όπου η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως **Αρχή D'Alembert**.

1.4 Εξισώσεις Euler-Lagrange

Έστω ένα ολόνομο σύστημα, δηλαδή

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.4.1)$$

Τότε η γενικευμένη ταχύτητα θα είναι:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (1.4.2)$$

δηλαδή $\vec{v}_i = \vec{v}_i(q_i, \dot{q}_i, t)$. Ακόμη όπως ξαναείπαμε οι δυνατές μετατοπίσεις γίνονται παγώνοντας το χρόνο, άρα:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.4.3)$$

Το δυνατό έργο των ασκούμενων δυνάμεων (1ος όρος) $\vec{F}_i^{(a)} = \vec{F}_i$ θα είναι

$$\sum_i \vec{F}_i \delta r_i = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (1.4.4)$$

όπου $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ ονομάζεται γενικευμένη δύναμη. Αντίστοιχα για την ορμή

$$\sum_i \vec{p}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{ij} m_i \ddot{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \implies \sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) \quad (1.4.5)$$

Όμως ισχύει ότι $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dr_i}{dt}$ και $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$. Οπότε τελικά ο 2ος όρος γίνεται:

$$\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \quad (1.4.6)$$

ή εισάγοντας τον τύπο της κινητικής ενέργειας παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (1.4.7)$$

Συνδυάζοντας τους όρους παίρνουμε:

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (1.4.8)$$

Εάν τώρα κάνουμε την extra υπόθεση ότι το σύστημα είναι συντηρητικό τότε η γενικευμένη δύναμη θα μπορεί να γραφτεί ως:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (1.4.9)$$

και αν

$$V = V(q_j) \implies \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (1.4.10)$$

οπότε έχουμε

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T - V}{\partial q_j} = 0 \quad (1.4.11)$$

Ορίζουμε τη Λαγκραντζιανή L ως $L = T - V$ και παίρνουμε τελικά τις εξισώσεις **Euler-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1.4.12)$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις δεν μπορούν να προέλθουν από κάποιο δυναμικό τότε οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (1.4.13)$$

ενώ στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε δυναμικό $U = U(q, \dot{q})$ τότε εάν οι γενικευμένες δυνάμεις μπορούν να γραφούν στη μορφή $Q = -\frac{\partial U}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \right)$ τότε αν ορίσουμε ως Λαγκραντζιανή τη συνάρτηση $L = T - U$ οι αρχικές εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες.

1.5 Αρχή Hamilton

Θα δείξουμε την αρχή του **Hamilton** ξεκινώντας από την αρχή D'Alembert για ένα συντηρητικό σύστημα:

$$\sum_i \dot{p}_i = \sum_i \ddot{r}_i \delta \vec{r}_i = \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \delta \vec{r}_i) - \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} (\delta r_i) \quad (1.5.1)$$

αφού $\delta \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \delta r_i$ Άρα

$$\sum_i \dot{p}_i \delta r_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \dot{r}_i \delta r_i \right] - \delta \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) \implies \sum_i \dot{p}_i \delta r_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \dot{r}_i \delta r_i \right] - \delta T \quad (1.5.2)$$

και αφού ισχύει ότι $\sum_i F_i \delta r_i = \sum_i \dot{p}_i \delta r_i$ θα έχουμε

$$\sum_i F_i \delta r_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \dot{r}_i \delta r_i \right] - \delta T \quad (1.5.3)$$

Όμως το σύστημα μας είναι συντηρητικό οπότε

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial r_i} \implies \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \dot{r}_i \delta r_i \right] = \delta T - \sum_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \delta r_i = \delta T - \delta V \quad (1.5.4)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση για χρόνους από t_1 έως t_2 έχουμε:

$$\left[\sum_i m_i \dot{r}_i \delta r_i \right] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \implies \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (1.5.5)$$

αφού στα άκρα θεωρούμε ότι δεν υπάρχει δυνατή μετατόπιση. Δηλαδή έχουμε ότι το σύστημα κινείται από τη στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή t_2 με τέτοιο τρόπο ώστε η **δράση** $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ να έχει στάσιμη τιμή. (**Αρχή Hamilton**) Η αρχή αυτή έχει ισχύ ακόμη και στην περίπτωση όπου το δυναμικό δεν εξαρτάται μόνο από τις γενικευμένες συντεταγμένες αλλά και από τις πρώτες παραγώγους τους και το χρόνο. Από αυτή την αρχή μπορούμε να εξάγουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange (για μια γενικευμένη συντεταγμένη χωρίς βλάβη της γενικότητας) ως εξής:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \quad (1.5.6)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad \text{και αφού ισχύει ότι } \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \quad (1.5.7)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] dt \quad (1.5.8)$$

$$(1.5.9)$$

Εκτελώντας τώρα παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right) dt + \left|_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt \right. \quad (1.5.10)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt \quad (1.5.11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.5.12)$$

Αυτό το αποτέλεσμα φυσικά μπορούμε να το γενικεύσουμε για j γενικευμένες συντεταγμένες οπότε τελικά παίρνουμε τις εξισώσεις **Euler-Lagrange**.

1.6 Συμμετρίες

Μια γενικευμένη συντεταγμένη q ονομάζεται κυκλική αν η L δεν εξαρτάται από αυτή, δηλαδή εάν

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

. Έστω τώρα ότι πραγματοποιούμε ένα μετασχηματισμό της μορφής $q_i \rightarrow q_i + dq_i$ όπου πρακτικά αντιστοιχεί σε μια απειροστή μετατόπιση του συστήματος κατά μια κατεύθυνση \vec{n} . Πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j \vec{n}}{dq_j} = \vec{n} \quad (1.6.1)$$

Επίσης αν θυμηθούμε ότι οι Λαγκραντζιανές εξισώσεις σε ένα μη συντηρητικό σύστημα γράφονται στη μορφή

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \text{με} \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad (1.6.2)$$

τότε θα έχουμε

$$\frac{d}{dt} p_j = Q_j \implies \dot{p}_j = Q_j \quad (1.6.3)$$

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n} \cdot \vec{F} \quad (1.6.4)$$

$$p_j = \vec{n} \cdot \vec{p} \quad (1.6.5)$$

Οπότε αν η q είναι κυκλική συντεταγμένη θα έχουμε ότι

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = Q_j \implies \dot{p}_j = 0 \implies p_j = \text{σταθερή} \quad (1.6.6)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη χρονική παράγωγο της Λαγκραντζιανής:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.6.7)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.6.8)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \quad (1.6.9)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (1.6.10)$$

Ορίζουμε τώρα την ενεργειακή συνάρτηση $H(q, \dot{q}, t)$ που είναι γνωστή ως Χαμιλτονιανή του συστήματος ως

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \implies \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.6.11)$$

Αν η L δεν εξαρτάται απ το χρόνο θα έχουμε $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Euler που μας λέει ότι για μια ομοιογενή συνάρτηση n βαθμού ισχύει

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f$$

Αν το εφαρμόσουμε στη συνάρτηση της κινητικής ενέργειας θα πάρουμε τελικά:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i m \dot{q}_i = 2T \implies H = 2T - L = 2T - (L - V) = T + V = E \quad (1.6.12)$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό μετατόπισης στις συντεταγμένες κατά τον \vec{n} άξονα και το σύστημα μένει αναλλοίωτο τότε η συνιστώσα της ορμής σε αυτόν τον άξονα παραμένει σταθερή. Αντίστοιχα κάτω από μετασχηματισμούς χρόνου, αν το σύστημα μένει αναλλοίωτο διατηρείται η συνολική ενέργεια. Δηλαδή για αυτές τις συμμετρίες έχουμε κάποιο νόμο διατήρησης. Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα όπως ότι κάτω από περιστροφικές συμμετρίες διατηρείται η στροφορμή. Ας δούμε πιο συγκεκριμένα πότε μια Λαγκραντζιανή παραμένει αναλλοίωτη. Έστω $L' = L - \frac{dg(q,t)}{dt}$. Τότε θα έχουμε:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (L(q, \dot{q}, t) - \frac{dg}{dt}) dt \quad (1.6.13)$$

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \delta L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L(q, \dot{q}, t) - \frac{d\delta g}{dt}) dt \quad (1.6.14)$$

$$\text{όμως ισχύει ότι } , \delta g(q, t) = \frac{\partial g}{\partial q_i} \delta q_i \quad (1.6.15)$$

$$\delta S' = \delta S - \frac{\partial g}{\partial q_i} (\delta q_i(t_2) - \delta q_i(t_1)) \quad (1.6.16)$$

$$\delta S' = \delta S \quad (1.6.17)$$

Δηλαδή αν ο μετασχηματισμός είναι από q σε δq είναι τέτοιος ώστε $\delta L = \frac{d\delta g}{dt} = \frac{dF}{dt}$ τότε η μεταβολή της δράσης δεν επηρεάζεται και το δq λέγεται συμμετρία του συστήματος. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να γενικευθούν με το λεγόμενο θεώρημα **Noether**. Ας θεωρήσουμε ένα μετασχηματισμό $q' = q + \delta q$ και ας θεωρήσουμε ότι είναι συμμετρία του συστήματος:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{dF}{dt} \quad (1.6.18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{dF}{dt} \quad (1.6.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - F \right) = 0 \quad (1.6.20)$$

δηλαδή για κάθε συμμετρία έχουμε και μια ποσότητα που διατηρείται η οποία ονομάζεται ρεύμα Noether.

1.7 Χαμιλτονιανός φορμαλισμός

Στο Λαγκραντζιανό φορμαλισμό έχουμε n διαφορικές εξισώσεις 2ου βαθμού οπότε χρειαζόμαστε $2n$ αρχικές συνθήκες. Επίσης μια κατάσταση ορίζεται στο n -θεσικό χώρο που ορίζεται από τους άξονες q_i . Αντίθετα, στο Χαμιλτονιανό φορμαλισμό έχουμε $2n$ εξισώσεις 1ου βαθμού ($2n$ αρχικές συνθήκες) και μια κατάσταση του συστήματος περιγράφεται στον διάστασης $2n$ -χώρο των φάσεων που ορίζεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i και $p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Πριν δούμε πώς θα γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Legendre που μας επιτρέπει όταν έχουμε μια συνάρτηση $f(x, y) \implies df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy$, να αλλάξουμε βάση από (x, y) σε (u, v) . Αυτό το κάνουμε εισάγοντας τη συνάρτηση $g = f - ux \implies dg = df - u dx - x du = u dx + v dy - u dx - x du = v dy - x du$ απ' όπου μπορούμε να κάνουμε την ταύτιση $\frac{\partial g}{\partial u} = -x$ και $\frac{\partial g}{\partial v} = v$. Αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να πάμε από το χώρο της $L(q, \dot{q}, t)$ στο χώρο

της $H(q, p, t)$ εισάγοντας τη συνάρτηση $H = L - \dot{q}p \implies H = \dot{q}p - L$. Οπότε και το ολικό διαφορικό της θα είναι

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.7.1)$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις θα έχουμε

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.7.2)$$

και επειδή $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ και $\frac{\partial L}{\partial q_i} - p_i \dot{q}_i$ το διαφορικό της H θα γίνεται

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.7.3)$$

Έτσι τελικά μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω ταύτιση που μας οδηγεί στις εξισώσεις Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.7.4)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.7.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.7.6)$$

1.8 Εξισώσεις Lagrange σε πεδία

Ο Λαγκραντζιανός φορμαλισμός έχει ισχύ και σε θεωρίες πεδίων με τη διαφορά όμως ότι τώρα το σύστημα δεν εξαρτάται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i αλλά από ένα πεδίο ϕ που είναι μια συνάρτηση του χωροχρόνου. Πιο συγκεκριμένα η Λαγκραντζιανή πυκνότητα θα εξαρτάται από το πεδίο και την χωροχρονική παράγωγό του, δηλαδή $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Η Λαγκραντζιανή θα δίνεται τότε αν ολοκληρώσουμε στο χώρο:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.8.1)$$

και η δράση θα είναι

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.8.2)$$

Οπότε αν θεωρήσουμε μεταβολές $\phi' = \phi + \delta\phi$ στ πεδίο θα έχουμε

$$S[\phi + \delta\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu(\phi + \delta\phi)) \quad (1.8.3)$$

$$S[\phi + \delta\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \right] = S[\phi] + \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \quad (1.8.4)$$

αφού ισχύει ότι $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta(\phi)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μεταβολή της δράσης πρέπει να μηδενίζεται και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τελικά θα έχουμε:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu(\delta\phi) \right] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right] \delta\phi + \delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Big| \quad (1.8.5)$$

$$\int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right] \delta\phi = 0 \quad (1.8.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) = 0 \quad (1.8.7)$$

που είναι εξισώσεις Euler-Lagrange για πεδία.

1.9 Συμμετρίες σε πεδία

Θα δείξουμε το θεώρημα Noether για τη θεωρία πεδίων. Ας υποθέσουμε ότι η \mathcal{L} είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς πεδίων, δηλαδή θεωρούμε ότι

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x)' = \phi(x) + a\Delta\phi(x) \implies \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} \quad (1.9.1)$$

όπου

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} a\Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial(a\Delta\phi) = a\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi \right] + a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right] \quad (1.9.2)$$

ο δεύτερος όρος μηδενίζεται οπότε αν ορίζουμε $j^\mu = a\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi \right]$ θα έχουμε μια εξίσωση ρεύματος

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.9.3)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα στο χώρο θα έχουμε

$$\int d^3x \partial_\mu j^\mu = \frac{d}{dt} \int j^0 d^3x + \int d^3x \nabla j = 0 \implies \frac{dQ}{dt} = 0 \text{ με } Q = \int d^3x j^0 \quad (1.9.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Gauss.

Κεφάλαιο 2

Ειδική θεωρία σχετικότητας

2.1 Ιστορική αναδρομή

Το 19ο αιώνα, υπήρχε η πεποίθηση ότι οι εξισώσεις Maxwell έπρεπε να ισχύουν σε ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που ονομάστηκε αιθέρας, αφού προβλέπουν μια ταχύτητα για το φως. Η ταχύτητα αυτή σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα u σε σχέση με το πρώτο κατά τον άξονα x θα δινόταν από τη Νευτώνεια πρόσθεση ταχυτήτων:

$$\begin{aligned}V^{x'} &= V^x - u \\V^{y'} &= V^y \\V^{z'} &= V^z\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

οι οποίοι προκύπτουν από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Το 1987 όμως, το πείραμα Michelson-Morley έδειξε ότι η θεωρία της ύπαρξης του αιθέρα ήταν λανθασμένη. Επιπλέον, η Αρχή της Σχετικότητας ορίζει ότι: Πανομοιότυπα πειράματα που διεξάγονται σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς παράγουν πανομοιότυπα αποτελέσματα. Κατά τη θεμελίωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας το 1905, ο Einstein θεώρησε ότι η αρχή της σχετικότητας θα έπρεπε να ισχύει για τις εξισώσεις Maxwell. Με αυτή την υπόθεση, ήταν σαφές ότι η Νευτώνεια θεώρηση ενός απόλυτου χρόνου έπρεπε να εγκαταλειφθεί, και να αντικατασταθεί από μια ενοποιημένη θεώρηση του χώρου και του χρόνου, δηλαδή του τετραδιάστατου χωροχρόνου.

2.2 Χώρος Minkowski

Ένα σημείο στο χωροχρόνο με συντεταγμένες (t, x, y, z) ονομάζεται γεγονός. Το στοιχείο μήκους μεταξύ δύο γεγονότων δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\tag{2.2.1}$$

όπου $c = 3 \times 10^8 m/s$ είναι η ταχύτητα του φωτός, όπου από δω και πέρα θα θεωρούμε ότι $c = 1$. Το παραπάνω στοιχείο μήκους παραμένει αναλλοίωτο μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς και ορίζει τον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski. Μια άλλη χρήσιμη μορφή του που μπορούμε να λάβουμε είναι αν θεωρήσουμε το τετράνυσμα θέσης:

$$x^\mu = (x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \quad (2.2.2)$$

και τη μετρική Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε και το στοιχείο μήκους γίνεται

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.3)$$

όπου οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες δηλώνουν άθροιση.

2.3 Κώνος φωτός

Η γεωμετρία του χώρου Minkowski δεν είναι Ευκλείδεια. Ειδικότερα, το στοιχείο μήκους μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. Εάν δύο γεγονότα χωρίζονται με $ds^2 > 0$ τότε λέμε ότι είναι χωροειδώς χωρισμένα, εάν $ds^2 = 0$ φωτοειδώς χωρισμένα και εάν $ds^2 < 0$ χρονοειδώς χωρισμένα. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι φωτοειδώς χωρισμένα ορίζουν έναν κώνο που ονομάζεται κώνος φωτός και χωρίζεται σε μελλοντικό και παρελθοντικό κώνο φωτός. Οι φωτεινές ακτίνες ταξιδεύουν εφαπτομενικά του κώνου. Όλα αυτά γίνονται πιά σαφή στο παρακάτω σχήμα:

2.4 Μετασχηματισμοί Lorentz

Ας εξερευνήσουμε τώρα ποιού είδους μετασχηματισμοί αφήνουν το διάστημα $s^2 = \eta_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu$ αναλλοίωτο. Μια προφανής επιλογή είναι οι μετατοπίσεις

$$x^{\mu'} = x^\mu + \alpha^\mu \quad (2.4.1)$$

Μια άλλη επιλογή είναι να πολλαπλασιάσουμε με έναν πίνακα:

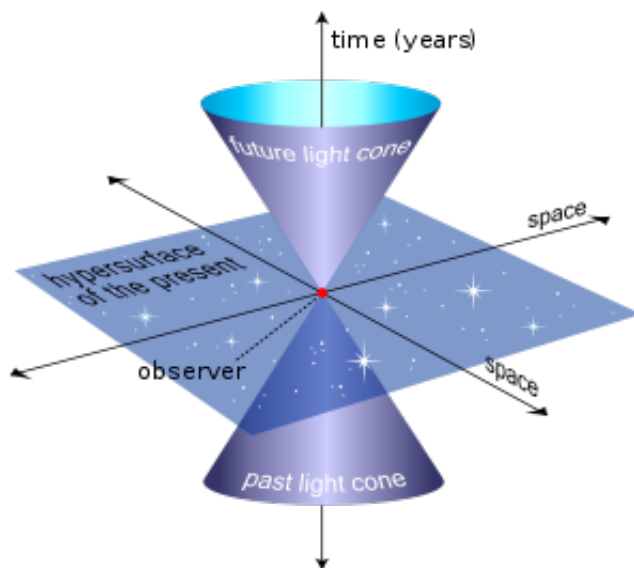
$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu \quad (2.4.2)$$

ή αλλιώς

$$x' = \Lambda x \quad (2.4.3)$$

Έτσι τελικά, ψάχνουμε τους πίνακες Λ που θα αφήνουν το διάστημα αναλλοίωτο, δηλαδή

$$\begin{aligned} s^2 &= (\Delta x)^T \eta \Delta x \\ s^2 &= (\Delta x')^T \eta \Delta x' \\ s^2 &= (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda \Delta x \\ \eta &= \Lambda^T \eta \Lambda \end{aligned} \quad (2.4.4)$$



Σχήμα 2.1: Κώνος φωτός. Η εικόνα βρίσκεται στην [10]

Οι πίνακες που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί Lorentz. Πιο συγκεκριμένα, αποτελούνται από τις στροφές, όπως για παράδειγμα η στροφή στο επίπεδο $x - y$:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

και τα λεγόμενα Lorentz boosts που μπορούν να θεωρηθούν ως στροφές μεταξύ του χώρου και του χρόνου:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

με $-\infty < \phi < \infty$. Αν τώρα θέσουμε $u = \frac{x}{t} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi$ και $\phi = \tanh^{-1} u$, τότε παίρνουμε

$$t' = \gamma(t - ux) \quad (2.4.7)$$

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (2.4.8)$$

με

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2} \quad (2.4.9)$$

Το σύνολο των 10 μετατοπίσεων σε συνδυασμό με τους μετασχηματισμούς Lorentz ορίζουν τη μη αβελιανή ομάδα **Poincare** υπό την πράξη του πολλαπλασιασμού.

2.5 Τετρανύσματα

2.5.1 Τετρανύσματα βάσης

Σε αναλογία με τα συμβατικά τριανύσματα στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο μπορούμε να ορίσουμε τετρανύσματα στον τετραδιάστατο επίπεδο χώρο Minkowski. Έτσι, σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορούμε να ορίσουμε τετρανύσματα βάσης (e_0, e_1, e_2, e_3) και κάθε τετρανύσμα θα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους:

$$a = a^\alpha e_\alpha = a^0 e_0 + a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 \quad (2.5.1)$$

2.5.2 Εσωτερικό γινόμενο

Μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ τετρανυσμάτων που πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (2.5.2)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (2.5.3)$$

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) \quad (2.5.4)$$

όπου a, b, c τετρανύσματα και λ πραγματικός αριθμός.

Έτσι παίρνουμε

$$a \cdot b = (\alpha^\alpha e_\alpha) \cdot (\beta^\beta e_\beta) = (e_\alpha \cdot e_\beta) \alpha^\alpha \beta^\beta \quad (2.5.5)$$

2.6 Μηχανική

2.6.1 Κινηματική

Μια χρονοειδής κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου στο χωροχρόνο περιγράφεται από τις συντεταγμένες του σε κάθε σημείο ως συνάρτηση μια παραμέτρου σ :

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$$

Η καταλληλότερη παράμετρος είναι ο ιδιόχρονος

$$\tau = -ds^2$$

που δείχνει το χρόνο που μετρά ένα ρολόι κατά μήκος μιάς κοσμικής γραμμής. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την τετραχύτητα ενός σωματιδίου ως

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.6.1)$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε τις συνιστώσες της τετραχύτητας:

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{V}^2}} \quad (2.6.2)$$

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{V^x}{\sqrt{1 - \vec{V}^2}} \quad (2.6.3)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε την τετρααχύτητα συναρτήσει της τριταχύτητας ως:

$$u^\alpha = (\gamma, \gamma \vec{V}) \quad (2.6.4)$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι η τετρααχύτητα είναι κανονικοποιημένη:

$$u \cdot u = -1 \quad (2.6.5)$$

2.6.2 Δυναμική

Ο 1ος νόμος του Νεύτωνα στην ειδική σχετικότητα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{du}{d\tau} = 0 \quad (2.6.6)$$

Αντίστοιχα, ο 2ος νόμος Νεύτωνα γράφεται στη μορφή:

$$m \frac{du}{d\tau} = 0 \quad (2.6.7)$$

με

$$\frac{du}{d\tau} = a$$

να είναι η τετραεπιτάχυνση. Εναλλακτικά, εάν ορίσουμε την τετραορμή ως

$$p = mu = (m\gamma, m\gamma \vec{V}) = (E, \vec{p}) \quad (2.6.8)$$

ο 2ος νόμος Νευτωνα θα γράφεται ως

$$\frac{dp}{d\tau} = f = (\gamma \vec{F} \cdot \vec{V}, \gamma \vec{F}) \quad (2.6.9)$$

,όπου \vec{F} η τριδύναμη. Μια άμεση συνέπεια της κανονικοποίησης της τετρααχύτητας είναι ότι

$$p \cdot p = -m^2 \quad (2.6.10)$$

απ' όπου λύνοντας ως προς την ενέργεια E λαμβάνουμε τη γνωστή σχέση

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (2.6.11)$$

2.6.3 Κυματάνυσμα

Γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική ότι η ενέργεια ενός φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$E = \hbar\omega \quad (2.6.12)$$

Η τριορμή ενός φωτονίου είναι

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (2.6.13)$$

όπου το \vec{k} ονομάζεται κυματάνυσμα με μέτρο $|\vec{k}| = \omega$ και κατεύθυνση της διάδοσης. Για την ορμή ενός φωτονίου θα ισχυει

$$p^\alpha = (E, \vec{p}) = (\hbar\omega, \hbar \vec{k}) = \hbar k^\alpha p \cdot p = k \cdot k = 0 \quad (2.6.14)$$

με το \vec{k} να ονομάζεται τετρακυματάνυσμα.

2.7 Αρχή των μεταβολών

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε την αρχή των μεταβολών στην ειδική θεωρία σχετικότητας. Ας θεωρήσουμε δύο σημεία A και B (χρονειδώς χωρισμένα) και όλες τις δυνατές χρονοειδείς κοσμικές καμπύλες που τα ενώνουν. Όπως προείπαμε, μπορούμε να παραμετριοποιήσουμε τέτοιες καμπύλες με μια παράμετρο σ και ας θεωρήσουμε ότι παίρνει τιμές από 0 έως 1 (πάντα μπορούμε να το κάνουμε αυτό). Ο συνολικός ιδιόχρονος τότε κατά μήκος μιας απ αυτών τις κοσμικές γραμμές θα δίνεται ως:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_0^1 d\sigma \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.1)$$

Αναζητούμε εκείνη την κοσμική γραμμή στην οποία ο ιδιόχρονος παρουσιάζει ακρότατο. Αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler-Langrange :

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\sigma)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.7.2)$$

όπου έχουμε 4 εξισώσεις με

$$L = \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.3)$$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την περίπτωση $x = x^1$. Τότε θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{L} \frac{dx^1}{d\sigma} \right] = 0 \quad (2.7.4)$$

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} = 0 \quad (2.7.5)$$

όπου πολλαπλασιάσαμε με $d\tau/d\sigma$. Έτσι, δουλεύοντας όμοια για τις άλλες συντεταγμένες, η εξίσωση κίνησης για ένα ελεύθερο σωματίδιο στον επίπεδο χωροχρόνο είναι:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.7.6)$$

2.8 Παρατηρητές

Η ειδική σχετικότητα βασίζεται κυρίως σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ένας παρατηρητής αντιστοιχεί σε μια χρονοειδή κοσμική γραμμή όπου με μετρητικά όργανα μπορεί να υπολογίζει ταχύτητες και ενέργειες των διερχόμενων σωματιδίων που μελετά. Το σύστημα του παρατηρητή μπορούμε να το περιγράψουμε με 4 διανύσματα βάσης

$$(e_0, e_1, e_2, e_3)$$

που πρέπει να είναι ορθοκανονικά μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, το τετράνυσμα του χρόνου e_0 θα είναι εφαπτομενικό στην κοσμική γραμμή του παρατηρητή και επειδή η τετραταχύτητα ενός παρατηρητή, αφού αυτή είναι η διεύθυνση κίνησης ενός ρολογιού σε σχέση με το εργαστήριο. Το τετράνυσμα της ταχύτητας είναι επίσης ένα εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα οπότε και θα έχουμε:

$$e_0 = u_{obs} \quad (2.8.1)$$

Κεφάλαιο 3

Πολλαπλότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε το μαθηματικό φορμαλισμό των πολλαπλοτήτων. Η έννοια της πολλαπλότητας είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο σε πολλούς κλάδους της φυσικής και των μαθηματικών και συλλαμβάνει την έννοια ενός χώρου που τοπικά μοιάζει να είναι επίπεδος (με τον όρο επίπεδος δεν εννοούμε αναγκαστικά Ευκλείδειος αλλά όχι καμπυλωμένος, όπως ο χώρος Minkowski) και μας βοηθά να ορίσουμε φυσικές καταστάσεις και νόμους ανεξάρτητα από ποιές συντεταγμένες επιλέξουμε. Τελικά θα καταλήξουμε στο γεγονός ότι ο χωροχρόνος περιγράφεται καλύτερα ως μια ψευδο-Ριμάνεια πολλαπλότητα.

3.1 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 3.1.1 Έστω ένα σύνολο M . Η **τοπολογία** \mathcal{O} είναι ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου $P(M)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

I. $\emptyset \in \mathcal{O}, M \in \mathcal{O}$

II. $u \in \mathcal{O}, v \in \mathcal{O} \implies u \cap v \in \mathcal{O}$

III. $u_a \in \mathcal{O} \implies (\cup_{a \in A} u_a) \in \mathcal{O}$

Ορισμός 3.1.2 Έστω το σύνολο $M = \mathbb{R}^d = \{(p_1, \dots, p_d) | p_i \in \mathbb{R}\}$ Ορίζουμε τη συνηθισμένη τοπολογία $\mathcal{O}_{std} \subseteq P(\mathbb{R}^d)$ στο M ως εξής:

I. $B_r(p) := \{(q_1, \dots, q_d) | \sum_{i=1}^d (q_i - p_i)^2 < r^2\}$

II. $u \in \mathcal{O}_{std} \iff \forall p \in u : \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq u$ όπου $r \in \mathbb{R}^+$.

Ορισμός 3.1.3 Ένα ζεύγος (M, \mathcal{O}) ονομάζεται **τοπολογικός χώρος**.

Ορισμός 3.1.4 Εάν $u \in \mathcal{O}$ τότε το u ονομάζεται **ανοιχτό σύνολο**. Εάν $M \setminus A \in \mathcal{O}$ τότε το A ονομάζεται **κλειστό σύνολο**.

Ορισμός 3.1.5 Έστω σύνολο M και μια τοπολογία \mathcal{O}_M και έστω ένα σύνολο $S \subseteq M$. Λέμε ότι κληρονομούμε μια τοπολογία $\mathcal{O}|_S \subseteq P(S)$ από το M στο S όταν $\mathcal{O}|_S := \{u \cap S | u \in \mathcal{O}|_M\}$

3.2 Απεικονίσεις

Ορισμός 3.2.1 Έστω μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$. Ορίζουμε την **προεικόνα** ενός στοιχείου V του συνόλου N ως εξής: $\text{preim}_f(V) := \{m \in M \mid f(m) \in V\}$.

Ορισμός 3.2.2 Έστω (M, \mathcal{O}_M) και (N, \mathcal{O}_N) δύο τοπολογικοί χώροι. Τότε μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ ονομάζεται **συνεχής** αν $\forall V \in \mathcal{O}_N : \text{preim}_f(V) \in \mathcal{O}_M$.

Μία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ λέγεται ότι είναι **επιρριπτική (surjective)** αν $\forall n \in N, \exists m \in M$ έτσι ώστε $f(m) = n$.

Ορισμός 3.2.3 Μία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ λέγεται ότι είναι **1-1 (injective)** αν $\forall m_1, m_2 \in M$ ισχύει ότι $f(m_1) = f(m_2) \leftrightarrow m_1 = m_2$.

Ορισμός 3.2.4 Μία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ λέγεται ότι είναι **αμφιμονοσήμαντη (bijective)** αν είναι επιρριπτική και 1-1.

Ορισμός 3.2.5 Έστω (M, \mathcal{O}_M) και (N, \mathcal{O}_N) δύο τοπολογικοί χώροι. Τότε μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ ονομάζεται **ομοιομορφισμός** αν ισχύουν τα παρακάτω:

- i. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη
- ii. Η f είναι συνεχής
- iii. Η f^{-1} είναι συνεχής.

Ορισμός 3.2.6 Έστω (M, \mathcal{O}_M) και (N, \mathcal{O}_N) δύο τοπολογικοί χώροι. Τότε μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ ονομάζεται **ισομορφισμός** αν εάν ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1}

Ορισμός 3.2.7 Έστω (M, \mathcal{O}_M) και (N, \mathcal{O}_N) δύο τοπολογικοί χώροι. Τότε μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ ονομάζεται **αμφιδιαφορίση (diffeomorphism)** αν η f και η f^{-1} είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις.

Ορισμός 3.2.8 Έστω (M, \mathcal{O}_M) και (N, \mathcal{O}_N) δύο τοπολογικοί χώροι. Τότε μια απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ ονομάζεται **ενδομορφισμός** αν $N \subseteq M$.

3.3 Πολλαπλότητες (Manifolds)

Ορισμός 3.3.1 Ένας τοπολογικός χώρος (M, \mathcal{O}) λέγεται d -διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα αν $\forall p \in M : \exists u \in \mathcal{O} : \exists x : u \rightarrow x(u) \subseteq \mathbb{R}^d$ έτσι ώστε:

- i. η x είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή $x^{-1} : x(u) \rightarrow u \rightarrow u$
- ii. η x είναι συνεχής
- iii. η x^{-1} είναι συνεχής.

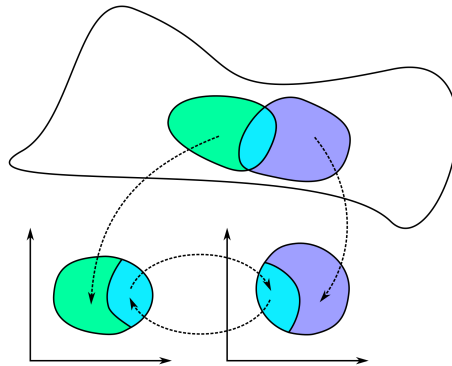
Παρατήρηση: Από τον ορισμό αυτό καθίσταται σαφές ότι η τοπολογία \mathcal{O} ταυτίζεται με την συνηθισμένη τοπολογία \mathcal{O}_{std} . Από εδώ και πέρα όταν αναφερόμαι σε μια τοπολογία θα αναφέρομαι στη συνηθισμένη τοπολογία.

Ορισμός 3.3.2 Το ζεύγος (u, x) καλείται **χάρτης** της πολλαπλότητας (M, \mathcal{O})

Ορισμός 3.3.3 Εάν ισχύει ότι $M = \cup_{u \in A} u_a$, τότε το σύνολο χαρτών $A = \{(u_a, x_a) | a \in A\}$ καλείται **άτλαντας** της πολλαπλότητας.

Ορισμός 3.3.4 Οι απεικονίσεις $x^i : u \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, d$ ονομάζονται **απεικονίσεις** (ή **συναρτήσεις**) **συντεταγμένων**.

Ορισμός 3.3.5 Έστω μια πολλαπλότητα M και οι χάρτες (u_a, x_a) και (u_b, x_b) έτσι ώστε $u_a \cap u_b \neq \emptyset$. Τότε ορίζουμε την **απεικόνιση μετάβασης** $\tau_{a,b} : x_a(u_a \cap u_b) \rightarrow x_b(u_a \cap u_b)$ ως $\tau_{a,b} = x_b \circ x_a^{-1}$



Σχήμα 3.1: Απεικονίσεις μετάβασης σε μία πολλαπλότητα. Η εικόνα βρίσκεται στην [11]

3.4 Διανυσματικοί χώροι

Ορισμός 3.4.1 Ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ είναι ένα σύνολο V στο οποίο ορίζουμε δύο πράξεις, την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

i. $+$: $V \times V \rightarrow V$

ii. \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

που ικανοποιούν αντιστοίχως τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $u + w = w + v$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists O \in V : \forall v \in V : v + O = v$
4. $\forall v \in V : \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0$

και για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mu \in \mathbb{R}$

1. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

$$3. \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$$

$$4. 1 \cdot v = v$$

Ορισμός 3.4.2 Έστω $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ δύο διανυσματικοί χώροι. Τότε η απεικόνιση $\phi : V \rightarrow W$ λέγεται γραμμική αν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

$$i. \phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$$

$$ii. \phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 3.4.3 Έστω $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ δύο διανυσματικοί χώροι. Τότε το σύνολο $\text{Hom}(V, W) := \{\phi : V \rightarrow W\}$ λέγεται ομοιομορφισμός. Αν επιπλέον ορίσουμε πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό σε αυτό το σύνολο τότε ο $(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Ορισμός 3.4.4 Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε το σύνολο $V^* := \{\phi : V \rightarrow \mathbb{R}\} : \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. Τότε ο διανυσματικός χώρος $(V^*, +, \cdot)$ ονομάζεται **δυναδικός διανυσματικός χώρος** του V .

Παρατήρηση: Τα στοιχεία του δυναδικού διανυσματικού χώρου ονομάζονται πολλές φορές ως συναλλοίωτα διανύσματα.

Ορισμός 3.4.5 Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $B \subset V$ λέγεται **Hamel-βάση** του διανυσματικού χώρου αν $\forall v \in V, \exists F := \{f_1, \dots, f_n\} \subset B : \exists! v^1, \dots, v^n : v = v^1 f_1 + \dots + v^n f_n$.

Έχοντας μια βάση e_1, \dots, e_n για το διανυσματικό χώρο V μπορούμε να διαλέξουμε μια οποιαδήποτε βάση του δυναδικού διανυσματικού χώρου V^* . Διαλέγουμε όμως τη βάση $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$, έτσι ώστε

$$\epsilon^a(\epsilon_b) = \delta_b^a$$

Αν η βάση του δυναδικού διανυσματικού χώρου ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη ονομάζεται **δυναδική βάση**.

3.5 Τανυστές

Ορισμός 3.5.1 Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος. Ένας (r, s) -τανυστής T στον V είναι μια πολυγραμμική απεικόνιση που ορίζεται ως:

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Θεώρημα 3.5.1 $\phi \in V^* \leftrightarrow \phi : V \rightarrow \mathbb{R}$

Άρα τα στοιχεία του δυναδικού διανυσματικού χώρου είναι $(0,1)$ -τανυστές.

Θεώρημα 3.5.2 $v \in V = (V^*)^* \leftrightarrow v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$

Άρα τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου είναι $(1,0)$ -τανυστές.

Ορισμός 3.5.2 Έστω ένας (r, s) τανυστής στον διανυσματικό χώρο V . Τότε οι συνιστώσες του τανυστή δίνονται από τους πραγματικούς αριθμούς:

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := T(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$$

Επίσης μπορούμε να φτιάξουμε το συμμετρικό ή αντισυμμετρικό μέρος ενός τανυστή ως:

$$T_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}^\sigma{}_\rho = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1, \dots, \mu_n}^\sigma{}_\rho + \text{άθροισμα των μεταθέσεων των δεικτών } \mu_1, \dots, \mu_n) \quad (3.5.1)$$

$$T_{[\mu_1, \dots, \mu_n]}^\sigma{}_\rho = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1, \dots, \mu_n}^\sigma{}_\rho + \text{εναλλακτικό άθροισμα των μεταθέσεων των δεικτών } \mu_1, \dots, \mu_n) \quad (3.5.2)$$

3.6 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να προσδώσουμε κάποιες ιδιότητες σε μια τοπολογική πολλαπλότητα έτσι ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε διαφορικό λογισμό σε αυτήν και κατά συνέπεια στους χάρτες που την αντιπροσωπεύουν. Έτσι αν θεωρήσουμε δύο χάρτες (u, x) και (v, y) , τότε λέμε ότι αυτοί οι χάρτες είναι C^∞ -φορές διαφορικά συμβατοί αν ισχύει ότι $u \cap v \neq \emptyset$ και οι απεικονίσεις μετάβασης

$$y \circ x^{-1} : x(u \cap v) \rightarrow y(u \cap v)$$

$$x \circ y^{-1} : y(u \cap v) \rightarrow x(u \cap v)$$

και οι αντίστροφοί τους είναι C^∞ -φορές διαφορίσιμες. Έτσι, μπορούμε να προχωρήσουμε στους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 3.6.1 Ένας άτλαντας \mathcal{A} είναι διαφορικά συμβατός εάν οποιοδήποτε δύο χάρτες του είναι διαφορικά συμβατοί.

Ορισμός 3.6.2 Η τριπλέτα $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ ονομάζεται διαφορίσιμη (smooth), πολλαπλότητα.

3.7 Διανύσματα σε πολλαπλότητες

Ορισμός 3.7.1 Έστω μία $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ διαφορίσιμη πολλαπλότητα και μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ που είναι τουλάχιστον C^1 -διαφορίσιμη και έστω $\gamma(\lambda_0) = p$. Η ταχύτητα του γ στο p είναι η γραμμική απεικόνιση $u_{\gamma, p} : C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$f \rightarrow u_{\gamma, p}(f) := (f \circ \gamma)'(\lambda_0).$$

Ορισμός 3.7.2 \forall σημείο $p \in M$ ορίζουμε το σύνολο $T_p M := \{u_{\gamma, p}\}$, με γ διαφορίσιμες καμπύλες και ονομάζεται εφαπτομενικός χώρος του M στο p .

3.7.1 Συνιστώσες διανυσμάτων

Θεωρούμε μια πολλαπλότητα με διαφορίσιμο άτλαντα και μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, \gamma(0) = p$ σε ένα χάρτη (u, x) . Τότε θα έχουμε :

$$u_{\gamma,p}(f) := (f \circ \gamma)'(0) = ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))'(0) = (x \circ \gamma)'(0) \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)) = \gamma^i_{(x)}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f \implies$$

$$u_{\gamma,p} = \gamma^i_{(x)}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (3.7.1)$$

Άρα παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι αποτελούν μια βάση για τα διανύσματα σε κάθε εφαπτομενικό χώρο.

3.7.2 Απόκλιση συνάρτησης

Το πιο σημαντικό παράδειγμα ενός συναλλοίωτου διανύσματος είναι αυτό της απόκλισης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο p της πολλαπλότητας που ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$(df)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \rightarrow (df)_p(X) := Xf \quad (3.7.2)$$

.Πιο συγκεκριμένα, οι συνιστώσες της απόκλισης θα είναι

$$((df)_p)_j := (df)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_p \quad (3.7.3)$$

Ακριβώς όπως οι μερικές παράγωγοι ορίζουν μια βάση στο διανυσματικό χώρο, η απόκλιση ορίζει μια βάση στο δυαδικό διανυσματικό χώρο και πιο συγκεκριμένα θα είναι η δυαδική βάση, αφού ισχύει :

$$(dx^a)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^j} \right)_p = \delta^a_j. \quad (3.7.4)$$

3.7.3 Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να ξεκαθαρίσουμε ότι τα διανύσματα και γενικότερα οι τανυστές ως γεωμετρικά αντικείμενα μένουν αναλλοίωτα κάτω υπό οποιαδήποτε αλλαγή τοπολογικού χάρτη, δηλαδή αλλαγής συντεταγμένων. Όμως στις καινούργιες συντεταγμένες θα έχουμε και άλλη βάση, οπότε αναγκαστικά θα αλλάζουν και οι συνιστώσες, έτσι ώστε να αναπαριστάται το ίδιο αντικείμενο. Ας δούμε πως θα αλλάζουν οι συνιστώσες ενός διανύσματος από τη μετάβαση από ένα χάρτη (u, x) σε ένα χάρτη (v, y) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f = \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p))$$

$$= \partial_i ((f \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}))(x(p)) = (\partial_i (y \circ x^{-1}))^j (x(p)) (\partial_j (f \circ y^{-1}))(y(p)) = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial f}{\partial y^j} \right)_p \quad (3.7.5)$$

Όμως θα πρέπει να ισχύει ότι

$$X = X^i_{(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = X^j_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \implies X^i_{(x)} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p = X^i_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p$$

Οπότε τελικά θα έχουμε

$$X^j_{(y)} = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p X^i_{(x)} \quad (3.7.6)$$

Με όμοιο τρόπο λαμβάνουμε τους μετασχηματισμούς συνιστώσων ενός συναλλοίωτου διανύσματος ω :

$$\omega_{j(y)} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right)_p \omega^i_{(x)} \quad (3.7.7)$$

και ενός τανυστή

$$(T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s})_p = \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \right)_p \dots \left(\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \right)_p \left(\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \right)_p \dots \left(\frac{\partial x^{j'_s}}{\partial x^{j_s}} \right)_p (T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s})_p \quad (3.7.8)$$

όπου στην τελευταία σχέση αλλάξαμε το συμβολισμό του καινούργιου χάρτη από y σε x' για να αποφυγούμε τους πολλούς δείκτες στην συνέχεια.

3.8 Διανυσματικά και τανυστικά πεδία

Ορισμός 3.8.1 Ορίζουμε τη δέσμη μιας πολλαπλότητας ως την τριπλέτα

$$E \xrightarrow{\pi} M$$

με E και M διαφορίσιμες πολλαπλότητες και π μια διαφορίσιμη απεικόνιση.

Ορισμός 3.8.2 Έστω μια δέσμη $E \xrightarrow{\pi} M$ και $p \in M$. Ορίζουμε την *ίνα* στο σημείο p ως την $\text{preim}_{\pi}(p)$.

Ορισμός 3.8.3 Ο τομέας σ μιας δέσμης είναι η απεικόνιση $M \xrightarrow{\sigma} E$ με τη συνθήκη $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$.

Ορισμός 3.8.4 Η εφαπτόμενη ίνα σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα ορίζεται ως $TM = \dot{\bigcup}_p T_p M$ με $\pi : TM \rightarrow M$.

Ορισμός 3.8.5 Ορίζουμε το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο X ως τη διαφορίσιμη απεικόνιση $TM \xrightarrow{\pi} M$ με $\pi \circ X = \text{id}_M$ και ορίζουν το χώρο $\Gamma(TM)$.

Ορισμός 3.8.6 Ένα (r, s) -τανυστικό πεδίο είναι μια $C^\infty(M)$ πολυγραμμική απεικόνιση $T : \Gamma(T^*M) \times \dots \times \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty$, όπου $\Gamma(T^*M)$ ο χώρος των συναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων.

3.9 Συνδέσεις

Ορισμός 3.9.1 Μια σύνδεση ∇ (ή συναλλοίωτη παράγωγος) σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ ορίζεται ως μια απεικόνιση που παίρνει ένα ζεύγος που αποτελείται από ένα διανυσματικό πεδίο X και ένα $(p, q)T$ τανυστικό πεδίο και τα στέλνει σε ένα (p, q) τανυστικό πεδίο $\nabla_X T$ και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- i. $\nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S$
- ii. $\nabla_X f = Xf$
- iii. $\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S)$
- iv. $\nabla_{fX+gZ} T = f\nabla_X T + g\nabla_Z T$

όπου έχουμε ορίσει το τανυστικό γινόμενο μεταξύ ενός $(k, l)T$ τανυστή και ενός $(m, n)S$ τανυστή ως τον τανυστή τάξης $(k + m, l + n)$:

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^{(1)} \dots \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) &= \\ = T(\omega^{(1)} \dots \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}) & \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα τις παραπάνω ιδιότητες για να δούμε τι μορφή θα έχει η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανυσματικού πεδίου Y κατά την κατεύθυνση ενός διανυσματικού πεδίου X :

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial X^i}} (Y^m \frac{\partial}{\partial X^m}) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial X^i}} (Y^m \frac{\partial}{\partial X^m}) = \\ &= X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^i}} Y^m) \frac{\partial}{\partial X^m} + X^i Y^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial X^i}} (\frac{\partial}{\partial X^m}) = \\ &= X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^i}} Y^m) \frac{\partial}{\partial X^m} + X^i Y^m \Gamma^q_{mi} \frac{\partial}{\partial X^q} \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

όπου οι συναρτήσεις Γ ονομάζονται **συντελεστές σύνδεσης** και δίνονται από τον τύπο:

$$\Gamma^i_{jk} = (dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^k}} \frac{\partial}{\partial X^j}))_p \quad (3.9.3)$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία για ένα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο, μας ενδιαφέρει ο όρος

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^m}} (dx^i)$$

που θα μπορούμε να το γράψουμε πάλι ως ένα διανυσματικό πεδίο με συνιστώσες κάποιες συναρτήσεις και την αντίστοιχη βίαση: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^m}} (dx^i) = A^i_{jm} dx^j$. Όμως ισχύει ότι

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^m}} ((dx^i)(\frac{\partial}{\partial X^j})) = \frac{\partial}{\partial X^m} (\delta^i_j) = 0 \quad (3.9.4)$$

και από τον κανόνα του Leibniz

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^m}} dx^i)(\frac{\partial}{\partial X^j}) + dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^m}} \frac{\partial}{\partial X^j}) = 0 \rightarrow (\nabla_{\frac{\partial}{\partial X^m}} dx^i)_j = -\Gamma^i_{jm} \quad (3.9.5)$$

Άρα οι αυθαίρετοι συντελεστές A που υποθέσαμε πριν είναι απλά τα σύμβολα Γ με ένα πλην μπροστά. Παρακάτω παραθέτουμε τη τελική μορφή των συνιστώσων της σύνδεσης ενός διανυσματικού πεδίου, ενός συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου και ενός $(1,2)$ τανυστικού πεδίου:

$$(\nabla_X Y)^i = XY^i + \Gamma^i_{nm} Y^n X^m \quad (3.9.6)$$

$$(\nabla_X \omega)_i = X\omega_i - \Gamma^j_{im} \omega_j X^m \quad (3.9.7)$$

$$(\nabla_X T)^i_{jk} = X(T^i_{jk}) + \Gamma^i_{jm} T^s_{jk} X^m - \Gamma^i_{jm} T^i_{sk} X^m - \Gamma^j_{jm} T^i_{js} X^m \quad (3.9.8)$$

Τέλος, θα δούμε πως μετασχηματίζονται οι συντελεστες σύνδεσης από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο:

$$\begin{aligned} \Gamma^j_{jm(y)} &= dy^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^q} dx^q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\partial x^s}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^s} \right) = \\ &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial x^s}{\partial y^j} \right) \delta^q_s + \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial y^j} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \Gamma^q_{sp(x)} \\ \Gamma^i_{jk(y)} &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial y^j} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \Gamma^q_{sp(x)} + \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^j \partial y^k} \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

3.10 Παράλληλη μετατόπιση

Όταν βρισκόμαστε σε έναν επίπεδο χώρο μπορούμε άνετα να συγκρίνουμε διανύσματα μεταξύ τους μεταφέροντας το ένα στον εφαπτομενικό χώρο του άλλου κρατώντας σταθερή τη διεύθυνσή του. Εν γένει όμως σε έναν καμπυλωμένο χώρο δεν έχουμε αυτή την πολυτέλεια. Για παράδειγμα, αν βρισκόμαστε σε μια σφαίρα και μεταφέρουμε ένα διανύσμα προσπαθώντας να κρατήσουμε σταθερή τη διεύθυνση του θα αποτύχουμε. Το διάνυσμα αναγκαστικά θα αλλάξει διεύθυνση κατά μια γωνία θ λόγω της καμπυλότητας του χώρου. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια γενίκευση αυτής της κατάστασης στον καμπυλωμένο χώρο που ονομάζεται παράλληλη μετατόπιση και μας επιτρέπει να συγκρίνουμε διανύσματα και πεδία σε διαφορετικούς εφαπτομενικούς χώρους.

Ορισμός 3.10.1 Έστω $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Ένα διανυσματικό πεδίο X στο M λέγεται ότι **μετατοπίζεται παράλληλα** κατά τη διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow M$ αν

$$\nabla_{u_\gamma} X = 0 \quad (3.10.1)$$

Ορισμός 3.10.2 Έστω $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μία διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow M$ στο M λέγεται ότι **μετατοπίζεται παράλληλα με τον εαυτό της** αν

$$\nabla_{u_\gamma} u_\gamma = 0 \quad (3.10.2)$$

Ας δούμε πιο προσεκτικά τη μορφή που παίρνει η τελευταία σχέση σε ένα σύστημα συντεταγμένων:

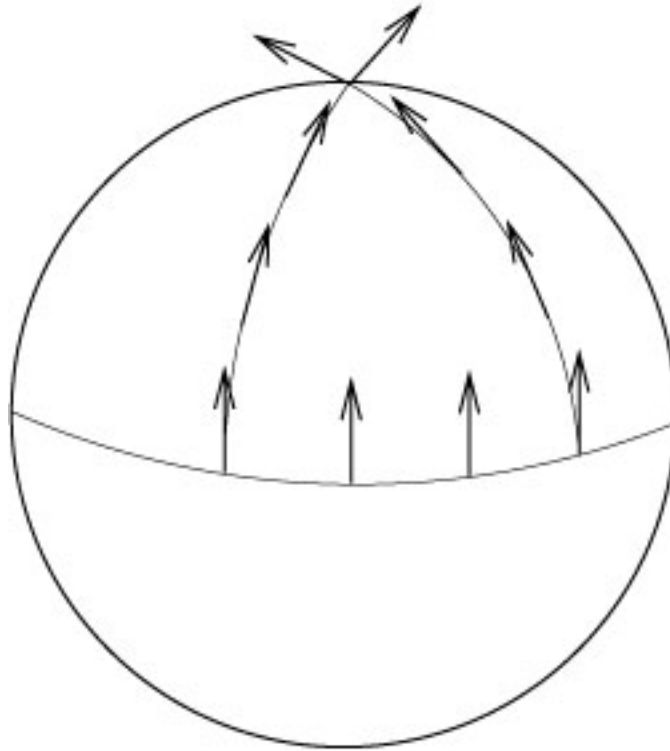
$$\nabla_{u_\gamma} u_\gamma = 0 \quad (3.10.3)$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}^m \frac{\partial}{\partial x^m}} \dot{\gamma}^n \frac{\partial}{\partial x^n} = 0 \quad (3.10.4)$$

$$\dot{\gamma}^m \frac{\partial \dot{\gamma}^n}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^n} + \dot{\gamma}^m \dot{\gamma}^n \Gamma^q_{nm} \frac{\partial}{\partial x^q} = 0 \quad (3.10.5)$$

$$\ddot{\gamma} + \Gamma^m_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b = 0 \quad (3.10.6)$$

Η τελευταία ονομάζεται **γεωδαιτική εξίσωση** και είναι η γενίκευση της ευθείας γραμμής σε καμπυλωμένο χώρο.



Σχήμα 3.2: Παράλληλη μετατόπιση σε μία σφαίρα. Η εικόνα βρίσκεται στην [1]

3.11 Μετρική

Μέχρι τώρα δεν έχουμε εισαγάγει καμία έννοια που να μας επιτρέπει να μετρούμε αποστάσεις στην πολλαπλότητα. Έτσι, είναι χρήσιμο να εισάγουμε τανυστή που να μας επιτρέπει να ορίζουμε εσωτερικά γινόμενα, γωνίες μεταξύ διανυσμάτων κλπ. Ορίζουμε λοιπόν τη μετρική ως ένα $(0,2)$ συμμετρικό τανυστικό πεδίο g έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων να είναι

$$A \cdot B = g(A, B) = g(B, A) \quad (3.11.1)$$

με συνιστώσες

$$g_{ij} = g(e_i, e_j). \quad (3.11.2)$$

Ως $(0,2)$ τανυστικό πεδίο μπορούμε να δίνουμε στη μετρική 2 διανύσματα και να μας δίνει έναν αριθμό. Δηλαδή έχουμε βρει ένα μηχανισμό ώστε να πηγαίνουμε από ένα διάνυσμα (ή διανυσματικό πεδίο) σε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα (ή αντίστοιχα πεδίο). Πιο συγκεκριμένα:

$$A_i = g_{ij} A^j \quad (3.11.3)$$

Μπορούμε να ορίσουμε και την αντίστροφη μετρική g^{ki} έτσι ώστε

$$g^{ki} g_{ij} = \delta^k_j \quad (3.11.4)$$

3.11.1 Συντεταγμένες Riemann

Μια μετρική σε μια d -διάστατη πολλαπλότητα μπορεί να γραφεί στην κανονικοποιημένη μορφή της ως

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0) \quad (3.11.5)$$

Εάν s είναι ο αριθμός των '+1' και t ο αριθμός των '-1' τότε ο αριθμός $s - t$ ονομάζεται **υπογραφή** της μετρικής. Πιο συγκεκριμένα, εάν η υπογραφή αποτελείται μόνο από '+1' τότε η πολλαπλότητα ονομάζεται **Ευκλείδεια** ενώ αν υπάρχει μόνο ένα '-1' τότε ονομάζεται **ψευδο-Riemannian**. Γενικά δεν μπορούμε πάντα να φέρουμε τη μετρική στην κανονικοποιημένη μορφή της παντού σε μια πολλαπλότητα M . Μπορούμε όμως πάντα να το κάνουμε σε ένα σημείο $p \in M$ διαλέγοντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων θα μπορούμε επίσης να μηδενίσουμε τις πρώτες παραγώγους της μετρικής, δηλαδή

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.11.6)$$

Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται **συντεταγμένες Riemann** και το σύστημα συντεταγμένων **τοπικό αδρανειακό σύστημα**.

3.11.2 Ταχύτητα και Μήκος καμπύλης

Ορισμός 3.11.1 Σε μια ψευδο-Riemann πολλαπλότητα $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$, το μέτρο της ταχύτητας μιας καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(\lambda)$ δίνεται από τον αριθμό:

$$s(\lambda) = \left(\sqrt{g(u_\gamma u_\gamma)} \right)_{\gamma(\lambda)} \quad (3.11.7)$$

Ορισμός 3.11.2 Έστω $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$ μια διαφορίσιμη καμπύλη. Τότε το μήκος της γ δίνεται από τον αριθμό

$$L[\gamma] = \int_0^1 d\lambda s(\lambda) \quad (3.11.8)$$

3.12 Γεωδαιτικές

Προηγουμένως ορίσαμε τη γεωδαιτική ως την πιο ευθεία γραμμή σε έναν καμπυλωμένο χώρο. Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να την ταυτίσουμε με τη συντομότερη καμπύλη. Αυτό θα γίνει εφαρμόζοντας την αρχή των μεταβολών του ιδιόχρονου του καμπυλωμένου χώρου. Έτσι θεωρούμε το συναρτησοειδές του ιδιόχρονου

$$\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (3.12.1)$$

Θεωρώντας μεταβολές του τύπου

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$$

και

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}$$

θα έχουμε

$$\tau + \delta\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (3.12.2)$$

$$= \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} \left[1 + \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1} \times \left(-\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right] d\lambda \quad (3.12.3)$$

όμως το δx^σ είναι μικρό οπότε

$$\delta\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{-1/2} \left(-\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda}\right) d\lambda \quad (3.12.4)$$

Αλλάζοντας την παραμετροποίηση από λ σε τ έχουμε:

$$\delta\tau = \int \left[-\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau}\right] d\tau \quad (3.12.5)$$

$$= \int \left[-\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\sigma + \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\right] \delta x^\sigma d\tau \quad (3.12.6)$$

Έτσι, αφού θέλουμε το $\delta\tau$ να μηδενίζεται θα έχουμε

$$-\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu g_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (3.12.7)$$

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(-\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.12.8)$$

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.12.9)$$

Έτσι, αν ταυτίσουμε τη συντομότερη διαδρομή με την πιο ευθεία γραμμή λαμβάνουμε τους συντελεστές σύνδεσης ως:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (3.12.10)$$

και είναι γνωστά ως σύμβολα **Christoffel** και η σύνδεση που προέρχεται απ αυτά ως σύνδεση **Levi-Civita**. Τέλος αποδεικνύεται ανεξάρτητα από την αρχή των μεταβολών ότι τα Γ παίρνουν αυτή τη μορφή αν $\nabla g = 0$ και εάν μηδενίζεται ο ταυιστής στρέψης.

3.13 Τανυστής στρέψης

Ορισμός 3.13.1 Ορίσουμε το $(1,2)$ τανυστικό πεδίο στρέψης ως

$$T(\omega, X, Y) := \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \quad (3.13.1)$$

με

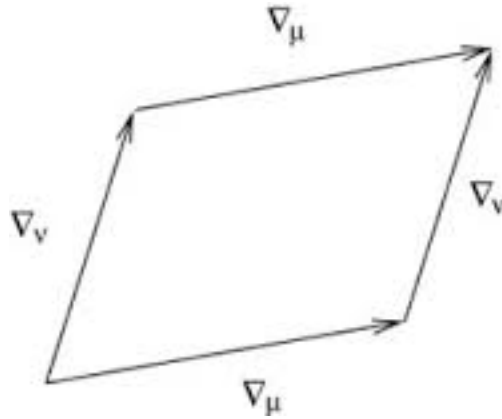
$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf) \quad (3.13.2)$$

και έχει συνιστώσες

$$T^a{}_{ab} = T(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}) = \Gamma^i{}_{ab} - \Gamma^i{}_{ba} \quad (3.13.3)$$

3.14 Τανυστής Riemann

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να κατασκευάσουμε μια έννοια που να μας δίνει κάποια πληροφορία για την καμπυλότητα μιας πολλαπλότητας. Η συναλλοίωτη παράγωγος μας δείχνει πόσο αλλάζει ένας τανυστής προς μια κατεύθυνση, συγκριτικά με το να μετατοπιστεί παράλληλα. Γι' αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να εισάγουμε την έννοια του **μεταθέτη** δύο συναλλοίωτων παραγώγων, που θα μας



Σχήμα 3.3: Μεταθέτης συναλλοίωτων παραγώγων. Η εικόνα βρίσκεται στην [1]

δείχνει τη διαφορά του να μετατοπίσουμε παράλληλα έναν τανυστή πρώτα κατά τις διευθύνσεις των συναλλοίωτων παραγώγων, σε σχέση με την αντίθετη διαδρομή.

Είναι χρήσιμο σε αυτό το σημείο να εισάγουμε το συμβολισμό:

$$\nabla_\mu = \nabla \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.14.1)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.14.2)$$

Οπότε έχουμε:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \quad (3.14.3)$$

$$= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (3.14.4)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \quad (3.14.5)$$

$$+ \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (3.14.6)$$

$$= (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) V^\sigma - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \nabla_\lambda V^\rho \quad (3.14.7)$$

Από όπου παίρνουμε ότι

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \quad (3.14.8)$$

Έτσι, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τον **τανυστή Riemann** (τις συνιστώσες του) ως:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (3.14.9)$$

Οπότε η γενική του μορφή θα είναι:

$$R(\omega, Z, X, Y) := \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) \quad (3.14.10)$$

3.14.1 Ιδιότητες τανυστή Riemann

i. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$

ii. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$

iii. $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \implies R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$

3.15 Ταυτότητα Bianchi

Ας θεωρήσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο του τανυστή Riemann σε Riemann συντεταγμένες:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}) \quad (3.15.1)$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα κυκλικών μεταθέσεων των τριών πρώτων δεικτών:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} \\ &+ \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\rho \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} - \partial_\rho \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\rho \partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} \\ &+ \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\rho g_{\lambda\mu} \\ &+ \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho}) = 0 \end{aligned} \quad (3.15.2)$$

Άρα το αποτέλεσμα μας αφού ισχύει σε ένα σύστημα συντεταγμένων, θα ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, οπότε παίρνουμε μια ταυτότητα που ονομάζεται ταυτότητα **Bianchi**:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} \quad (3.15.3)$$

Ακόμη, μπορούμε να ορίσουμε το συμμετρικό τανυστή **Ricci** ως:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (3.15.4)$$

και το **βαθμωτό Ricci** ως:

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.15.5)$$

Τέλος, μια χρήσιμη παραλλαγή της ταυτότητας Bianchi είναι:

$$0 = g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} \quad (3.15.6)$$

ή αλλιώς

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R \quad (3.15.7)$$

Έτσι, αν ορίσουμε τον **τανυστή Einstein** ως:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (3.15.8)$$

η συσταλμένη ταυτότητα Bianchi παίρνει τη μορφή:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (3.15.9)$$

3.16 Γεωδαιτική απόκλιση

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία δύο ευθείες που είναι αρχικά παράλληλες θα παραμείνουν παράλληλες. Σε έναν καμπυλωμένο χώρο αυτό φυσικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα σε μια σφαίρα δυο γραμμές που αρχικά είναι παράλληλες τελικά θα τέμνονται. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια έννοια για να περιγράψουμε ποσοτικά αυτή την ιδιαιτερότητα μιας καμπυλωμένης πολλαπλότητας. Γι αυτό το λόγο εισάγουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια γεωδαιτικών $\gamma_s(t)$ οι οποίες ορίζουν μια δισδιάστατη επιφάνεια που

περιγράφεται από συντεταγμένες $x^\mu(s, t)$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τα διανυσματικά πεδία ταχύτητας και απόκλισης αντίστοιχα:

$$T_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \quad (3.16.1)$$

$$S_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \quad (3.16.2)$$

Το διανυσματικό πεδίο S_μ 'βλέπει' από τη μια γεωδαιτική στην άλλη οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη σχετική ταχύτητα και τη σχετική επιτάχυνση μεταξύ των γεωδαιτικών ως:

$$V_\mu = (\nabla_T S)_\mu = T^\rho \nabla_\rho S_\mu \quad (3.16.3)$$

$$a^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu \quad (3.16.4)$$

Τα S και T αποτελούν διανύσματα βάσης και για μηδενικό τανυστή στρέψης θα έχουμε:

$$[S, T] = 0 \implies S^\rho \nabla_\rho T_\mu = T^\rho \nabla_\rho S_\mu \quad (3.16.5)$$

οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση:

$$a^\mu = T^\rho \nabla_\rho (T^\sigma \nabla_\sigma S_\mu) \quad (3.16.6)$$

$$= T^\rho \nabla_\rho (S^\sigma \nabla_\sigma T_\mu) \quad (3.16.7)$$

$$= (T^\rho \nabla_\rho S^\sigma) (\nabla_\sigma T_\mu) + T_\rho S^\sigma \nabla_\rho \nabla_\sigma T_\mu \quad (3.16.8)$$

$$= (S^\rho \nabla_\rho T^\sigma) (\nabla_\sigma T_\mu) + T_\rho S^\sigma (\nabla_\sigma \nabla_\rho T_\mu + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T_\nu) \quad (3.16.9)$$

$$= (S^\rho \nabla_\rho T^\sigma) (\nabla_\sigma T_\mu) + S^\sigma \nabla_\sigma (T^\rho \nabla_\rho T_\mu) - (S^\sigma \nabla_\sigma T^\rho) \nabla_\rho T_\mu + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T_\nu T_\rho S_\sigma \quad (3.16.10)$$

$$= R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T_\nu T_\rho S_\sigma \quad (3.16.11)$$

που ονομάζεται εξίσωση γεωδαιτικής απόκλισης.

3.17 Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες

Γνωρίζουμε από την κλασική ανάλυση ότι όταν εκτελούμε ένα ολοκλήρωμα και αλλάξουμε συντεταγμένες, παίρνουμε έναν παραπάνω όρο στο ολοκλήρωμα που είναι η ιακωβιανή ορίζουσα. Πιο συγκεκριμένα έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $F : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και την απεικόνιση $\phi : \text{preim}_\phi(G) \rightarrow G$ που δείχνει την αλλαγή συντεταγμένων. Τότε θα έχουμε:

$$\int_G d^d x F(x) = \int_{\text{preim}_\phi(G)} d^d y |\det(\partial_b \phi^a)| (F \circ \phi)(y) \quad (3.17.1)$$

Για δύο χάρτες (u, y) με συντεταγμένες β και (u, x) με συντεταγμένες α θα έχω

$$\int_{y(u)} d^d \beta f_{(y)}(b) = \int_{x(u)} d^d \alpha |\det(\partial_\alpha (y^b \circ x^{-1})(a))| (f_{(y)} \circ (y \circ x^{-1}))(a) = \int_{x(u)} d^d \alpha |\det(\frac{\partial y^b}{\partial x^a})| f_{(x)}(a) \quad (3.17.2)$$

$$\neq \int_{x(u)} d^d \alpha |f_{(x)}(a)| \quad (3.17.3)$$

με $\phi = y \circ x^{-1}$ Στη διαφορική γεωμετρία όμως θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ανεξάρτητα από τον τοπολογικό χάρτη που διαλέγουμε. Γι' αυτό το λόγο εισάγουμε ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο Ω με τις ιδιότητες να μη μηδενίζεται πουθενά και να είναι τελείως αντισυμμετρικό, δηλαδή:

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_d} = \Omega_{[i_1 i_2 \dots i_d]} \quad (3.17.4)$$

Έτσι μπορούμε επιπλέον να ορίσουμε τη βαθμωτή πυκνότητα ω σε έναν χάρτη (u, y) ως:

$$\omega_{(y)} = \Omega_{i_1 i_2 \dots i_d} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \quad (3.17.5)$$

όπου $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ το σύμβολο *Levi–Civita* που είναι τελείως αντισυμμετρικό στους δείκτες του και ισχύει ότι $\epsilon^{12 \dots d} = +1$. Αυτή η βαθμωτή πυκνότητα μετασχηματίζεται από ένα χάρτη (u, y) σε ένα χάρτη (u, x) ως:

$$\omega_{(y)} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \omega_{(x)} \quad (3.17.6)$$

δηλαδή μετασχηματίζεται με την αντίστροφη ορίζουσα οπότε φεύγει ο παραπάνω όρος που είχαμε στο αρχικό ολοκλήρωμα και έτσι μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης σε πολλαπλότητα ως:

$$\int_u f := \int_{y(u)} d^d \beta \omega_{(y)} f_{(y)}(\beta) = \int_{x(u)} d^d \alpha \omega_{(x)} f_{(x)}(\alpha) \quad (3.17.7)$$

Αυτό που μας έχει μείνει είναι να δώσουμε μια σαφή μορφή στο πεδίο όγκου Ω . Μπορούμε να το κατασκευάσουμε από τη μετρική (εάν βρισκόμαστε σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M με μετρική g) ως:

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_d(x)} = \sqrt{\det(g_{ij})_{(x)}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} \quad (3.17.8)$$

Ας δούμε πως μετασχηματίζεται σε έναν άλλο χάρτη y :

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_d(y)} = \sqrt{\det(g_{ij})_{(y)}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} \quad (3.17.9)$$

$$= \sqrt{\det(g_{mn(x)} \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^j})} \frac{\partial y^{m_1}}{\partial x^{1_1}} \dots \frac{\partial y^{m_d}}{\partial x^{i_d}} \epsilon_{m_1 m_2 \dots m_d} \quad (3.17.10)$$

$$= \sqrt{\det(g_{ij})_{(x)}} \sqrt{\det^2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)} \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} \quad (3.17.11)$$

$$= \sqrt{\det(g_{ij})_{(x)}} \left| \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \right| \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} \quad (3.17.12)$$

$$= \sqrt{\det(g_{ij})_{(y)}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right) \quad (3.17.13)$$

Αν δεν είχαμε τον τελευταίο όρο θα είχαμε αναλλοίωτο μετασχηματισμό γι αυτό απαιτούμε μια επιπλέον συνθήκη, ότι για δύο οποιουσδήποτε χάρτες x και y να ισχύει:

$$\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) > 0 \quad (3.17.14)$$

και ένας άτλαντας εφοδιασμένος με τέτοιους χάρτες ονομάζεται θετικά προσανατολισμένος χάρτης. Οπότε τελικά είμαστε σε θέση να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f ως:

$$\int_u f := \int_{x(u)} d^d \alpha \sqrt{g} f_{(x)}(\alpha) \quad (3.17.15)$$

όπου g είναι συντομογραφία για την ορίζουσα της μετρικής.

3.18 Pullback και Pushforward

Θεωρούμε δύο πολλαπλότητες M και N , όχι αναγκαστικά ίδιας διάστασης, που περιγράφονται από συντεταγμένες x^μ και y^a . Έστω μια απεικόνιση $\phi : M \rightarrow N$ και μια συνάρτηση $f : N \rightarrow \mathcal{R}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη σύνθεση των δύο απεικονίσεων ως:

$$\phi_* f = (f \circ \phi) \quad (3.18.1)$$

που ονομάζεται το **pullback** της f από τη ϕ . Η ονομασία προέρχεται απ το γεγονός ότι αρχικά το πεδίο ορισμού της f είναι στην πολλαπλότητα N και τη μετατρέπουμε ώστε να είναι στην πολλαπλότητα M . Δεν μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη διαδικασία όμως, δηλαδή να πάμε από την πολλαπλότητα M στην N (για συναρτήσεις). Ανακαλούμε ότι τα διανύσματα μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως διαφορικούς τελεστές που απεικονίζουν μια συνάρτηση σε πραγματικούς αριθμούς. Έτσι, αν $V(p)$ είναι ένα διάνυσμα που ορίζεται σε ένα σημείο της πολλαπλότητας M ορίζουμε το **pushforward** του διανύσματος στο σημείο $\phi(p)$ που ανήκει στην πολλαπλότητα N ως:

$$(\phi^* V)(f) = V(\phi_* f) \quad (3.18.2)$$

Δηλαδή, η δράση του $(\phi^* V)$ σε μια συνάρτηση f είναι ταυτόσημη με τη δράση του V στο pullback της συνάρτησης. Τα διανύσματα βάσης στις πολλαπλότητες M και N $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ και $\partial_a = \frac{\partial}{\partial y^a}$ αντίστοιχα. Έτσι, για τις συνιστώσες του pushforward θα έχουμε:

$$(\phi^* V)^a \partial_a f = V^\mu \partial_\mu (\phi_* f) \quad (3.18.3)$$

$$= V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi) \quad (3.18.4)$$

$$= V^\mu \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \partial_a f \quad (3.18.5)$$

Άρα το pushforward μπορεί να θεωρηθεί ως ο πίνακας:

$$(\phi^*)^a_\mu = \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \quad (3.18.6)$$

Ακόμη, μπορούμε να ορίσουμε το pullback ενός συναλλοίωτου διανύσματος ως:

$$(\phi_* \omega)(V) = \omega(\phi^* V) \quad (3.18.7)$$

με συνιστώσες:

$$(\phi_*)^a_\mu = \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \quad (3.18.8)$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτά τα αποτελέσματα και σε τανυστές. Πιο συγκεκριμένα, ένας $(0, l)$ τανυστής είναι μια απεικόνιση από διανύσματα σε πραγματικούς αριθμούς. Έτσι, σε αντιστοιχία με τα συναλλοίωτα διανύσματα ορίζουμε το pullback του τανυστή $(0, l)$ - T τανυστή ως:

$$(\phi_* T)(V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi^* V^{(1)}, \dots, \phi^* V^{(l)}) \quad (3.18.9)$$

όπου ο τανυστής T ορίζεται στην πολλαπλότητα N . Αντίστοιχα, ορίζουμε το pushforward ενός $(k, 0)$ τανυστή S ως:

$$(\phi^* S)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}) = S(\phi_* \omega^{(1)}, \dots, \phi_* \omega^{(k)}) \quad (3.18.10)$$

Όσο για τις συνιστώσες, η γενίκευση είναι απλή. Απλώς εισάγουμε έναν πίνακα για κάθε δείκτη του ταχυστή, οπότε κατ'αντιστοιχία θα έχουμε:

$$(\phi_* T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{a_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{a_1 \dots a_l} \quad (3.18.11)$$

$$(\phi^* S)_{a_1 \dots a_k} = \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{a_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \dots \mu_k} \quad (3.18.12)$$

Το γεγονός ότι μπορούμε να ορίσουμε σε κάποια μαθηματικά αντικείμενα το pullback και σε άλλα το pushforward έγκειται στο γεγονός ότι η απεικόνιση ϕ μπορεί να μην είναι αντιστρέψιμη. Εάν η αντίστροφη απεικόνιση ορίζεται και επιπλέον είναι και οι δύο διαφορίσιμες, τότε ορίζουν μια αμφιδιαφορίαση. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε το pushforward ενός γενικού ταχυστή (k, l) ως:

$$(\phi^* T)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi_* \omega^{(1)}, \dots, \phi_* \omega^{(k)}, [\phi^{-1}]^* V^{(1)}, \dots, [\phi^{-1}]^* V^{(l)}) \quad (3.18.13)$$

με συνιστώσες:

$$(\phi^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{a_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{b_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{b_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (3.18.14)$$

3.19 Παράγωγος Lie

Οι αμφιδιαφορίσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ενεργητικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων. Πράγματι, αν οι δύο πολλαπλότητες υπό εξέταση είναι η ίδια πολλαπλότητα M , είναι σα να εκτελούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων μέσω του pullback ή του pushforward. Έτσι, μια αμφιδιαφορίαση μας επιτρέπει να εξετάσουμε τις τιμές ενός ταχυστή σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια αμφιδιαφορίσεων ϕ_t , που κάθε μια από αυτές μπορεί να θεωρηθεί ότι σχηματίζει μια καμπύλη στην πολλαπλότητα. Άρα μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διαδικασία και να θεωρήσουμε ότι αυτές οι αμφιδιαφορίσεις προέρχονται από διανυσματικά πεδία, με κάθε διάνυσμα εφαπτομενικό στην αντίστοιχη καμπύλη. Για ένα διανυσματικό πεδίο V^μ ορίζουμε τις **ολοκληρωτικές καμπύλες** του πεδίου ως:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu \quad (3.19.1)$$

Η μονοπαραμετρική οικογένεια ϕ_t θα αντιπροσωπεύει τη ροή κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών. Έτσι, εάν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο, έχουμε ταυτόχρονα και μια οικογένεια αμφιδιαφορίσεων, οπότε μπορούμε να εξετάσουμε το ρυθμό μεταβολής ενός ταχυστή κατά μήκος αυτών των καμπυλών. Έχουμε δηλαδή μια νέα μορφή παραγώγου. Εάν για κάθε t η μεταβολή του ταχυστή είναι:

$$\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \phi_{t*} [T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi_t(p))] - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(p) \quad (3.19.2)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παράγωγος Lie της μετρικής γράφεται ως:

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} \quad (3.19.3)$$

τότε ορίζουμε την παράγωγο **Lie** ως:

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}}{t} \right) \quad (3.19.4)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παράγωγος Lie της μετρικής γράφεται ως:

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} \quad (3.19.5)$$

3.20 Συμμετρίες

Η γεωδαιτική εξίσωση:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (3.20.1)$$

μπορεί να γραφεί σε συνάρτηση με την τετραχύτητα ως:

$$U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0 \quad (3.20.2)$$

ή ισοσύνυμα σε συνάρτηση με την τετραορμή $p^\mu = mU^\mu$ ως:

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0 \quad (3.20.3)$$

Στη φυσική, για να απλοποιήσουμε την περιγραφή κάποιων φαινομένων, είναι πολλές φορές χρήσιμο να βρούμε τις συμμετρίες ενός προβλήματος. Στη γενική σχετικότητα υπάρχει ένας λόγος παραπάνω για να βρούμε τις συμμετρίες λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων Einstein. Θεωρούμε ότι μια πολλαπλότητα M διακατέχεται από συμμετρία εάν η γεωμετρία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ένα μετασχηματισμό που απεικονίζει την πολλαπλότητα στον εαυτό της. Οι συμμετρίες της μετρικής ονομάζονται ισομετρίες. Πιο συγκεκριμένα, εάν η μετρική δεν εξαρτάται από μια συντεταγμένη x^{σ^*} τότε η μετρική θα παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μεταθέσεις, οπότε έχουμε ισομετρία. Χρησιμοποιώντας τη γεωδαιτική εξίσωση σε συνάρτηση με την ορμή και κατεβάζοντας το δείκτη μ θα έχουμε:

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = 0 \quad (3.20.4)$$

Ο πρώτος όρος γράφεται ως:

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dp_\mu}{d\tau} \quad (3.20.5)$$

ενώ για το δεύτερο όρο θα έχουμε:

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p_\sigma \quad (3.20.6)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p^\nu \quad (3.20.7)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu \quad (3.20.8)$$

Έτσι, μια εναλλακτική μορφή της γεωδαιτικής εξίσωσης είναι η:

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu \quad (3.20.9)$$

Έτσι, εάν η μετρική δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη x^{σ^*} η συνιστώσα p_{σ^*} της ορμής θα διατηρείται, δηλαδή:

$$\partial_{\sigma^*} g_{\mu\nu} = 0 \implies \frac{dp_{\sigma^*}}{d\tau} = 0 \quad (3.20.10)$$

Για την εύρεση συμμετριών όμως χρειαζόμαστε μια πιο γενική προσέγγιση, αν και ανεξαρτησία από μια συντεταγμένη μας οδηγεί σε συμμετρία το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε και σε πολύπλοκα συστήματα συντεταγμένων οι συμμετρίες της μετρικής μπορεί να μην είναι προφανείς, αλλά αν υπάρχει συμμετρία

η ίδια η γεωμετρία δε θα αλλάζει. Γι' αυτό το λόγο, αν $x^{\sigma*}$ είναι μια συντεταγμένη απ την οποία δεν εξαρτάται η μετρική, θεωρούμε το διάνυσμα

$$K = \partial_{\sigma*} \quad (3.20.11)$$

και αφού οι μερικές παράγωγοι απτελούν βάση του διανυσματικού χώρου οι συνιστώσες του θα είναι:

$$K^\mu = \partial_{\sigma*}{}^\mu = \delta^\mu_{\sigma*} \quad (3.20.12)$$

Το διάνυσμα K παράγει μια ισομετρία, δηλαδή η αναλλοιωότητα της γεωμετρίας εκφράζεται ισοδύναμα με κίνηση κατά τη κατεύθυνση του διανύσματος K . Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$p_{\sigma*} = K^\nu p_\nu = K_\nu p^\nu \quad (3.20.13)$$

Για να είναι αυτή η ποσότητα σταθερή θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \leftrightarrow p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0 \quad (3.20.14)$$

Επεκτείνοντας τη δεύτερη εξίσωση θα έχουμε:

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu K_\nu \nabla_\mu p^\nu + p^\mu p^\nu \nabla_\mu K_\nu \quad (3.20.15)$$

$$= p^\mu p^\nu \nabla_\mu K_\nu \quad (3.20.16)$$

$$= p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)} \quad (3.20.17)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γεωδαιτική εξίσωση για την ορμή και τη συμμετρία του όρου $p^\mu p^\nu$. Άρα, για να διατηρείται η ποσότητα $K_\nu p^\nu$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \leftrightarrow p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0 \quad (3.20.18)$$

Η προτελευταία εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Killing και τα διανυσματικά πεδία που την ικανοποιούν ονομάζονται διανυσματικά πεδία Killing. Τέλος, η συνθήκη για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο Killing και να έχουμε ισομετρία της μετρικής είναι:

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.20.19)$$

3.21 Τανυστής ενέργειας-ορμής

Αν και το τετράνυσμα ενέργειας ορμής p^μ μας δίνει τις πληροφορίες για την ενέργεια και την ορμή ενός σωματιδίου, στην κοσμολογία είναι συχνά πιο χρήσιμο για εκτεταμένα συστήματα να θεωρήσουμε το συμμετρικό τανυστή ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$ εκφράζει τη ροή της τετραορμής από μια επιφάνεια με σταθερό x^ν . Τα περισσότερα κοσμολογικά αντικείμενα μπορούν να θεωρηθούν ως ιδανικά ρευστά, δηλαδή ρευστά που χαρακτηρίζονται πλήρως από την πυκνότητα και την πίεση. Για να καταλάβουμε όμως τα ιδανικά ρευστά ως θεωρήσουμε πρώτα την έννοια της κοσμικής σκόνης. Ως σκόνη χαρακτηρίζουμε μια ομάδα σωματιδίων που βρίσκονται σε ηρεμία μεταξύ τους, ή αλλιώς ως ένα ιδανικό ρευστό με μηδενική πίεση. Αφού τα σωματίδια έχουν σταθερή ταχύτητα ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορούμε να ορίσουμε το πεδίο τετραχύτητας U^μ στο χωροχρόνο. Ακόμη ορίζουμε το τετράνυσμα ροής ως:

$$N^\mu = nU^\mu \quad (3.21.1)$$

όπου n είναι ο αριθμός πυκνότητας των σωματιδίων. Αν όλα τα σωματίδια έχουν ίδια μάζα τότε στο σύστημα ηρεμίας η ενεργειακή πυκνότητα θα είναι:

$$\rho = nm \quad (3.21.2)$$

Εξ ορισμού η ενεργειακή πυκνότητα περιγράφει πλήρως την κοσμική σκόνη. Αυτό που βρήκαμε όμως είναι μόνο σε ένα σύστημα αναφοράς. Για να δούμε τι συμβαίνει και σε άλλα συστήματα παρατηρούμε ότι $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$ και $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Έτσι ορίζουμε τον ταυιστή ενέργειας ορμής:

$$T_{dust}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = nmU^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu \quad (3.21.3)$$

Για τα ιδανικά ρευστά χρειαζόμαστε ένα συμμετρικό ταυιστή, που να είναι διαγώνιος ώστε να μην έχουμε ροή κάποιας συνιστώσας της ορμής προς κάθετες διευθύνσεις και οι χωρικές συνιστώσες πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα οι μόνες ανεξάρτητες συνιστώσες είναι οι T^{00} και T^{ii} . Στο σύστημα ηρεμίας ο ταυιστής θα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Η γενική μορφή του που θα ισχύει σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (3.21.4)$$

ή αντί της μετρικής $\eta^{\mu\nu}$ θα έχουμε $g^{\mu\nu}$ για διαφορετική γεωμετρία του χωροχρόνου.

Κεφάλαιο 4

Γενική θεωρία σχετικότητας

4.1 Νόμος Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη

Ο νόμος του Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη μας λέει ότι κάθε σημειακή μάζα A με μάζα M ελκύει κάθε άλλη σημειακή μάζα με μάζα m με μια δύναμη που έχει διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τις δύο μάζες και είναι ανάλογη των μαζών των δύο σωματιδίων και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης που τα χωρίζει, δηλαδή:

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \quad (4.1.1)$$

όπου \vec{e}_r το μοναδιαίο διάνυσμα από το A στο B και G η βαρυτική σταθερά του Newton με τιμή $G = 6.67 \times 10^{-8} dyn \cdot cm^2/g^2$. Η βαρύτητα είναι συντηρητική δύναμη οπότε όπως προείπαμε μπορεί να γραφεί ως η απόκλιση κάποιου βαθμωτού δυναμικού. Δηλαδή η βαρυτική δύναμη στο σώμα B θα είναι:

$$\vec{F}_{grav} = -m \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \quad (4.1.2)$$

Αν η μάζα B έλκεται από πολλές μάζες M_a σε θέσεις \vec{x}_a τότε το δυναμικό που παράγει τη βαρυτική δύναμη είναι

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_A \frac{GM_A}{|\vec{x} - \vec{x}_A|} \quad (4.1.3)$$

Για μια συνεχή κατανομή φορτίου $\mu(\vec{x})$ θα έχουμε

$$\Phi(\vec{x}) = - \int d^3x' \frac{G\mu(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (4.1.4)$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε Νευτώνειο το βαρυτικό πεδίο ως

$$\vec{g}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \quad (4.1.5)$$

απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση Poisson για τη Νευτώνεια βαρύτητα:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \mu(\vec{x}) \quad (4.1.6)$$

με $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ να ονομάζεται Λαπλασιανή. Γνωρίζουμε ότι για μια κυκλική κίνηση η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο $a = \frac{v^2}{r}$ όπου R η ακτίνα της τροχιάς. Ο 1ος νόμος

του Kepler μας λέει ότι οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο και ο ήλιος βρίσκεται σε μια εστία της έλλειψης. Ο 2ος νόμος μας λέει ότι η ευθεία που ενώνει τον ήλιο με τον πλανήτη διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά και ο 3ος νόμος μας λέει ότι τα τετράγωνα των χρόνων περιφοράς των πλανητών είναι ανάλογα με τους κύβους των μεγάλων ημιαξόνων της έλλειψης. Αν και οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την κίνηση ως κυκλική κίνηση με τη μάζα του κεντρικού σώματος πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του σώματος που εκτελεί τροχιά ($M_C \gg m$). Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{1}{r} \frac{GM_C m}{r^2} = m \frac{\omega^2 r}{r} \implies \frac{GM_C}{r^3} = \frac{2\pi^2}{T} \implies \frac{GM_C}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \implies T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_C} r^3 \quad (4.1.7)$$

με T την περίοδο της τροχιάς. Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως ο νόμος του Kepler για τις περιόδους των πλανητών.

4.2 Αρχή ισοδυναμίας

Η μάζα που m_i εμφανίζεται στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα εκφράζει την ιδιότητα των σωμάτων να αντιστέκονται στην αλλαγή της κινητικής τους κατάστασης, δηλαδή την αδράνεια και γι αυτό είναι γνωστή ως αδρανειακή μάζα. Επίσης, η μάζα m_g που εμφανίζεται στο νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα είναι μια σταθερά αναλογίας της βαρυτικής δύναμης και της απόκλισης ενός βαθμωτού δυναμικού που παράγει τη δύναμη, ένα είδος 'βαρυτικού φορτίου' σε αναλογία με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Αρχικά οι δύο έννοιες δεν έχουν λόγο να συσχετίζονται. Όμως όλα τα πειράματα από την εποχή του Γαλιλαίου δείχνουν ότι όλες οι υλικές μάζες αντιδρούν με το ίδιο τρόπο σε ένα βαρυτικό πεδίο. Πιο συγκεκριμένα όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση σε ένα βαρυτικό πεδίο, οπότε αναγκαστικά πρέπει να ισχύει ότι:

$$m_i = m_g \quad (4.2.1)$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως **Ασθενής Αρχή Ισοδυναμίας**. Άμεση συνέπεια αυτής της αρχής είναι ότι όλα τα σώματα σε ελεύθερη πτώση έχουν την ίδια επιτάχυνση που δίνεται ως:

$$a = -\nabla\Phi \quad (4.2.2)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι βρισκόμαστε σε ένα μικρό κουτί, απομακρυσμένο από εξωτερικές επιδράσεις, σε ένα βαρυτικό πεδίο. Αν αφήσουμε αντικείμενα ελεύθερα αυτά φυσικά θα πέσουν στο κάτω μέρος του κουτιού λόγω της ύπαρξης του βαρυτικού πεδίου. Έστω ότι τώρα βρισκόμαστε στο ίδιο κουτί αλλά αυτή τη φορά μακριά από βαρυτικά πεδία και έστω ότι το κουτί επιταχύνεται ομοιόμορφα. Αν αφήσουμε αντικείμενα ελεύθερα τότε θα κατευθυνθούν και πάλι προς το κάτω μέρος του κουτιού, αφού το κουτί επιταχύνεται προς το μέρος τους. Έτσι, η ασθενής αρχή ισοδυναμίας μας λέει ότι δεν έχουμε τρόπο να ξεχωρίσουμε με βεβαιότητα αν βρισκόμαστε σε ένα βαρυτικό πεδίο ή σε ένα ομοιόμορφα επιταχυνόμενο σύστημα. Βέβαια, θα πρέπει να περιοριστούμε σε μικρές περιοχές του χωροχρόνου γιατί σε μεγάλες περιοχές θα μπορούσαμε να καταλάβουμε αν βρισκόμαστε σε βαρυτικό πεδίο λόγω των παλιρροιακών δυνάμεων. Τελικά μπορούμε να ορίσουμε μια άλλη εκδοχή της ασθενούς αρχής της ισοδυναμίας ως: Τα σώματα που βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση σε ένα βαρυτικό πεδίο υπακούουν στους ίδιους νόμους με το αν βρισκόμαστε σε ένα ομοιόμορφα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς, για μικρές περιοχές του χωροχρόνου. Ένα άλλο αποτέλεσμα της αρχής της ισοδυναμίας είναι ότι αν βρισκόμαστε κάπου στο διάστημα απουσία βαρυτικού πεδίου, τότε είναι σαν να κάνουμε ελεύθερη πτώση παρουσία βαρυτικού πεδίου. Πράγματι, στην ειδική θεωρία σχετικότητας θεωρούμε ως αδρανειακό σύστημα ένα σύστημα το οποίο δεν είναι επιταχυνόμενο και ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα, όπως δηλαδή να αιωρούμαστε στο

διάστημα. Όμως επειδή τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο δεν μπορούμε να καταλάβουμε τη διαφορά. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στην **Αρχή ισοδυναμίας του Einstein** που μας λέει ότι οι νόμοι της φυσικής για μικρές περιοχές του χωροχρόνου ανάγονται στους νόμους της ειδικής θεωρίας σχετικότητας. Μιλάμε για μικρές περιοχές του χωροχρόνου για να αποφύγουμε την επίδραση των παλιρροιακών δυνάμεων (τα σώματα στη γή δεν πέφτουν προς μια σταθερή διεύθυνση αλλά ακτινικά προς αυτήν). Έτσι, το 'καινούργιο' μας αδρανειακό σύστημα το ορίζουμε ως ένα σύστημα που εκτελεί ελεύθερη πτώση σε ένα βαρυτικό πεδίο και επειδή θέλουμε να είναι για μικρές περιοχές του χωροχρόνου το ονομάζουμε **τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς**.

4.3 Μετατόπιση προς το ερυθρό

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο καμπίνες που απέχουν απόσταση z και κινούνται με σταθερή επιτάχυνση μακριά από οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο. Έστω τώρα ότι εκπέμπεται από την πίσω καμπίνα τη χρονική στιγμή t_0 ένα φωτόνιο με μήκος κύματος λ_0 το οποίο θα φτάσει στην προχωρημένη καμπίνα μετά από χρόνο $\Delta t = \frac{z}{c}$ στο σύστημα αναφοράς των καμπίνων. Σε αυτό το χρόνο η ταχύτητα των καμπίνων θα έχει αυξηθεί κατά $\Delta u = a\Delta t = a\frac{z}{c}$. Έτσι, σύμφωνα με το φαινόμενο Doppler θα έχουμε μια μετατόπιση προς το ερυθρό κατά

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta u}{c} = \frac{az}{c^2} \quad (4.3.1)$$

Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας θα πρέπει να συμβαίνει το ίδιο φαινόμενο σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση βαρύτητας a_g . Ας υποθέσουμε ότι κάποιος βρίσκεται στην κορυφή ενός πύργου ύψους z . Τότε για ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από την επιφάνεια της γης θα πρέπει να μετατοπιστεί προς το ερυθρό κατά

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{a_g z}{c^2} \quad (4.3.2)$$

. Άρα ο παρατηρητής που βρίσκεται στην κορυφή του πύργου θα λάβει το φωτόνιο με μετατοπισμένο προς το ερυθρό μήκος κύματος. Επίσης ισχύει ότι $a_g = \nabla\Phi$ και θα έχουμε

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{c^2} \int \partial_z \Phi = \Delta\Phi \quad (4.3.3)$$

Αυτή η υπόθεση πρωτοεπαληθεύτηκε πειραματικά το 1960 από τους Pound και Rebka. Οι συνέπειες αυτού του γεγονότος έρχονται σε αντίθεση με τη θεώρηση της ειδικής θεωρίας σχετικότητας ενός επίπεδου χωροχρόνου. Όταν στέλνουμε ένα σήμα φωτός από την επιφάνεια της γης τότε το φως που φτάνει στην κορυφή του πύργου έχει μειωμένη συχνότητα, δηλαδή έχει μετατοπιστεί προς το ερυθρό. Αυτό συμβαίνει επειδή το φως χάνει ενέργεια προσπαθώντας να εξέλθει από το βαρυτικό πεδίο της γης. Επίσης, οι δύο παρατηρητές βρίσκονται στο ίδιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς αφού η σχετική ταχύτητα μεταξύ τους είναι μηδενική. Αν αναπαραστήσουμε αυτή την κατάσταση σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα τότε οι κοσμικές γραμμές των δύο παρατηρητών θα βρίσκονται στις αντίθετες πλευρές ενός τετραγώνου και η κοσμική γραμμή του φωτός θα είναι η διαγώνιος. Όμως αυτό προστάζει ότι οι χρόνοι εκπομπής και λήψης θα πρέπει να είναι ίσοι. Όμως όπως είδαμε αυτό δε συμβαίνει οπότε θα πρέπει να θεωρήσουμε μια διαφορετική γεωμετρική θεώρηση του χωροχρόνου.

4.4 Καμπυλωμένος χωροχρόνος

Η αρχή της ισοδυναμίας μας λέει ότι οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι με αυτοί της ειδικής σχετικότητας για μικρές περιοχές του χωροχρόνου. Στην καινούργια μας θεώρηση του χωροχρόνου ως μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας αυτό σημαίνει ότι όταν γράψουμε ένα νόμο της φυσικής σε συντεταγμένες Riemann σε ένα σημείο p της πολλαπλότητας παίρνουν την ίδια μορφή με αυτή που θα είχαν σε επίπεδο χώρο. Αυτή η θεώρηση οδηγεί σε μια πιο γενική συνταγή για την περιγραφή της φυσικής σε καμπυλωμένο χωροχρόνο που δίνεται ως εξής: Παίρνουμε ένα νόμο της φυσικής που ισχύει σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε επίπεδο χωροχρόνο. Στη συνέχεια μετατρέπουμε αυτό το νόμο σε ταυυστική μορφή σε ένα σημείο. Όμως οι εξισώσεις ταυυστών είναι αναλλοίωτες ως προς τις συντεταγμένες που επιλέγουμε οπότε μπορούμε να πούμε ότι αυτός ο νόμος έχει ισχύ και στον καμπυλωμένο χωροχρόνο. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε ένα νόμο της φυσικής στον επίπεδο χωροχρόνο και να αντικαταστήσουμε τη μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ με τη πιο γενική μετρική $g_{\mu\nu}$ και τις μερικές παραγώγους με συναλλοίωτες παραγώγους. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σωματίδιο χωρίς επιτάχυνση. Όπως προείπαμε στη γενική σχετικότητα χωρίς επιτάχυνση εννοούμε ότι εκτελούν ελεύθερη πτώση σε βαρυτικό πεδίο. Στον επίπεδο χωροχρόνο τέτοια σωματίδια ακολουθούν ευθείες τροχιές, δηλαδή

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (4.4.1)$$

Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας αυτή η σχέση θα πρέπει να ισχύει και στον καμπυλωμένο χωροχρόνο όταν βρισκόμαστε σε συντεταγμένες Riemann. Η γενίκευση της σε ταυυστική μορφή γίνεται :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (4.4.2)$$

που είναι η γεωδαιτική εξίσωση για ελεύθερα σωματίδια. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επαληθεύσουμε ότι μια τέτοια προσέγγιση οδηγεί στα γνωστά αποτελέσματα της Νευτώνειας θεωρίας. Γ' αυτό το λόγο ορίζουμε το Νευτώνειο όριο απαιτώντας να ισχύουν τρεις συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε τα σωματίδια να κινούνται με μη σχετικιστικές ταχύτητες, το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές και ότι το βαρυτικό πεδίο είναι στατικό, δηλαδή δεν αλλάζει με το χρόνο. Μικρές ταχύτητες σημαίνει ότι:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (4.4.3)$$

οπότε η γεωδαιτική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (4.4.4)$$

Το ότι το πεδίο είναι στατικό σημαίνει ότι οι μερικές παράγωγοι της μετρικής ως προς το χρόνο θα μηδενίζονται, οπότε τα αντίστοιχα σύμβολα Christoffel θα γίνονται:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} \quad (4.4.5)$$

Επίσης, το γεγονός ότι θεωρούμε το πεδίο ασθενές μας επιτρέπει να γράψουμε τη μετρική ως τη μετρική Minkowski συν κάποια μικρή διαταραχή, δηλαδή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.4.6)$$

με $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Από τον ορισμό της αντίστροφης μετρικής έχουμε $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu \rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ όπου $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Δουλεύοντας σε πρώτη τάξη ως προς τη διαταραχή παίρνουμε

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} \quad (4.4.7)$$

και η γεωδαιτική εξίσωση θα γίνεται:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (4.4.8)$$

Αφού όμως $\partial_0 h_{00} = 0$ η χρονική συνιστώσα της εξίσωσης θα είναι:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad (4.4.9)$$

Για τις χωρικές συνιστώσες θα έχουμε:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \partial_i h_{00} \quad (4.4.10)$$

και διαιρώντας και τις δύο πλευρές με $\frac{dt}{d\tau}$ παίρνουμε:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (4.4.11)$$

Κάνοντας την ταυτοποίηση $h_{00} = -2\Phi \rightarrow g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ παρατηρούμε ότι καταλήγουμε στη Νευτώνεια σχέση για βαρύτητα, δηλαδή την $a = -\nabla\Phi$. Έτσι δείξαμε ότι η καμπυλότητα του χωροχρόνου αρκεί για περιγράψουμε τη βαρύτητα στο Νευτώνειο όριο.

4.5 Εξισώσεις Einstein

Ψάχνουμε για μια εξίσωση που θα μας δείχνει πως η μετρική ανταποκρίνεται στην παρουσία υλο-νέργειας, που να αντικαθιστά την εξίσωση Poisson της Νευτώνειας θεωρίας:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (4.5.1)$$

όπου $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ η Λαπλασιανή και ρ η πυκνότητα μάζας. Στη σχετικιστική μορφή που ψάχνουμε θα πρέπει να πάρουμε μια εξίσωση μεταξύ τανυστών. Ο αντίστοιχος τανυστής για την πυκνότητα μάζας θα είναι ο τανυστής ενέργειας $T_{\mu\nu}$ ενώ από τη μελέτη του Νευτωνικού ορίου καθίσταται σαφές ότι το ρόλο του βαρυτικού δυναμικού θα πάρει η μετρική. Έτσι, θα περιμέναμε η νέα εξίσωση να έχει στο ένα μέλος δεύτερες παραγώγους τη μετρικής και δεξιά μέλος μια σταθερά επί το τανυστή ενέργειας. Μια φυσιολογική επιλογή θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τη D' Alembertian $\square = \nabla^\mu\nabla_\mu$ στη μετρική αλλά αυτή η ποσότητα είναι μηδενική λόγω της συμφωνίας της μετρικής. Παρατηρούμε όμως ότι ο τανυστής Riemann αποτελείται από τα σύμβολα Christoffel τις πρώτες παραγώγους του, και αφού τα ίδια τα σύμβολα αποτελούνται από πρώτες παραγώγους της μετρικής έχουμε τελικά δεύτερες παραγώγους της μετρικής. Οι δείκτες του τανυστή Riemann δεν ταιριάζουν με τους δείκτες του τανυστή ενέργειας όμως, οπότε οδηγούμαστε στο να χρησιμοποιήσουμε τον τανυστή Ricci. Οπότε μια προφανής επιλογή είναι:

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (4.5.2)$$

Το πρόβλημα με την παραπάνω εξίσωση έγκειται στο γεγονός ότι θέλουμε να διατηρείται η ενέργεια του συστήματος που σημαίνει:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (4.5.3)$$

Όμως αν ισχύει η εξίσωση μας αυτό θα συνεπάγεται ότι και

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.5.4)$$

το οποίο δεν ισχύει σε οποιαδήποτε γεωμετρία λόγω της ταυτότητας Bianchi:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R \quad (4.5.5)$$

Η υπό εξέταση εξίσωση δηλώνει ότι θα ισχύει

$$R = kg^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = kT \rightarrow \nabla_\mu T = 0 \quad (4.5.6)$$

Ανακαλούμε τώρα ότι η συναλλοίωτη παράγωγος μιας βαθμωτής ποσότητας ταυτίζεται με την μερική παράγωγο, οπότε η παραπάνω σχέση μας λέει ότι η ενέργεια είναι σταθερή σε όλο το χωροχρόνο, κάτι που φυσικά δε θέλουμε αφού πρέπει $T = 0$ όταν έχουμε κενό και $T \neq 0$ παρουσία μάζας. Μια ποσότητα που ξέρουμε ότι διατηρείται και είναι συμμετρικός ταυιστής είναι ο ταυιστής Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Οπότε η εξίσωση που καταλήγουμε θα είναι της μορφής:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (4.5.7)$$

Αυτό που απομένει είναι να βρούμε τη σταθερά k . Γί αυτό το λόγο αρχικά συστέλλουμε τους δείκτες της εξίσωσης και στα δύο μέλη και παίρνουμε : $R = -kT$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε την εξίσωση στην ισοδύναμη μορφή:

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) \quad (4.5.8)$$

Για να είναι συνεπής εξίσωση θα πρέπει να προβλέπει την εξίσωση της Νευτώνειας βαρύτητας στο ασθενές όριο. Γί αυτό το λόγο θεωρούμε ως πηγή ένα ιδανικό ρευστό με ταυιστή ενέργειας

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (4.5.9)$$

όπου U^μ είναι η τετραχύτητα του ρευστού, ρ η πυκνότητα ενέργειας και p η πίεση. Στο Νευτώνιο όριο η πίεση μπορεί να αγνοηθεί αφού θα δουλέψουμε σε μικρές ταχύτητες, οπότε ο ταυιστής ενέργειας θα γίνεται:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu \quad (4.5.10)$$

Δουλεύουμε στο σύστημα ηρεμίας του ρευστού οπότε θα έχουμε:

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0) \quad (4.5.11)$$

όπου ισχύει η συνθήκη κανονικοποίησης $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$. Το g_{00} στοιχείο της μετρικής και αντίστοιχα της αντίστροφης μετρικής θα είναι:

$$g_{00} = -1 + h_{00} \quad g^{00} = -1 - h^{00} \quad (4.5.12)$$

Προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $U^0 = 1$ και $U_0 = -1$ αφού στο όριο που η πυκνότητα ενέργειας προσεγγίζει το μηδέν ο χωρόχρονος θεωρείται επίπεδος. Με αυτές τις προϋποθέσεις ο μόνος σημαντικός όρος του ταυιστή ενέργειας θα είναι ο $T_{00} = \rho$ με ίχνος:

$$T = g^{00} T_{00} = -\rho \quad (4.5.13)$$

οπότε η εξίσωση μας παίρνει τη μορφή:

$$R_{00} = \frac{1}{2}k\rho \quad (4.5.14)$$

Το μόνο που απομένει είναι να υπολογίσουμε τον όρο $R_{00} = R^\lambda{}_{0\lambda 0}$. Οπότε έχουμε:

$$R^i{}_{0j0} = \partial_j \Gamma^i{}_{00} - \partial_0 \Gamma^i{}_{j0} + \Gamma^i{}_{j\lambda} \Gamma^\lambda{}_{00} - \Gamma^i{}_{0\lambda} \Gamma^\lambda{}_{j0} \quad (4.5.15)$$

Ο μόνος όρος που μας ενδιαφέρει είναι ο πρώτος αφού το πεδίο είναι στατικό και δε λαμβάνουμε υπόψη τις χρονικές παραγώγους και αγνοούμε τους όρους δεύτερης τάξης. Για τον πρώτο όρο έχουμε

$$R_{00} = R^i{}_{0i0} \quad (4.5.16)$$

$$= \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right] \quad (4.5.17)$$

$$= -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \quad (4.5.18)$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (4.5.19)$$

Έτσι, συγκρίνοντας με την Νευτώνεια εξίσωση Poisson παρατηρούμε ότι πράγματι προβλέπει τα αντίστοιχα αποτελέσματα αν θεσουμε $k = 8\pi G$. Οπότε τελικά καταλήγουμε στις εξισώσεις Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.5.20)$$

Μια εναλλακτική μορφή των ίδιων εξισώσεων είναι η παρακάτω:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (4.5.21)$$

που προκύπτει παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης, απ όπου παίρνουμε ότι $R = -8\pi G T$ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε και περνάμε τον όρο με το ίχνος στη δεξιά μεριά. Τέλος, όταν δεν έχουμε παρουσία υλοενέργειας, για παράδειγμα μακριά από κάποιο άστρο, τότε ο ταυυστής ενέργειας θα μηδενίζεται και παίρνουμε τις εξισώσεις Einstein στο κενό:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.5.22)$$

4.6 Φορμαλισμός Lagrange

Ένας άλλος τρόπος για να εξαχθούν οι εξισώσεις Einstein είναι να εφαρμόσουμε την αρχή της ελάχιστης δράσης. Πιο συγκεκριμένα θα θέλαμε να κατασκευάσουμε μια δράση, που θα εξαρτάται από τη μετρική και τις παραγώγους της και θα απαιτήσουμε να παρουσιάζει ακρότατο. Αν θυμηθούμε όμως ότι μπορούμε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας να φέρουμε τη μετρική στην κανονική της μορφή και να μηδενίσουμε τις πρώτες παραγώγους της, το βαθμωτό που ψάχνουμε θα πρέπει να περιέχει δεύτερες παραγώγους ως προς τη μετρική. Γνωρίζουμε ότι ο ταυυστής καμπυλότητας Riemann περιέχει δεύτερες παραγώγους της μετρικής και το μόνο βαθμωτό που μπορούμε να κατασκευάσουμε απ αυτόν είναι το βαθμωτό Ricci. Έτσι, ο Hilbert που ήταν ειδικός στη θεωρία των μεταβολών, πρότεινε τη δράση:

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^n x \quad (4.6.1)$$

που είναι η πιο απλή μορφή Λαγκραντζιανής που θα μπορούσαμε να έχουμε και είναι γνωστή ως δράση Hilbert. Οι εξισώσεις κινήσεις θα προέλθουν μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τη μετρική. Για μαθηματικούς λόγους είναι πιο χρήσιμο να θεωρήσουμε μεταβολές σε σχέση με την αντίστροφη μετρική. Ισχύει ότι $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$. Εφόσον το δέλτα του Kronecker παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μεταβολές θα έχουμε:

$$\delta g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} = 0 \implies \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \quad (4.6.2)$$

Άρα τα στάσιμα σημεία της δράσης που προκύπτουν αν μεταβάλλουμε τη μετρική είναι τα ίδια με αυτά που προκύπτουν με μεταβολές ως προς την αντίστροφη μετρική. Χρησιμοποιώντας ότι $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ έχουμε:

$$\delta S_H = (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3 \quad (4.6.3)$$

με

$$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (4.6.4)$$

$$(\delta S)_2 = \int d^n x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.6.5)$$

$$(\delta S)_3 = \int d^n x R \delta \sqrt{-g} \quad (4.6.6)$$

Ο τανυστής Ricci προέρχεται από συστολή δεικτών του τανυστή Riemann που είναι ο:

$$R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu) \quad (4.6.7)$$

Θεωρούμε αυθαίρετη μεταβολή της σύνδεσης Γ :

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \rightarrow \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \quad (4.6.8)$$

Η μεταβολή της σύνδεσης είναι τανυστής (ως διαφορά μεταξύ συνδέσεων) οπότε μπορούμε να πάρουμε τη συναλλοίωτη παράγωγό του:

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}) = \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}) + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} \quad (4.6.9)$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}) \quad (4.6.10)$$

Άρα βάζοντας τους κατάλληλους δείκτες για το τανυστή Ricci θα έχουμε:

$$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu})] = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu})] \quad (4.6.11)$$

Σε αυτό το σημείο θέλουμε να εκφράσουμε τη μεταβολή τη σύνδεσης σε συνάρτηση με τη μετρική οπότε έχουμε:

$$\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[g_{\lambda\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta})] \quad (4.6.12)$$

Οπότε τελικά για τον πρώτο όρο παίρνουμε:

$$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} [g_{\mu\nu}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\lambda}(\delta g^{\sigma\lambda})] \quad (4.6.13)$$

Σε αυτό το σημείο θα ανφέρουμε συνοπτικά το θεώρημα Stokes στη μορφή που παίρνει στη γενική σχετικότητα. Η μορφή του είναι

$$\int_M d^n x \sqrt{|g|} \nabla_\mu V^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1} y \sqrt{|\gamma|} n_\mu V^\mu \quad (4.6.14)$$

Δηλαδή, το θεώρημα αυτό συνδέει την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου με την τιμή του στο όριο του πολυδιάστατου όγκου που ολοκληρώνουμε. Το όριο θα είναι μια υπερεπιφάνεια με κάθετο άνυσμα n_μ . Η μετρική γ_{ij} είναι η μετρική που κληρονομούμε στην υπερεπιφάνεια (που τη θεωρούμε ως υποπολλαπλότητα) από την αρχική πολλαπλότητα ως:

$$\gamma_{ij} = (\phi^* g)_{ij} \quad (4.6.15)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η μεταβολή $(\delta S)_1$ δεν είναι τίποτα άλλο από την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου, οπότε θα ισούται με την τιμή τη μεταβολής στα άκρα του τετραόγκου. Όμως στην αρχή των μεταβολών θεωρούμε πάντα ότι η μεταβολή στα άκρα είναι μηδενική, οπότε τελικά και αυτός όρος δε συνεισφέρει. Προχωράμε τώρα στον όρο $(\delta S)_1$ (ο δεύτερος όρος έχει ήδη τη μορφή που θέλουμε ως προς τη μεταβολή της αντίστροφης μετρικής). Είναι γεγονός ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα με μη μηδινική ορίζουσα ισχύει ότι:

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M) \quad (4.6.16)$$

Η μεταβολή αυτής της σχέσης δίνει:

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M) \quad (4.6.17)$$

Θεωρώντας τώρα ως τον πίνακα M τη μετρική g και $\det M = \det g = g$ έχουμε:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (4.6.18)$$

Οπότε για τον όρο $\delta\sqrt{-g}$ θα έχουμε:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \quad (4.6.19)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.6.20)$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.6.21)$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βρίσκουμε την τελική μορφή της μεταβολής της δράσης:

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} \quad (4.6.22)$$

Αυτή η ποσότητα θα πρέπει να μηδενίζεται για αυθαίρετες μεταβολές της μετρικής οπότε τελικά:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta S_H = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.6.23)$$

που είναι οι εξισώσεις Einstein στο κενό. Για να λάβουμε τις εξισώσεις παρουσία ύλης θα πρέπει να προσθέσουμε έναν όρο ύλης στη δράση, δηλαδή:

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M \quad (4.6.24)$$

όπου κανονικοποιήσαμε τη δράση της βαρύτητας για λάβουμε τις σωστές εξισώσεις. Με παρόμοια διαδικασία λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.6.25)$$

όπου ορίζουμε τον ταυστή ενέργειας-ορμής ως:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.6.26)$$

Έτσι, λαμβάνουμε τις εξισώσεις Einstein παρουσία ύλης:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \implies G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.6.27)$$

Οι εξισώσεις Einstein είναι 10 δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις ως προς τη μετρική. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι περιέχει συμμετρικούς ταυστές δύο δεικτών. Πιο συγκεκριμένα όμως η ταυτότητα Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ επιβάλλει 4 περιορισμούς στον ταυστή Riemann και άρα και στον ταυστή Ricci οπότε στην πραγματικότητα έχουμε έξι ανεξάρτητες εξισώσεις. Ακόμη, οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές, δηλαδή η υπέρθεση δύο λύσεων δεν αποτελεί αναγκαστικά λύση. Αυτό κάνει τις εξισώσεις πολύ πολύπλοκες και χρειάζεται ή να υποτεθεί συμμετρία ή προσεγγιστικές μέθοδοι για να οδηγηθούμε σε λύσεις.

4.7 Κοσμολογική σταθερά

Στις αρχές της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, ο Einstein θεώρησε ότι πρέπει να προσθέσει ένα σταθερό όρο στις εξισώσεις του έτσι ώστε να παράγεται μια λύση για ένα στατικό σύμπαν. Αυτή η σταθερά ονομάστηκε κοσμολογική σταθερά. Φυσικά, σήμερα γνωρίζουμε ότι το σύμπαν δεν είναι στατικό αλλά διαστέλλεται όμως διάφορα κοσμολογικά μοντέλα και η θεωρούμενη ύπαρξη σκοτεινής ενέργειας, σε συνδυασμό με τη κβαντομηχανική, μας έχουν κάνει να πιστέψουμε ότι μια τέτοια σταθερά ίσως έχει ισχύ και θα αντιστοιχεί σε μια ενέργεια κενού του χωροχρόνου. Πιο συγκεκριμένα, αν το κενό έχει ενεργειακή πυκνότητα τότε δε θα έχει προτιμητέο σύστημα αναφοράς. Έτσι, θα μπορούμε σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς να έχουμε έναν ταυστή ενέργειας-ορμής που να μη μηδενίζεται. Αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz σημαίνει ότι ο ταυστής ενέργειας-ορμής να είναι ανάλογος της μετρικής Minkowski :

$$T_{\mu\nu} = -\rho_{vac} \eta_{\mu\nu} \quad (4.7.1)$$

Εκτός τοπικού αδρανειακού συστήματος αναφοράς, δηλαδή σε μια αυθαίρετη γεωμετρία μετρικής $g_{\mu\nu}$ η γενίκευση της παραπάνω σχέσης θα είναι:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \quad (4.7.2)$$

Ο ταυστής ενέργειας-ορμής ενός ιδανικού ρευστού είναι:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (4.7.3)$$

Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις συμπεραίνουμε ότι το κενό μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα ρευστό πίεση ίση με την αρνητική τιμή της πυκνότητας ενέργειας:

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (4.7.4)$$

Μπορούμε τώρα να διαχωρίσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής της εξίσωσης Einstein σε ένα μέρος μάζας και ένα μέρος κενού και παίρνουμε:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \quad (4.7.5)$$

Ορίζοντας ως κοσμολογική σταθερά την ποσότητα:

$$\Lambda = 8\pi G\rho_{vac} \quad (4.7.6)$$

οι εξισώσεις Einstein θα παίρνουν τη μορφή:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (4.7.7)$$

Η δράση, στάσιμα σημεία της οποίας θα παράξει αυτές τις τροποποιημένες εξισώσεις θα δίνεται ως:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + L_M \right] \quad (4.7.8)$$

Τέλος, η κοσμολογική σταθερά έχει προκαλέσει αρκετά προβλήματα στην κοσμολογία καθώς σε θεωρητικό επίπεδο προβλέπουμε μια αναμενόμενη τάξη μεγέθους 10^{112} ενώ οι παρατηρήσεις υποδεικνύουν τιμές της τάξης 10^{-8} !

4.8 Μετρική Schwarzschild

Σε αυτή την παράγραφο θα εξαγάγουμε συνοπτικά μια λύση των εξισώσεων Einstein, τη μετρική Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \quad (4.8.1)$$

που περιγράφει τη μετρική ενός συμμετρικά σφαιρικού βαρυτικού πεδίου. Θα ασχοληθούμε με το εξωτερικό της μάζας που το προκαλεί, δηλαδή με τις εξισώσεις στο κενό. Η μετρική Schwarzschild είναι πολύ χρήσιμη στην κοσμολογία, αφού μας επιτρέπει να περιγράψουμε τη γεωμετρία γύρω από τη γη ή από τον ήλιο σε κάποια προσέγγιση και άρα την κίνηση των πλανητών. Οι εξισώσεις στο εξωτερικό του σφαιρικού σώματος θα είναι:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.8.2)$$

Οι παραδοχές που κάνουμε είναι ότι η πηγή μας είναι σφαιρικά συμμετρική και στατική. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει ότι θα αγνοήσουμε όρους της μετρικής που εξαρτώνται από το χρόνο και επίσης θα αγνοήσουμε όρους της μορφής $(dtdx^i + dx^i dt)$ αφού κάτω από ένα μετασηχματισμό $t \rightarrow -t$ το dt^2 θα παραμένει αναλλοίωτο καθώς και το $dx^i dx^j$, όμως η πρώτη σχέση θα αλλάζει και θέλουμε η λύση μας να είναι αναλλοίωτη. Η σφαιρική συμμετρία σημαίνει ότι σε πολικές συντεταγμένες $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$:

$$ds_{Minskowski}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega \quad (4.8.3)$$

με

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.8.4)$$

η μετρική της μοναδιαίας σφαίρας. Η σφαιρική συμμετρία θα διατηρείται αν πολλαπλασιάσουμε με συναρτήσεις που εξαρτώνται από το r :

$$ds^2 = -e^{2a(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega \quad (4.8.5)$$

Αν θεωρήσουμε την καινούργια μεταβλητή:

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \quad (4.8.6)$$

με συναλλοίωτη μορφή:

$$d\bar{r} = e^{\gamma} dr + e^{\gamma} r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr \quad (4.8.7)$$

η μετρική θα γίνεται:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega \quad (4.8.8)$$

και αλλάζοντας απλά ονομασίες:

$$\bar{r} \rightarrow r \quad (4.8.9)$$

$$\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \rightarrow e^{2\beta} \quad (4.8.10)$$

Εφόσον δε γνωρίζουμε εξ αρχής τι αντιπροσωπεύει η μεταβλητή r ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι θεμιτός αν και δε θα το χρησιμοποιήσουμε. Η μετρική μας θα είναι:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega \quad (4.8.11)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις α και β . Τα σύμβολα Cristoffel θα είναι:

$$\Gamma_{tr}^t = \partial_r \alpha \quad (4.8.12)$$

$$\Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \quad (4.8.13)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta \quad (4.8.14)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} \quad (4.8.15)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\beta} \quad (4.8.16)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad (4.8.17)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \quad (4.8.18)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \quad (4.8.19)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad (4.8.20)$$

και οι μη μηδενικές συνιστώσες του ταυυστή Riemann :

$$R_{trr}^t = \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \quad (4.8.21)$$

$$R_{\theta\theta\theta}^t = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \quad (4.8.22)$$

$$R_{\phi\phi\phi}^t = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \quad (4.8.23)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = r e^{-2\beta} \partial_r \beta \quad (4.8.24)$$

$$R_{\phi r\phi}^r = r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \quad (4.8.25)$$

$$R_{\phi r\phi}^{\theta} = (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta \quad (4.8.26)$$

Συστέλλοντας τους κατάλληλους δείκτες βρίσκουμε τις συνιστώσες του τανυστή Ricci :

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha] \quad (4.8.27)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta \quad (4.8.28)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1 \quad (4.8.29)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \quad (4.8.30)$$

με το βαθμωτό Ricci να είναι:

$$R = -2e^{-2\beta}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\beta})] \quad (4.8.31)$$

Θέτοντας τον τανυστή Ricci ίσο με το μηδέν λόγω των εξισώσεων στο κενό έχουμε:

$$0 = e^{2(\beta\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) \quad (4.8.32)$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι $\alpha = -\beta + c$, με c σταθερά. Αλλάζοντας τη μεταβλητή του χρόνου ως $t \rightarrow e^{-ct}$ μπορούμε να θέσουμε τη σταθερά ίση με μηδέν. Άρα έχουμε:

$$\alpha = \beta \quad (4.8.33)$$

Από τη συνιστώσα των εξισώσεων στο κενό για τη μεταβλητή θ θα έχουμε:

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1 \quad (4.8.34)$$

που ισοδυναμεί με :

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 \quad (4.8.35)$$

Ολοκληρώνοντας και διαλέγοντας ως σταθερά τη R_S θα έχουμε:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r} \quad (4.8.36)$$

Οπότε τελικά καταλήγουμε ότι η μετρική μας παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = -(1 - \frac{R_S}{r})dt^2 + (1 - \frac{R_S}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega \quad (4.8.37)$$

Θέτοντας

$$R_S = 2GM \quad (4.8.38)$$

λαμβάνουμε τη λεγόμενη **μετρική Schwarzschild** :

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega \quad (4.8.39)$$

Η ποσότητα R_S ονομάζεται ακτίνα Schwarzschild . Το γεγονός ότι τη θέσαμε ίση με $2GM$ πηγάζει από το γεγονός ότι στο ασθενές όριο η tt συνιστώσα της μετρικής είναι γύρω από μια σημειακή μάζα είναι:

$$g_{tt} = -(1 - \frac{2GM}{r}) \quad (4.8.40)$$

Η μετρική Schwarzschild για να είναι συνεπής με το ασθενές όριο θα πρέπει να προσεγγίζει το ασθενές όριο όταν:

$$r \gg 2GM \quad (4.8.41)$$

Έτσι, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παράμετρο M ως τη Νευτώνεια μάζα. Ανακτώντας τις μονάδες με $c \neq 1$ η μετρική θα γίνεται:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \quad (4.8.42)$$

4.9 Μελανές οπές

Όταν ένα άστρο εξαντλήσει τα θερμοπυρηνικά τους καύσιμα, τότε ή καταλήγει σε ισορροπία όπου κάποια μη θερμική πηγή πίεσης αντισταθμίζει τη δύναμη της βαρύτητας ή υπόκειται σε βαρυτική κατάρρευση που οδηγεί στη δημιουργία μελανής οπής. Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα χαρακτηριστικά των μελανών οπών Schwarzschild. Είναι σαφές από τη μετρική Schwarzschild ότι για $r = 2M$ και $r = 0$ η μετρική παρουσιάζει ιδιομορφίες. Όμως η πρώτου είδους ιδιομορφία αποδεικνύεται ότι είναι απλά μια ιδιομορφία συντεταγμένων και όχι του ίδιου του χωροχρόνου. Για να το δείξουμε, αρκεί να βρούμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο για $r = 2M$ να μην έχουμε ιδιομορφία της καινούργιας μετρικής. Γι αυτό το σκοπό εισάγουμε τις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein με τις οποίες αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) αλλά μόνο τη συντεταγμένη t σύμφωνα με το μετασχηματισμό:

$$t = u - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (4.9.1)$$

και για τις περιοχές $r > 2M$ ή $r < 2M$ λαμβάνουμε τη μετρική:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 + 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.9.2)$$

Άρα δεν υπάρχει ιδιομορφία σε αυτό το σημείο. Όμως η ιδιομορφία $r = 0$ παραμένει και στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Στην ουσία, $r = 0$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο άπειρης καμπύλωσης του χωροχρόνου και άρα άπειρων βαρυτικών δυνάμεων, δηλαδή είναι μια πραγματική ιδιομορφία. Ας θεωρήσουμε τώρα την κίνηση φωτεινών ακτίνων κατά την ακτινική διεύθυνση. Τότε θα ισχύει αυτόματα:

$$ds^2 = 0 \quad \text{και} \quad d\theta = d\phi = 0 \quad (4.9.3)$$

ή ισοδύναμα:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 + 2dudr = 0 \quad (4.9.4)$$

Κατά συνέπεια κάποιες ακτίνες φωτός θα ταξιδεύουν κατά μήκος των καμπυλών:

$$u = \text{const} \quad (4.9.5)$$

Οι ακτίνες αυτές κινούνται ακτινικά προς το κέντρο, αφού καθώς το t αυξάνει, το r θα πρέπει να μειώνεται για να διατηρείται το u σταθερό. Μια άλλη λύση θα είναι η:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du + 2dr = 0 \quad (4.9.6)$$

και λύνοντας ως προς την παράγωγο του u και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας θα έχουμε:

$$u - 2\left(r + 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right) = \text{const} \quad (4.9.7)$$

Από αυτή τη σχέση παρατηρούμε ότι όταν οι ακτίνες βρίσκονται μακριά από τη μελανή οπή, τότε ταξιδεύει προς τα έξω, ενώ όταν $r < 2M$ τότε θα κινείται ακτινικά προς το κέντρο. Έτσι, διαπιστώνουμε ότι η επιφάνεια:

$$r = 2M \quad (4.9.8)$$

διαχωρίζει το χωροχρόνο σε δύο περιοχές. Την περιοχή στο εξωτερικό της όπου το φως μπορεί να διαφεύγει στο άπειρο και την περιοχή στο εσωτερικό της όπου το βαρυτικό πεδίο είναι τόσο ισχυρό ώστε ούτε το φως δεν μπορεί να διαφύγει, εξού η ονομασία μαύρη τρύπα. Έτσι, αν έχουμε δύο παρατηρητές και ο ένας εισέλθει στο άστρο πριν καταρρεύσει, το τελευταίο σήμα που θα πάρει θα είναι πριν τη στιγμή που το άστρο θα διαπεράσει την κρίσιμη ακτίνα. Η επιφάνεια $r = 2M$ ονομάζεται ορίζοντας γεγονότων. Τέλος, αν θεωρήσουμε έναν παρατηρητή στο κέντρο ενός άστρου που έχει ως τελική κατάληξη τη μελανή οπή και αν υποθέσουμε ότι στέλνει φωτεινούς παλμούς. Εκείνοι που θα φτάσουν στην επιφάνεια, όταν αυτή μόλις διέρχεται από την ακτίνα $r = 2M$ θα παραμείνουν σε αυτή την ακτίνα. Έτσι, ο ορίζοντας μέσα στο άστρο αυξάνεται σε ακτίνα και εμβαδό μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια, από εκεί και πέρα παραμένει στατικός. Αντίστοιχα, η επιφάνεια της μελανής οπής θα αυξάνεται και καθώς εισέρχονται μάζες σε αυτήν, το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως θεώρημα αύξησης εμβαδού των μελανών οπών.

Κεφάλαιο 5

Βαρυτικά κύματα

5.1 Γραμμικοποιημένη βαρύτητα

Για την εξαγωγή των εξισώσεων Einstein θεωρήσαμε το Νευτώνειο όριο, που σημαίνει ότι θεωρούμε ότι το πεδίο είναι ασθενές, δε μεταβάλλεται με το χρόνο και τα σωματίδια υπό εξέταση κινούνται με μη σχετικιστικές ταχύτητες. Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε και πάλι ότι το πεδίο είναι ασθενές αλλά δεν απαιτούμε να ισχύουν οι άλλες δύο προϋποθέσεις. Με αυτό τον τρόπο θα μπορέσουμε να μελετήσουμε φαινόμενα που δεν προκύπτουν από τη Νευτώνεια θεώρηση της βαρύτητας, όπως η βαρυτική ακτινοβολία. Το γεγονός ότι θεωρούμε το πεδίο ασθενές μας επιτρέπει να αποσυνθέσουμε τη μετρική σε ένα άθροισμα της μετρικής Minkowski συν κάποια μικρή διαταραχή, δηλαδή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (5.1.1)$$

με $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Αφού θεωρούμε τη διαταραχή αρχούντως μικρή, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους δεύτερης τάξης, οπότε για την αντίστροφη μετρική θα έχουμε:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (5.1.2)$$

όπου $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ανεβάζουμε και να κατεβάζουμε δείκτες στους τανυστές χρησιμοποιώντας την επίπεδη μετρική. Αυτό εκφράζει μαθηματικά το γεγονός ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το ασθενές όριο της σχετικότητας ως μια διαταραχή που ταξιδεύει σε επίπεδο χωροχρόνο. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz της μορφής $x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta}x^{\beta}$. Τότε για τη μετρική θα έχουμε:

$$g'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'}\Lambda^{\nu'}_{\beta}g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}g_{\mu\nu} \quad (5.1.3)$$

δηλαδή τον κλασικό μετασχηματισμό τανυστών. Αντικαθιστώντας τη μετρική ασθενούς πεδίου θα έχουμε:

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\eta_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}h_{\mu\nu} \quad (5.1.4)$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$g'^{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}h_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\mu\nu} \quad (5.1.5)$$

Άρα η θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Αν για κάποιο παρατηρητή ο χωροχρόνος φαίνεται σχεδόν επίπεδος, θα φαίνεται σχεδόν επίπεδος και σε οποιονδήποτε κινείται

ομοιόμορφα ως προς αυτόν. Θέλουμε τώρα να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης που ικανοποιεί η διαταραχή $h_{\mu\nu}$. Αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης τα σύμβολα Christoffel θα είναι:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) \quad (5.1.6)$$

Για τον ταυνοστή Riemann θα αγνοήσουμε τους όρους που έχουν Γ^2 και κατεβάζοντας ένα δείκτη για πρακτικούς λόγους θα έχουμε:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\lambda}\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \quad (5.1.7)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}) \quad (5.1.8)$$

και ο ταυνοστής Ricci θα είναι:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu}) \quad (5.1.9)$$

όπου έχουμε ορίσει το ίχνος της διαταραχής $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = h^{\mu}_{\mu}$ και τη D' Alembertian $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Τέλος, το βαθμωτό Ricci θα είναι:

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h \quad (5.1.10)$$

Οπότε τελικά, συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω λαμβάνουμε τον ταυνοστή Einstein για το ασθενές πεδίο :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \quad (5.1.11)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h) \quad (5.1.12)$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ (ή $R_{\mu\nu} = 0$ για το κενό) λαμβάνουμε τις εξισώσεις γραμμικοποιημένης βαρύτητας.

5.2 Μετασχηματισμοί βαθμίδας

Έστω ότι πραγματοποιούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής:

$$x'^a = x^a - \epsilon\xi^a(x^{\beta}) \quad (5.2.1)$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^{\beta}} = \delta^a_{\beta} - \xi^a_{,\beta} \quad (5.2.2)$$

Ακόμη, από την πρώτη σχέση έχουμε ότι:

$$x^a = x'^a + \epsilon\xi^a(x^{\beta}) \quad (5.2.3)$$

Απαιτώντας τώρα ότι το ξ^a είναι μικρό και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\frac{\partial x^a}{\partial x'^{\gamma}} = \delta^a_{\gamma} + \epsilon\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial \xi^a}{\partial x^{\beta}} \simeq \delta^a_{\gamma} + \epsilon\xi^a_{,\gamma} \quad (5.2.4)$$

αφού οι συνιστώσες του δέλτα του Kronecker είναι ίδιες σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Γνωρίζουμε όμως ότι ο κανόνας για το μετασχηματισμό της μετρικής είναι ο :

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (5.2.5)$$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$g'_{\alpha\beta} = (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \epsilon \xi_{,\alpha}^\mu \delta_\beta^\nu + \epsilon \xi_{,\beta}^\nu \delta_\alpha^\mu) \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} \implies g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + \epsilon \xi_{,\alpha,\beta} + \epsilon \xi_{,\beta,\alpha} \implies h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + 2\epsilon \partial_{(\alpha} \xi_{\beta)} \quad (5.2.6)$$

Ένας άλλος τρόπος για να κατανοήσουμε το μετασχηματισμό βαθμίδας είναι θεωρώντας μια πολλαπλότητα (χωροχρόνο) υποβάθρου M_b και μια φυσική πολλαπλότητα M_p . Στην πολλαπλότητα M_b θα έχουμε την επίπεδη μετρική $\eta_{\mu\nu}$ ενώ στην πολλαπλότητα M_p θα έχουμε τη μετρική $g_{\mu\nu}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein . Ακόμη θεωρούμε την αμφιδιαφόριση:

$$\phi : M_b \rightarrow M_p \quad (5.2.7)$$

Θεωρώντας τη γραμμικοποιημένη βαρύτητα ως μια θεωρία όπου ένας τανυστής εξελίσσεται σε ένα χωροχρόνο με επίπεδη μετρική θα θέλαμε να δουλέψουμε στην πολλαπλότητα M_b . Η αμφιδιαφόριση μεταξύ των πολλαπλοτήτων μάς επιτρέπει να εκτελούμε ενεργητικούς μετασχηματισμούς στους τανυστές και έτσι μπορούμε να πάρουμε το pullback $(\phi^* g)_{\mu\nu}$ της μετρικής του φυσικού χωροχρόνου. Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να εκφράσουμε τη διαταραχή με τον ακόλουθο τρόπο:

$$h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.8)$$

Ενδιαφερόμαστε για εκείνες τις αμφιδιαφορίσεις για τις οποίες $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Το γεγονός ότι η μετρική $g_{\mu\nu}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein , σημαίνει ότι θα τις ικανοποιεί και η διαταραχή, έστω την γραμμικοποιημένη εκδοχή τους αφού μπορούμε να πάρουμε το pullback ολόκληρων των εξισώσεων. Η ελευθερία μετασχηματισμού βαθμίδας έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχει ένα μεγάλο εύρος επιτρεπτών αμφιδιαφορίσεων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\xi^\mu(x)$ στο χωροχρόνο υποβάθρου και την αμφιδιαφόριση:

$$\psi_\epsilon : M_b \rightarrow M_b \quad (5.2.9)$$

Έτσι θα έχουμε την παρακάτω οικογένεια διαταραχών:

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = [(\phi \circ \psi_\epsilon)^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.10)$$

$$= [\psi_\epsilon^* (\psi_\epsilon^* g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.11)$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο της διαταραχής παίρνουμε:

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = \psi_\epsilon^* (h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.12)$$

$$= \psi_\epsilon^* (h_{\mu\nu}) + \psi_\epsilon^* (\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.13)$$

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = \psi_\epsilon^* (h_{\mu\nu})_\epsilon \left[\frac{\psi_\epsilon^* (\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} \right] \quad (5.2.14)$$

$$= h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.15)$$

Άρα

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} \quad (5.2.16)$$

Έτσι, οι διαταραχές που συνδέονται μεταξύ τους κατ' αυτό τον τρόπο αντιπροσωπεύουν την ίδια φυσική κατάσταση, δηλαδή ίδια γεωμετρία του χωροχρόνου, κάτι που φαίνεται θεωρώντας τη μεταβολή του τανυστή Riemann :

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu \partial_\mu \xi_\sigma + \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma \xi_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho + \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\rho \xi_\nu - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\rho \xi_\mu - \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \xi_\sigma - \partial_\rho \partial_\mu \partial_\sigma \xi_\nu) = 0 \quad (5.2.17)$$

5.3 Κίνηση σωματιδίων

Η μετρική της διαταραχής είναι ένας (0,1) συμμετρικός τανυστής. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αποσυνθέσουμε τη διαταραχή σε ξεχωριστά μέρη(τα οποία θα μένουν αναλλοίωτα κάτω από στροφές στο χώρο). Έτσι, αποσυνθέτουμε τη μετρική σε ένα βαθμωτό, ένα διάνυσμα και ένα τανυστή ως εξής:

$$h_{00} = -2\Phi \quad (5.3.1)$$

$$h_{0i} = w_i \quad (5.3.2)$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij} \quad (5.3.3)$$

με $\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}$ και $s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij})$ Η γενική μετρική τότε θα γράφεται:

$$ds^2 = -1(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j \quad (5.3.4)$$

Ο τανυστής s_{ij} ονομάζεται τανυστής τάσης. Ας μελετήσουμε τώρα τις γεωδαιτικές ελεύθερων σωματιδίων. Αρχικά ,θα πρέπει υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel που δίνονται παρακάτω:

$$\Gamma^0_{00} = \partial_0\Phi \quad (5.3.5)$$

$$\Gamma^i_{00} = \partial_i\Phi + \partial_0 w_i \quad (5.3.6)$$

$$\Gamma^0_{j0} = \partial_j\Phi \quad (5.3.7)$$

$$\Gamma^i_{j0} = \partial_{[j}w_{i]} + \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij} \quad (5.3.8)$$

$$\Gamma^0_{jk} = -\partial_{(j}w_{k)} + \frac{1}{2}\partial_0 h_{jk} \quad (5.3.9)$$

$$\Gamma^i_{jk} = \partial_{(j}h_{k)i} - \frac{1}{2}\partial_i h_{jk} \quad (5.3.10)$$

Εκφράζοντας τώρα τη χρονική και τις χωρικές συνιστώσες της ορμής ως:

$$p^0 = \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (5.3.11)$$

$$p^i = E u^i = E \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (5.3.12)$$

απ όπου η γεωδαιτική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} p^\rho p^\sigma = 0 \quad (5.3.13)$$

Διαιρώντας με την ενέργεια E παίρνουμε:

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{p^\rho p^\sigma}{E} \quad (5.3.14)$$

Από αυτή τη σχέση μπορούμε να πάρουμε τη χρονική συνιστώσα και τις τρεις χωρικές συνιστώσες χωριστά. Συγκεκριμένα, για τη χωρική συνιστώσα της εξίσωσης θα έχουμε:

$$\frac{dE}{dt} = -E[\partial_0\Phi + 2(\partial_k\Phi)u^k - (\partial_{(j}w_{k)} - \frac{1}{2}\partial_0 h_{jk})u^j u^k] \quad (5.3.15)$$

Το ότι η ενέργεια δεν παραμένει σταθερή έγκειται στο γεγονός ότι είναι η ενέργεια στο αδρανειακό σύστημα του σωματιδίου, δηλαδή δεν εμπεριέχεται η σύζευξη με το βαρυτικό πεδίο. Συνεχίζοντας, οι χωρικές συνιστώσες της γεωδαιτικής εξίσωσης θα είναι:

$$\frac{dp^i}{dt} = -E[\partial_i\Phi + \partial_0w_i + 2(\partial_{[i}w_{j]} + \partial_0h_{ij})w^j + (\partial_{(j}h_{k)i} - \frac{1}{2}\partial_ih_{jk})w^jw^k] \quad (5.3.16)$$

που μας δείχνει πώς ανταποκρίνεται το σωματίδιο υπό εξέταση στη βαθμωτή διαταραχή Φ , στη διανυσματική διαταραχή w_i και στις χωρικές συνιστώσες της h_{ij} .

5.4 Βαθμοί ελευθερίας

Θα εξετάσουμε τώρα τις εξισώσεις πεδίου που ικανοποιεί η ίδια η διαταραχή, που θα είναι οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein. Κατ'άρχάς, υπολογίζουμε τις συνιστώσες του ταυυστή Riemann :

$$R_{0j0l} = \partial_j\partial_l\Phi + \partial_0\partial_{(j}w_{l)} - \frac{1}{2}\partial_0\partial_0h_{jl} \quad (5.4.1)$$

$$R_{0jkl} = \partial_j\partial_{[k}w_{l]} - \partial_0\partial_{[k}h_{l]j} \quad (5.4.2)$$

$$R_{ijkl} = \partial_j\partial_{[k}h_{l]i} - \partial_i\partial_{[k}h_{l]j} \quad (5.4.3)$$

Συστέλλοντας τους δείκτες τώρα με τη μετρική $\eta_{\mu\nu}$ μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες του ταυυστή Ricci :

$$R_{00} = \nabla^2\Phi + \partial_0\partial_k w^k + 3\partial_0^2\Psi \quad (5.4.4)$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_k s_j^k \quad (5.4.5)$$

$$R_{ij} = -\partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + \square\Psi\delta_{ij} - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k \quad (5.4.6)$$

όπου $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ η τρισδιάστατη Λαπλασιανή επίπεδου χώρου. Τέλος, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του ταυυστή Einstein :

$$G_{00} = 2\nabla^2\Psi + \partial_k\partial_l s^{kl} \quad (5.4.7)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_k s_j^k \quad (5.4.8)$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl} \quad (5.4.9)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα αντικαθιστώντας στις εξισώσεις Einstein. Ξεκινάμε με την εξίσωση $G_{00} = 8\pi GT_{00}$ που γράφεται ως:

$$\nabla^2\Psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial_l s^{kl} \quad (5.4.10)$$

Αντίστοιχα, για τις $0j$ και ij συνιστώσες θα έχουμε:

$$(\delta_{jk}\nabla^2 - \partial_j\partial_k)w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0\partial_j\Psi + 2\partial_0\partial_k s_j^k \quad (5.4.11)$$

$$(\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\Phi = 8\pi GT_{ij} + (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_0^2)\Psi - \delta_{ij}\partial_p\partial_k w^k + \partial_0\partial_{(i}w_{j)} \quad (5.4.12)$$

$$+ \square s_{ij} - 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl} \quad (5.4.13)$$

Ας τις μελετήσουμε ξεχώριστα. Παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση δεν περιέχει χρονικές παραγώγους ως προς το Ψ . Αυτό συνεπάγεται ότι αν γνωρίζουμε τον ταυυστή έντασης τότε είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε και το Ψ . Όμοια, στη δεύτερη εξίσωση δεν υπάρχουν χρονικές παράγωγοι του w και το ίδιο για το βαθμωτό Φ στην τελευταία εξίσωση. Έτσι, καταλήγουμε στο γεγονός ότι οι μόνοι διαδιδόμενοι βαθμοί ελευθερίας των εξισώσεων Einstein αποτελούνται από το ταυυστή τάσης s_{ij} . Όλα τα άλλα βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά εξαρτώνται από το ταυυστή έντασης και τον ταυυστή ενέργειας-ορμής.

5.5 Εγκάρσια βαθμίδα

Προηγουμένως δείξαμε ότι η οικογένεια διαταραχών:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (5.5.1)$$

αναπαριστά την ίδια φυσική κατάσταση. Αυτό είναι ισοδύναμο με τους παρακάτω μετασχηματισμούς βαθμίδας των επιμέρους στοιχείων που αποσυνθέσαμε πριν τη διαταραχή:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \partial_0 \xi^0 \quad (5.5.2)$$

$$w_i \rightarrow w_i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0 \quad (5.5.3)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi - \frac{1}{3} \partial_i \xi^i \quad (5.5.4)$$

$$s_{ij} \rightarrow s_{ij} + \partial_{(i} \xi_{j)} - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \delta_{ij} \quad (5.5.5)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια ελευθερία στους μετασχηματισμούς οπότε είναι χρήσιμο να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη βαθμίδα για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις. Έτσι επιλέγουμε:

$$\partial_i s^{ij} = 0 \quad (5.5.6)$$

με το διανυσματικό πεδίο ξ να ικανοποιεί:

$$\nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j \partial_i \xi^i = -2 \partial_i s^{ij} \quad (5.5.7)$$

Για την επιλογή αυτής της βαθμίδας έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο τις χωρικές συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου ξ , έχουμε ακόμα την ελευθερία να επιλέξουμε βαθμίδα για τη χρονική του συνιστώσα:

$$\partial_i w^i = 0 \quad (5.5.8)$$

που αντιστοιχεί σε

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i w^i + \partial_0 \partial_i \xi^i \quad (5.5.9)$$

Οι εξισώσεις $\partial_i s^{ij} = 0$ και $\partial_i w^i = 0$ αποτελούν την **εγκάρσια βαθμίδα**. Οι εξισώσεις Einstein σε αυτή την επιλογή βαθμίδας θα γίνουνται:

$$G_{00} = 2\nabla^2 \Psi = 8\pi G T_{00} \quad (5.5.10)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi G T_{0j} \quad (5.5.11)$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j)(\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad (5.5.12)$$

5.6 Βαρυτικά κύματα

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις λύσεις των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Einstein που οδηγούν στα βαρυτικά κύματα. Αρχικά θα μελετήσουμε τις εξισώσεις απουσία οποιασδήποτε πηγής, δηλαδή με μηδενικό τανυστή ενέργειας-ορμής. Ακόμη, θα δουλέψουμε στην εγκάρσια βαθμίδα. Έτσι, για τη 00 εξίσωση θα έχουμε:

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (5.6.1)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Liouville από τα μαθηματικά το οποίο μας λέει ότι για αν μια αρμονική συνάρτηση είναι άνω και κάτω φραγμένη τότε αυτόματα είναι σταθερή. Έτσι, το Ψ , (αφού είναι μέρος της διαταραχής μπορούμε να το θεωρήσουμε μικρό και άρα φραγμένο) θα είναι σταθερό. Όμως παρατηρούμε ότι στις εξισώσεις Einstein εμφανίζεται μόνο στη μορφή παραγώγων του και έτσι μπορούμε να το θέσουμε ίσο με μηδεν. Άρα η πρώτη εξίσωση συνεπάγεται ότι:

$$\Psi = 0 \quad (5.6.2)$$

Με όμοιο τρόπο σκέψης η 0j εξίσωση:

$$\nabla^2 w_j = 0 \quad (5.6.3)$$

θα συνεπάγεται ότι:

$$w_j = 0 \quad (5.6.4)$$

αφού και πάλι η διανυσματική διαταραχή εμφανίζεται μόνο σε μορφή παραγώγων. Για την εξίσωση ij παίρνουμε αρχικά το ίχνος της εξίσωσης (μέσω του δ^{ij}) και παίρνουμε:

$$2\nabla^2(\Phi - \Psi) = 0 \quad (5.6.5)$$

και χρησιμοποιώντας ότι $\Psi = 0$ θα συνεπάγεται ότι:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.6.6)$$

απ όπου για μια ακόμη φορά θα έχουμε ότι:

$$\Phi = 0 \quad (5.6.7)$$

Έτσι, μένουμε με το μηδενικού ίχνους μέρος εξίσωσης, που αποτελείται απ το μηδενικού ίχνους τανυστή έντασης s_{ij} , δηλαδή:

$$\square s_{ij} = 0 \quad (5.6.8)$$

που είναι η τετραδιάστατη μορφή της κυματικής εξίσωσης. Σύμφωνα με αυτά τα αποτελέσματα, μπορούμε να ξαναγυρίσουμε στην αρχική μορφή της διαταραχής, η οποία πλέον θα γράφεται ως:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (5.6.9)$$

όπου για το $h_{\mu\nu}^{TT}$ θα ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$h_{0\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.10)$$

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.11)$$

$$\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.6.12)$$

Αυτές οι συνθήκες ορίζουν τη **μηδενικού ίχνους εγκάρσια** βαθμίδα,εξού και ο συμβολισμός TT (transverse-traceless).Φυσικά ,αυτή η μορφή της διαταραχής θα ικανοποιεί επίσης την κυματική εξίσωση,δηλαδή θα έχουμε:

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.13)$$

Γνωρίζουμε ότι εξισώσεις τέτοιας μορφής δέχονται λύσεις της μορφής:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (5.6.14)$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν επίπεδα κύματα. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτή τη μιγαδική μορφή λύσης στους υπολογισμούς αλλά στο τέλος για να έχουμε φυσική λύση θα πάρουμε το πραγματικό μέρος. Ο τανυστής $C_{\mu\nu}$ είναι ένας (0,2) τανυστής και επιπλέον πρέπει να είναι συμμετρικός και μηδενικού ίχνους,καθώς και οι συνιστώσες του θα αποτελούνται μόνο από το χωρικό μέρος τους. Μαθηματικά αυτά σημαίνουν:

$$C_{0\nu} = 0 \quad (5.6.15)$$

$$\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0 \quad (5.6.16)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση στην εξίσωση θα έχουμε:

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.17)$$

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.18)$$

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho (ik_\sigma h_{\mu\nu}^{TT}) = 0 \quad (5.6.19)$$

$$-\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.20)$$

$$-k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.6.21)$$

Για να έχουμε φυσική λύση θα πρέπει να μη μηδενίζονται όλες οι συνιστώσες της διαταραχής,το οποίο συνεπάγεται ότι θα πρέπει να μηδενίζεται ο όρος:

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \quad (5.6.22)$$

δηλαδή το κυματόνυσμα των βαρυτικών κυμάτων είναι φωτοειδές άνυσμα,ή πιο απλά τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός.Επιβάλλοντας στη λύση μας την ιδιότητα της διαταραχής ότι πρέπει να είναι εγκάρσια παίρνουμε:

$$\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (5.6.23)$$

συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει:

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0 \quad (5.6.24)$$

και λέμε ότι το κυματόνυσμα είναι κάθετο στο συντελεστή-τανυστή $C^{\mu\nu}$.Για παράδειγμα,αν το βαρυτικό κύμα ταξιδεύει κατά τη διεύθυνση x^3 τότε το κυματόνυσμα θα έχει τη μορφή:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3) \quad (5.6.25)$$

και αφού το κυματόνυσμα πρέπει να είναι φωτοειδές προκύπτει ότι:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (5.6.26)$$

Ακόμη, αφού ισχύει $k_\mu C^{\mu\nu} = 0$ θα ισχύει και ότι $k^\mu C_{\mu\nu} = 0$ και αφού ισχύει ότι $C_{0\nu} = 0$ προκύπτει ότι:

$$C_{3\nu} = 0 \quad (5.6.27)$$

Οπότε τελικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τανυστής $C_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός και μηδενικού ίχνους συμπεραίνουμε ότι θα έχει τη γενική μορφή:

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6.28)$$

Άρα για ένα βαρυτικό κύμα που ταξιδεύει προς την κατεύθυνση x^3 οι συντελεστές C_{11}, C_{12} καθώς και η συχνότητα ω περιγράφουν πλήρως το κύμα.

5.7 Πόλωση βαρυτικών κυμάτων

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα φυσικά χαρακτηριστικά των βαρυτικών κυμάτων θα θεωρήσουμε την επίδραση που έχουν στις τροχιές δοκιμαστικών σωματιδίων. Δεν είναι όμως αρκετό να λύσουμε για την τροχιά ενός μόνο σωματιδίου αφού θα είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε μηδενικού ίχνους-εγκάρσιες συντεταγμένες στις οποίες το σωματίδιο θα φαίνεται να είναι ανεπηρέαστο από τη διέλευση του κύματος. Έτσι, θεωρούμε την εξίσωση γεωδαιτικής απόκλισης κοντινών σωματιδίων που περιγράφονται από το πεδίο ταχύτητας $U^\mu(x)$ και διάνυσμα διαχωρισμού $S^\mu(x)$:

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma \quad (5.7.1)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το πεδίο ταχύτητας ως το πεδίο $(1,0,0,0)$ και να προσθέσουμε σε αυτό κάποια διόρθωση λόγω της διαταραχής. Όμως επειδή ο τανυστής Riemann αποτελείται από όρους πρώτης τάξης ως προς τη διαταραχή (και θέλουμε να δουλέψουμε σε όρους πρώτης τάξης) μπορούμε να αγνοήσουμε τις διορθώσεις του πεδίου ταχύτητας, δηλαδή τα θεωρούμε προσεγγιστικά ακίνητα. Χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο τις συνιστώσες $R^\mu{}_{00\sigma}$ ή ισοδύναμα $R^\mu{}_{00\sigma}$ αφού οι άλλες συνιστώσες θα μηδενίζονται λόγω του πεδίου ταχύτητας. Θα έχουμε:

$$R^\mu{}_{00\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{00}^{TT} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\mu 0}^{TT} - \partial_\mu \partial_0 h_{\sigma 0}^{TT}) \quad (5.7.2)$$

Όμως ισχύει ότι:

$$h_{\mu 0}^{TT} = 0 \quad (5.7.3)$$

Άρα θα έχουμε:

$$R^\mu{}_{00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (5.7.4)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι αργά κινούμενα σωματίδια συνεπάγεται ότι $\tau = t$ οπότε η γεωδαιτική εξίσωση θα γίνεται:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}{}_\sigma \quad (5.7.5)$$

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισάγουμε το συμβολισμό:

$$h_+ = C_{11} \quad (5.7.6)$$

$$h_x = C_{12} \quad (5.7.7)$$

Οπότε ο ταυσιτής $C_{\mu\nu}$ θα γράφεται ως:

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7.8)$$

Παρατηρούμε ότι τα δοκιμαστικά σωματίδια θα διαταραχθούν μόνο σε κατευθύνσεις κάθετες στο κυματόνυσμα (για το βαρυτικό κύμα που θεωρήσαμε ότι ταξιδεύει κατά τη κατεύθυνση x^3). Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $h_x = 0$. Τότε οι συνιστώσες της γεωδαιτικής εξίσωσης θα γίνονται:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (5.7.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (5.7.10)$$

Για να βρούμε τις λύσεις σε αυτές τις εξισώσεις είναι χρήσιμο να ξανασυζητήσουμε την έννοια της γεωδαιτικής απόκλισης. Αν τα δύο δοκιμαστικά σωματίδια τα ονομάσουμε A και B τότε θεωρούμε ότι το A βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση, δηλαδή σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Το διάλυμα απόκλισης S^1 που δείχνει προς το σωματίδιο B θα δίνει και τις συντεταγμένες του ως προς το A. Πριν τη διεύλωση του βαρυτικού κύματος η απόσταση μεταξύ τους είναι σταθερή, έστω $S^1(0)$ ενώ μετά τη διεύλωση το σωματίδιο B θα διαταραχθεί. Έτσι, μπορούμε να αποσυνθέσουμε το διάλυμα απόκλισης ως:

$$S^1 = S^1(0) + \delta S^1 \quad (5.7.11)$$

Όμως θεωρούμε ότι η απόκλιση λόγω του βαρυτικού κύματος είναι αμελητέα και έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το δS^1 με το $S^1(0)$. Από την άλλη ο μόνος όρος που αλλάζει σε συνάρτηση με το χρόνο είναι το δS^1 οπότε οι εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta S^1 = \frac{1}{2} S^1(0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (5.7.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta S^2 = -\frac{1}{2} S^2(0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (5.7.13)$$

Τώρα, είμαστε σε θέση να λύσουμε τις εξισώσεις με απλή ολοκλήρωση και παίρνουμε:

$$\delta S^1 = \frac{1}{2} S^1(0) h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma} \implies S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^1(0) \quad (5.7.14)$$

$$\delta S^2 = -\frac{1}{2} S^2(0) h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma} \implies S^2 = \left(1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^2(0) \quad (5.7.15)$$

Παρατηρούμε, ότι αν τα σωματίδια ήταν αρχικά χωρισμένα κατά τη x^1 διεύθυνση τότε θα ταλαντώνονται κατά αυτή τη διεύθυνση και αντίστοιχα για την διεύθυνση x^2 . Από εκεί βγαίνει και ο συμβολισμός '+'. Με όμοια διαδικασία, αν θέσουμε μόνο $h_+ = 0$ τότε οι εξισώσεις θα είναι:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_x e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (5.7.16)$$

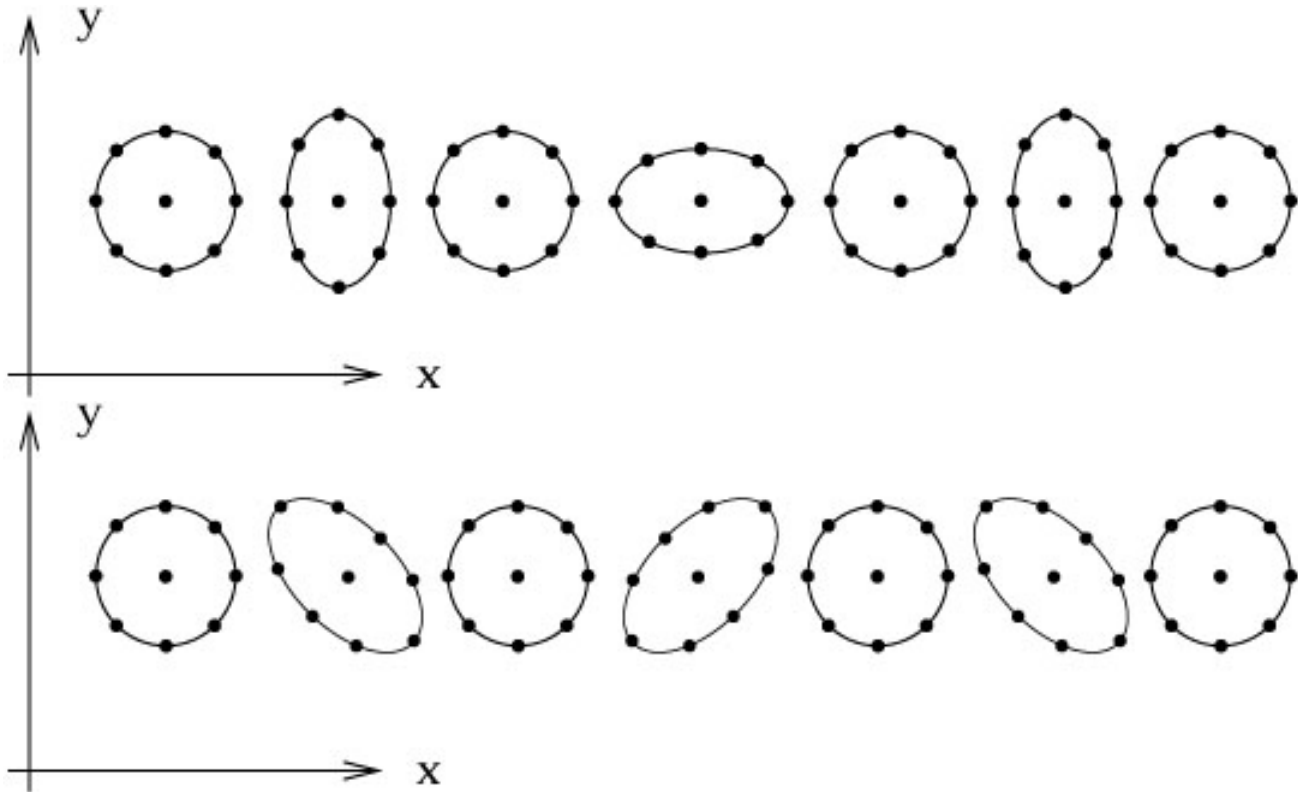
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_x e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (5.7.17)$$

και με όμοια συλλογιστική οι λύσεις θα είναι

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2}h_x e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0) \tag{5.7.18}$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2}h_x e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0) \tag{5.7.19}$$

όπου η πόλωση έχει σχήμα x και διαφέρει κατα 45° απ την άλλη κατάσταση πόλωσης. Φυσικά ,μπορούμε να έχουμε και υπέρθεση των καταστάσεων πόλωσης αλλά ανεξάρτητες είναι μόνο αυτές οι δύο, οι οποίες απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.1: Οι δύο ανεξάρτητες καταστάσεις πόλωσης βαρυτικών κυμάτων. Η εικόνα βρίσκεται στην [1]

5.8 Παραγωγή βαρυτικών κυμάτων από πηγές

Θα ασχοληθούμε τώρα με τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein αλλά εισάγοντας και τον τανυστή ενέργειας-ορμής και χωρίς να είμαστε στη εγκάρσια βαθμίδα. Κατ'αρχάς, είναι χρήσιμο να εισάγουμε μια παραλλαγή της διαταραχής που ονομάζεται διαταραχή αντίστροφου ίχνους:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} \tag{5.8.1}$$

με

$$\bar{h} - \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h \tag{5.8.2}$$

Εάν εκτελέσουμε το μετασχηματισμό βαθμίδας $h_{\mu\nu}^\xi = h_{\mu\nu} + 2\epsilon\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$, η αντίστροφοι ίχνους διαταραχή θα μετασχηματίζεται ως:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} - \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu} \quad (5.8.3)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε και πάλι ελευθερία στην επιλογή βαθμίδας. Η συνθήκη που επιλέγουμε για το πεδίο ξ είναι η:

$$\square \xi_\mu = -\partial_\lambda \bar{h}_\mu^\lambda \quad (5.8.4)$$

μπορούμε να θέσουμε:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.8.5)$$

Αυτή η συνθήκη είναι γνωστή ως βαθμίδα **Lorenz**. Ο τανυστής Einstein στη βαθμίδα Lorenz γράφεται ως:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (5.8.6)$$

οπότε οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις στη βαθμίδα Lorenz θα είναι:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (5.8.7)$$

Για να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση θα πρέπει αρχικά να βρούμε τη συνάρτηση Green για την D'Alembertian. Η συνάρτηση αυτή όπως γνωρίζουμε από τον ηλεκτρομαγνητισμό θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^4(x^\sigma - y^\sigma) \quad (5.8.8)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι η καθυστερημένη συνάρτηση Green :

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}\delta[(|x-y| - (x^0 - y^0))\theta(x^0 - y^0)] \quad (5.8.9)$$

όπου x, y αποτελούνται μόνο από χωρικές συνιστώσες και

$$|x-y| = [\delta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j)]^{1/2} \quad (5.8.10)$$

αν η συνάρτηση θ ισούται με τη μονάδα όταν $x^0 > y^0$ και μηδενίζεται αλλιώς. Η χρησιμότητα της συνάρτησης Green μας επιτρέπει να γράψουμε κατευθείαν τη λύση ως:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4G \int \frac{1}{|x-y|} T_{\mu\nu}(t - |x-y|, y) d^3y \quad (5.8.11)$$

απόπου θέτουμε τον καθυστερημένο χρόνο ως:

$$t_r = t - |x-y| \quad (5.8.12)$$

Έτσι, αν η πηγή βρίσκεται στη θέση y και ο παρατηρητής στη x τότε η διαταραχή προέρχεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής της πηγής στον παρελθόντα χρόνο $t - |x-y|$ (υπενθυμίζουμε ότι δουλεύουμε σε μονάδες όπου $c = 1$). Σε αυτό το σημείο κάνουμε τις εξής παραδοχές: Υποθέτουμε ότι η πηγή βρίσκεται πολύ μακριά, είναι απομονωμένη και κινείται με μη σχετικιστικές ταχύτητες. Πριν προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να γράψουμε το μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης στο χωροχρόνο. Εάν έχουμε μια συνάρτηση $\phi(t, x)$ που εξαρτάται από το χωροχρόνο μάς ενδιαφέρει κυρίως να τη μετασχηματίσουμε ως προς το χρόνο. Έτσι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης θα γράφεται:

$$\tilde{\phi}(\omega, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, x) \quad (5.8.13)$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι:

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, x) \quad (5.8.14)$$

Είμαστε σε θέση τώρα να πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της διαταραχής και έχουμε:

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, x) \quad (5.8.15)$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |x - y|, y)}{|x - y|} \quad (5.8.16)$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3y e^{i\omega t_r} e^{i\omega|x-y|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, y)}{|x - y|} \quad (5.8.17)$$

$$= 4G \int d^3y e^{i\omega|x-y|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, y)}{|x - y|} \quad (5.8.18)$$

Κάνοντας χρήση των υποθέσεών μας για την πηγή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρίσκεται σε χωρική απόσταση r , πολύ μακριά και τότε θα ισχύει ότι $\delta r \ll r$. Ακόμη, αφού θεωρούμε ότι κινείται και με μη σχετικιστικές ταχύτητες θα ισχύει $\delta r \ll \omega^{-1}$. Άρα ο όρος $\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|}$ μπορεί να προσεγγισθεί από τον $\frac{e^{i\omega r}}{r}$ που είναι σταθερός και βγαίνει από το ολοκλήρωμα. Άρα:

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, x) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, y) \quad (5.8.19)$$

Γράφοντας τη συνθήκη βαθμίδας Lorenz στο χώρο Fourier θα έχουμε:

$$\tilde{h}^{0\nu} = \frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{h}^{i\nu} \quad (5.8.20)$$

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο τις χωρικές συνιστώσες και από την παραπάνω σχέση θα λάβουμε τις υπόλοιπες. Από το τελευταίο ολοκλήρωμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και θα έχουμε:

$$\int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, y) = \int \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) d^3y - \int y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) d^3y \quad (5.8.21)$$

Ο πρώτος όρος είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα που θα μηδενίζεται αφού η πηγή θεωρείται απομονωμένη, δηλαδή στα άκρα δε θεωρούμε ότι υπάρχει ενέργεια. Ακόμη, λόγω της σχέσης $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier θα ισχύει ότι:

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu} \quad (5.8.22)$$

Άρα το ολοκλήρωμα θα γίνεται:

$$\int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, y) = i\omega \int y^i \tilde{T}^{0j} d^3y \quad (5.8.23)$$

$$= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \quad (5.8.24)$$

$$= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l})] d^3y \quad (5.8.25)$$

$$= -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y \quad (5.8.26)$$

Στην παραπάνω εξαγωγή χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, και στο τέλος το γεγονός ότι η πηγή είναι απομονωμένη και τη συνθήκη διατήρησης ενέργειας στο χώρο Fourier . Ορίζουμε τον **τετραπολικό τανυστή** της ενεργειακής πυκνότητας της πηγής ως:

$$I_{ij} = \int y^i y^j T^{00}(t, y) d^3y \quad (5.8.27)$$

Στο χώρο Fourier η λύση θα γράφεται ως:

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, x) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega) \quad (5.8.28)$$

και μετασχηματίζοντας πίσω στο χρόνο λαμβάνουμε την τετραπολική σχέση για τα βαρυτικά κύματα:

$$\tilde{h}_{ij}(t, x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2G}{r} \int d\omega e^{i(t-r)\omega} \omega^2 \tilde{I}_{ij}(\omega) \quad (5.8.29)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int d\omega e^{-i\omega t_r} \tilde{I}_{ij}(\omega) \quad (5.8.30)$$

$$\tilde{h}_{ij}(t, x) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r) \quad (5.8.31)$$

με

$$t_r = t - r \quad (5.8.32)$$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως η **τετραπολική σχέση** για τα βαρυτικά κύματα και είναι πολύ σημαντική για να κατανοήσουμε τη φύση των βαρυτικών κυμάτων. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε από τον ηλεκτρομαγνητισμό, ότι ο κύριος όρος που προκαλεί την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από μία επιταχυνόμενη κατανομή φορτίου είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή. Για παράδειγμα, για ένα μεμονωμένο σημειακό φορτίο q με διάνυσμα θέσης x ως προς την αρχή των αξόνων η διπολική του ροπή θα είναι:

$$d(t) = qx(t) \quad (5.8.33)$$

Η ισχύς που ακτινοβολείται είναι:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (5.8.34)$$

με a την επιτάχυνση, ή πιο γενικά

$$P \propto (\ddot{d})^2 \quad (5.8.35)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την αναλογία που θα μπορούσαμε να έχουμε στη βαρύτητα. Το βαρυτικό ανάλογο της ηλεκτρικής διπολικής ροπής είναι:

$$d_g(t) = mx(t) \quad (5.8.36)$$

με $x(t)$ τη θέση της κατανομής μάζας την εκάστοτε στιγμή. Έτσι, ίσως κάποιος περίμενε να παράγεται βαρυτική ακτινοβολία από τη δεύτερη παράγωγο της βαρυτικής διπολικής ροπής. Όμως παρατηρούμε ότι αν πάρουμε απλά την πρώτη παράγωγο, τότε έχουμε:

$$\dot{d} = m\dot{x} = p \quad (5.8.37)$$

όπου p η ορμή του συστήματος. Φυσικά γνωρίζουμε ότι η συνολική ορμή ενός συστήματος πρέπει να παραμένει σταθερή και η δεύτερη παράγωγος κατευθείαν μηδενίζεται. Έτσι δεν μπορούμε να παράξουμε βαρυτική ακτινοβολία από τη διπολική ροπή. Οπότε φαίνεται τώρα εύλογο πως η διαταραχή της μετρικής είναι ανάλογη της δεύτερης χρονικής παραγωγού του τετραπολικού τανυστή. Τέλος, είναι σαφές από τα παραπάνω ότι κάθε σώμα με μάζα που επιταχύνεται παράγει σε κάποιο βαθμό βαρυτικά κύματα.

5.9 Σύστημα διπλών αστέρων

Ως ένα παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο αστέρων ίσης μάζας M που βρίσκονται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R γύρω από το κέντρο μάζας τους. Θα υποθέσουμε ότι η Νευτώνεια ανάλυση είναι επαρκής. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για κυκλικές τροχιές θα έχουμε:

$$\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mu^2}{R} \quad (5.9.1)$$

που μας δίνει την ταχύτητα:

$$u = \left(\frac{GM}{4R}\right)^{1/2} \quad (5.9.2)$$

Η περίοδος μιας πλήρους περιστροφής θα είναι:

$$T = \frac{2\pi R}{u} \quad (5.9.3)$$

απ' όπου προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα της κίνησης:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{GM}{4R^3}\right)^{1/2} \quad (5.9.4)$$

Αφού τα άστρα διαγράφουν κυκλικές τροχιές μπορούμε να γράψουμε τις συντεταγμένες τους ως:

$$x_a^1 = R\cos\Omega t \quad (5.9.5)$$

$$x_a^2 = R\sin\Omega t \quad (5.9.6)$$

$$x_b^1 = R\cos\Omega t \quad (5.9.7)$$

$$x_b^2 = R\sin\Omega t \quad (5.9.8)$$

αντίστοιχα για τα άστρα a και b . Χρησιμοποιώντας τον τύπο του τετραπολικού τανυστή και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο όρος T^{00} είναι η πυκνότητα ενέργειας-μάζας, οπότε το ολοκλήρωμα θα είναι απλά $2M$, θα έχουμε για τις συνιστώσες του τετραπολικού τανυστή:

$$I_{11} = 2MR^2\cos^2\Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t) \quad (5.9.9)$$

$$I_{22} = 2MR^2\sin^2\Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t) \quad (5.9.10)$$

$$I_{12} = I_{21} = 2MR^2(\cos\Omega t)(\sin\Omega t) = MR^2\sin 2\Omega t \quad (5.9.11)$$

$$I_{i3} = 0 \quad (5.9.12)$$

οι υπόλοιπες συνιστώσες μηδενίζονται. Τέλος, είμαστε σε θέση να γράψουμε τη διαταραχή χρησιμοποιώντας την τετραπολική σχέση:

$$\tilde{h}_{ij}(t, x) = \frac{8GM}{r}\Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9.13)$$

5.10 Τανυστής ενέργειας-ορμής βαρυτικών κυμάτων

Θα θέλαμε σε αυτό το σημείο να βρούμε κάποιο τανυστή ενέργειας-ορμής που να αντιστοιχεί στα βαρυτικά κύματα. Το θέμα αυτό είναι αρκετά πιο δύσκολο απ' όσο αρχικά μοιάζει. Κατ' αρχάς γνωρίζουμε από την εμπειρία σε άλλους κλάδους της φυσικής, ότι ο τανυστής ενέργειας ορμής (π.χ. στον ηλεκτρομαγνητισμό) έχει όρους που είναι ανάλογοι με τα τετράγωνα των πεδίων. Υπάρχουν πολλά προβλήματα με το να εφαρμοστεί κάτι τέτοιο στα βαρυτικά κύματα. Κατά πρώτον, ο τανυστής ενέργειας ορμής έχει συνήθως μονάδες ενεργειακής πυκνότητας. Αν και μέχρι τώρα έχουμε δουλέψει σε μονάδες όπου απλά $c = 1$ (δηλαδή οι διαστάσεις χρόνου και μήκους ταυτίζονται), στη γενική σχετικότητα πολλές φορές δουλεύουμε σε μονάδες όπου θέτουμε και $G = 1$ που συνεπάγεται ότι διαστάσεις μάζας ισούνται με διαστάσεις απόστασης. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\frac{dE}{d^3x} \sim \frac{\text{ergs}}{\text{cm}^3} \sim \frac{g}{\text{cm}^3} \sim \frac{cm}{\text{cm}^3} \sim \frac{1}{\text{cm}^2} \sim \frac{1}{\text{sec}^2} \quad (5.10.1)$$

Η μετρική είναι αδιάστατη απ την άλλη οπότε αφού θέλουμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, για να πετύχουμε τις σωστές διαστάσεις μπορούμε πρώτα να παραγωγίσουμε, δηλαδή \hbar^2 . Όμως σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα το πλάτος του βαρυτικού κύματος είναι σταθερό οπότε η παραπάνω ποσότητα θα μηδενίζεται. Άρα τα βαρυτικά κύματα δεν έχουν καλά εντοπισμένη ενεργειακή πυκνότητα. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να λάβουμε στη διαταραχή έναν παραπάνω όρο που θα το θεωρήσουμε σε δεύτερη τάξη. Ένα άλλο επιχείρημα που οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα είναι να σκεφτούμε ότι κατ' αρχάς είμαστε σίγουροι ότι τα βαρυτικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια, αφού όπως είδαμε επηρεάζουν τις δοκιμαστικές μάζες και λόγω αρχής διατήρησης ενέργειας πρέπει η ενέργεια που λαμβάνουν να προέρχεται από τα κύματα. Η γενική σχετικότητα όμως μας μαθαίνει ότι οποιαδήποτε μορφή μάζας ή ενέργειας καμπυλώνει το χωροχρόνο γύρω της. Στη μέχρι τώρα θεώρηση μας θεωρήσαμε ότι τα βαρυτικά κύματα είναι διαταραχές στον ήδη επίπεδο χωροχρόνο, κάτι που αποκλείει την καμπύλωσή του. Έτσι χρειαζόμαστε να θέσουμε μια διαταραχή δεύτερης τάξης που να ταξιδεύει στον ήδη διαταραγμένο χωροχρόνο. Εξετάζοντας τις εξισώσεις Einstein στο κενό επεκτείνουμε τη μετρική και τον τανυστή Ricci ως εξής:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} \quad (5.10.2)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} \quad (5.10.3)$$

όπου οι παρενθέσεις δηλώνουν τις τάξεις μεγέθους. Η πρώτης τάξης εξίσωση στο κενό θα είναι:

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(1)}] = 0 \quad (5.10.4)$$

Η δεύτερης τάξης εξίσωση στο κενό θα γράφεται ως:

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] + R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] = 0 \quad (5.10.5)$$

με τον πρώτο όρο να είναι γραμμικός ως προς τη διαταραχή $h^{(2)}_{\mu\nu}$ και το δεύτερο όρο να είναι τετραγωνικός ως προς τη μετρική $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Για τον τετραγωνικό όρο θα έχουμε:

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu h_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} (\partial_\mu h_{\rho\sigma}) \partial_\nu h^{\rho\sigma} + (\partial^\sigma h^\rho{}_\nu) \partial_{[\sigma} h_{\rho]\mu} - h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_{(\mu} h_{\nu)\sigma} \quad (5.10.6)$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_\sigma (h^{\rho\sigma} \partial_{\rho\mu} h_{\nu\mu}) - \frac{1}{4} (\partial_\rho h_{\mu\nu}) \partial^\rho h - (\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \partial^\rho h) \partial_{(\mu} h_{\nu)\rho} \quad (5.10.7)$$

Γράφοντας τις εξισώσεις στο κενό στη μορφή:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (5.10.8)$$

παίρνουμε τη σχέση:

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(1)}[h^{(2)}]\eta_{\mu\nu} = 8\pi G t_{\mu\nu} \quad (5.10.9)$$

όπου ορίσαμε την ποσότητα:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \{R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(2)}[h^{(1)}]\eta^{\mu\nu}\} = 0 \quad (5.10.10)$$

όπου δε λάβαμε υπόψη όρους της μορφής $h^{(1)\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(1)}[h^{(1)}]$, αφού $R_{\rho\sigma}^{(1)}[h^{(1)}] = 0$. Μοιάζει εύλογο να υποθέσουμε ότι αυτός ο ταυιστής θα μπορούσε να είναι ο ταυιστής ενέργειας-ορμής των κυμάτων, αφού ικανοποιεί πολλά από τα χαρακτηριστικά που θέλουμε να έχει: είναι τετραγωνικός ως προς τη διαταραχή, είναι συμμετρικός και επίσης λόγω της ταυτότητας Bianchi θα διατηρείται:

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0 \quad (5.10.11)$$

Το γεγονός ότι η βαρυτική ενεργειακή πυκνότητα δεν είναι τοπικά ορισμένη μας οδηγεί στο να σκεφτούμε να πάρουμε το μέσο όρο του ταυιστή ενέργειας ορμής για διάφορα μήκη κύματος σε κάποια περιοχή. Αυτό δεν μας δίνει ακριβώς την πληροφορία για το πού στο κύμα υπολογίζεται ο ταυιστής ενέργειας-ορμής, αλλά μπορούμε να το κάνουμε στην περιοχή ενός μήκους κύματος. Διαλέγουμε να δουλέψουμε στη βαθμίδα TT, όπου:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.10.12)$$

$$h^{TT} = 0 \quad (5.10.13)$$

Ο ταυιστής $R_{\mu\nu}^{(2)TT}$ σε αυτή τη βαθμίδα θα γίνεται:

$$R_{\mu\nu}^{(2)TT} = \frac{1}{2}[h_{TT}^{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma}^{TT} + \frac{1}{4}(\partial_\mu h_{\rho\sigma}^{TT})\partial_\nu h^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial^\sigma h_{\rho\nu}^{TT})\partial_\sigma h_{\lambda\mu}^{TT} \quad (5.10.14)$$

$$- \frac{1}{2}(\partial^\sigma h_{\rho\nu}^{TT})\partial^\rho h_{\sigma\mu}^{TT} - h_{TT}^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_{(\mu}h_{\nu)\sigma}^{TT} + \frac{1}{2}h_{TT}^{\rho\sigma}\partial_\sigma\partial_\rho h_{TT}^{\mu\nu} \quad (5.10.15)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε μέσους όρους είναι χρήσιμο να κάνουμε κάποιες προσεγγίσεις. Αρχικά, ο μέσος όρος (που εκφράζεται από τις αγκύλες) πρώτων παραγώγων θα μηδενίζεται:

$$\langle\partial_\mu(X)\rangle = 0 \quad (5.10.16)$$

Έτσι, μπορούμε να κάνουμε ολοκληρώσεις κατά παράγοντες χρησιμοποιώντας ότι:

$$\langle A(\partial_\mu B)\rangle = -\langle(\partial_\mu A)B\rangle \quad (5.10.17)$$

αφού ο ένας όρος θα φεύγει λόγω της πρώτης ιδιότητας. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω και το γεγονός ότι ολοκλήρωση κατά παράγοντες στους τρεις τελευταίους όρους θα παράξει αποκλίσεις που θα μηδενίζονται, παίρνουμε:

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)TT}\rangle = -\frac{1}{4}\langle(\partial_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}^{TT})(\partial_\nu h_{\rho\sigma}^{TT}) + 2\eta^{\rho\lambda}(\square h_{\rho\nu}^{TT})h_{\lambda\mu}^{TT}\rangle \quad (5.10.18)$$

και επειδή ισχύει ότι:

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (5.10.19)$$

παίρνουμε τελικά ότι:

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)TT} \rangle = -\frac{1}{4} \langle (\partial_\mu h_{\rho\sigma}^{TT})(\partial_\nu h_{TT}^{\rho\sigma}) \rangle \quad (5.10.20)$$

και παίρνοντας το ίχνος της παραπάνω σχέσης και κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες απλοποιείται στη μορφή:

$$\langle \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)TT} \rangle = 0 \quad (5.10.21)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις στον τύπο του ταυυστή ορμής-ενέργειας καταλήγουμε στην τελική μορφή που παίρνει στη βαθμίδα TT:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \langle (\partial_\mu h_{\rho\sigma}^{TT})(\partial_\nu h_{TT}^{\rho\sigma}) \rangle \quad (5.10.22)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ημιτονοειδές επίπεδο κύμα της μορφής:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} \sin(k_\lambda x^\lambda) \quad (5.10.23)$$

Ο ταυυστής ενέργειας-ορμής του κύματος θα είναι:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} k_\mu k_\nu C_{\rho\sigma} C^{\rho\sigma} \langle \cos^2(k_\lambda x^\lambda) \rangle \quad (5.10.24)$$

όπου προσεγγιστικά:

$$\langle \cos^2(k_\lambda x^\lambda) \rangle = \frac{1}{2} \quad (5.10.25)$$

Υποθέτουμε και πάλι ότι το κύμα διαδίδεται κατά τον άξονα z οπότε η συναλλοιώτη μορφή του κυματανύσματος θα είναι:

$$k_\lambda = (-\omega, 0, 0, \omega) \quad (5.10.26)$$

Επίσης, για τα πλάτη πόλωσης ισχύει ότι:

$$C_{\rho\sigma} C^{\rho\sigma} = 2(h_+^2 + h_x^2) \quad (5.10.27)$$

και αφού $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ο ταυυστής ενέργειας-ορμής του υπό θεώρηση κύματος θα είναι:

$$t_{\mu\nu} = \frac{\pi}{8G} f^2 (h_+^2 + h_x^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10.28)$$

5.11 Ρυθμός απώλειας ενέργειας

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε το ρυθμό απώλειας ενέργειας ενός βαρυτικού συστήματος που εκχπέμπει ακτινοβολία. Η συνολική ενέργεια της βαρυτικής ακτινοβολίας σε μια χωρική υπερεπιφάνεια για σταθερό χρόνο θα είναι:

$$E = \int_{\Sigma} t_{00} d^3x \quad (5.11.1)$$

με τη συνολική ενέργεια να είναι το ολοκλήρωμα της ισχύος. Για να πάρουμε αυτό το ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε το ότι η στοιχειώδης υπερεπιφάνεια, που θεωρούμε ότι είναι σφαίρα, είναι $r^2 d\Omega$ με Ω τη στερά γωνία. Επίσης αν θεωρήσουμε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων (t, r, θ, ϕ) τότε το κάθετο διάνυσμα στη σφαίρα θα έχει συνιστώσες

$$n^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (5.11.2)$$

αφού οι μερικές παράγωγοι αποτελούν βάση. Άρα η ισχύς θα είναι:

$$P = \int_{S_\infty^2} t_{0\mu} n^\mu r^2 d\Omega \quad (5.11.3)$$

και η συνολική ενέργεια που εκπέμπεται από την επιφάνεια:

$$\Delta E = \int P dt \quad (5.11.4)$$

Πριν προχωρήσουμε, παρατηρούμε ότι ο ταυιστής ενέργειας-ορμής είναι υπολογισμένος στη βαθμίδα TT ενώ η σχέση για την τετραπολική ροπή στη βαθμίδα Lorenz. Θέλουμε να μετατρέψουμε λοιπόν, την αντίστροφοι ίχνους μετρική στη βαθμίδα TT (μπορούμε να το κάνουμε αφού βρισκόμαστε μακριά από την πηγή). Για αυτό το λόγο εισάγουμε τον ταυιστή προβολής:

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (5.11.5)$$

που προβάλλει ταυιστές σε υπερεπιφάνειες με κάθετο διάνυσμα n^i . Εμείς θα διαλέξουμε το διάνυσμα αυτό ώστε να αντιστοιχεί στην κατεύθυνση z που ταξιδεύει το κύμα. Ακόμη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ταυιστή προβολής για να κατασκευάσουμε το μηδενικού ίχνους, εγκάρσιο ταυιστή, ενός χωροειδούς συμμετρικού ταυιστή X_{ij} ως:

$$X_{ij}^{TT} = (P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl}) X_{kl} \quad (5.11.6)$$

Χρησιμοποιώντας το για τη διαταραχή θα έχουμε:

$$h_{ij}^{TT} = h_{ij}^{\tilde{TT}} = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}^{TT}}{dt^2} (t - r) \quad (5.11.7)$$

Ακόμη, είναι χρήσιμο για τις πράξεις να θεωρήσουμε το μηδενικού ίχνους μέρος του τετραπολικού ταυιστή που θα είναι:

$$J_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} I_{kl} \quad (5.11.8)$$

Το εγκάρσιο, μηδενικού ίχνους μέρος του τετραπολικού ταυιστή θα είναι το ίδιο με αυτό του J_{ij} άρα αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \frac{d^2 J_{ij}^{TT}}{dt^2} (t - r) \quad (5.11.9)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $t_{0\mu} n^\mu = t_{0r}$ αφού ο τετραπολικός ταυιστής εξαρτάται αποκλειστικά από τον καθυστερημένο χρόνο:

$$\partial_0 h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \frac{d^3 J_{ij}^{TT}}{dt^3} \quad (5.11.10)$$

$$\partial_r h_{ij}^{TT} = -\frac{2G}{r} \frac{d^3 J_{ij}^{TT}}{dt^3} - \frac{2G}{r^2} \frac{d^2 J_{ij}^{TT}}{dt^2} \quad (5.11.11)$$

$$\approx -\frac{2G}{r} \frac{d^3 J_{ij}^{TT}}{dt^3} \quad (5.11.12)$$

Οπότε ο όρος που μας ενδιαφέρει είναι:

$$t_{0r} = -\frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \left(\frac{d^3 J_{ij}^{TT}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 J_{TT}^{ij}}{dt^3} \right) \right\rangle \quad (5.11.13)$$

Χρησιμοποιώντας μια ακόμη ιδιότητα του ταυυστή προβολής μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$X_{ij}^{TT} X_{TT}^{ij} = X_{ij} X^{ij} - 2X_i^j X^{ik} n_j n_k + \frac{1}{2} X^{ij} X^{kl} n_i n_j n_k n_l - \frac{1}{2} X^2 + X X^{ij} n_i n_j \quad (5.11.14)$$

με $\delta^{ij} X_{ij} = X$. Ο ταυυστής J είναι ήδη όμως μηδενικού ίχνους, οπότε:

$$J_{ij}^{TT} J_{TT}^{ij} = J_{ij} J^{ij} - 2J_i^j J_j^{ik} n_k + \frac{1}{2} J^{ij} J^{kl} n_i n_j n_k n_l \quad (5.11.15)$$

Η ισχύς τελικά θα γίνεται:

$$P = -\frac{G}{8\pi} \int_{S^2_\infty} \left\langle \frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3} - 2 \frac{d^3 J_i^j}{dt^3} \frac{d^3 J^{ik}}{dt^3} n_j n_k + \frac{1}{2} \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J^{kl}}{dt^3} n_i n_j n_k n_l \right\rangle d\Omega \quad (5.11.16)$$

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να κάνουμε μετασχηματισμό συντεταγμένων και να γυρίσουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπου θα ισχύει:

$$n^i = \frac{x^i}{r} \quad (5.11.17)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες:

$$\int d\Omega = 4\pi \quad (5.11.18)$$

$$\int n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (5.11.19)$$

$$\int n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.11.20)$$

Η τελική μορφή της ισχύος παίρνει τη μορφή:

$$P = -\frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (5.11.21)$$

Για το σύστημα διπλών αστέρων που θεωρήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο ο μειωμένος τετραπολικός ταυυστής J_{ij} θα είναι:

$$J_{ij} = \frac{MR^2}{3} \begin{pmatrix} (1 + 3\cos 2\Omega t) & 3\sin 2\Omega t & 0 \\ 3\sin 2\Omega t & (1 - 3\cos 2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.11.22)$$

και η τρίτη του παράγωγος:

$$\frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} = 8MR^2 \Omega^3 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11.23)$$

Έτσι, η ισχύς που ακτινοβολείται από ένα σύστημα διπλών αστέρων είναι:

$$P = -\frac{128}{5}GM^2R^4\Omega^6 \quad (5.11.24)$$

ή χρησιμοποιώντας ότι

$$\Omega = \left(\frac{GM}{4R^3}\right)^{1/2} \quad (5.11.25)$$

η ισχύς παίρνει τη μορφή:

$$P = \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{R^5} \quad (5.11.26)$$

5.12 Βαρυτόνια

Γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική ότι η κβάντωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μας οδηγεί στα φωτόνια, δηλαδή μηδενικής μάζας σωματίδια που ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός και λειτουργούν ως διαδότες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Έτσι, σε θεωρητικό επίπεδο ακόμα μπορούμε να περιμένουμε να συμβαίνει κάτι αντίστοιχο και με τη βαρύτητα. Τα σωματίδια αυτά ονομάζονται βαρυτόνια και δεν έχουν ανιχνευθεί ακόμη. Αφού όπως είδαμε τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός, τα βαρυτόνια θα πρέπει να έχουν μηδενική μάζα. Ακόμη, μπορούμε μέσω των καταστάσεων πόλωσης των βαρυτικών κυμάτων να υπολογίσουμε το σπιν των βαρυτονίων. Πιο συγκεκριμένα, το σπιν ενός κβαντισμένου πεδίου έχει άμεση σχέση με την αναλλοιώτητά τους κάτω από στροφές στο χώρο. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει δύο ανεξάρτητες καταστάσεις πόλωσης και κάθε μια από αυτές είναι αναλλοίωτη κάτω από στροφές 360 μοιρών το οποίο οδηγεί σε σωματίδιο-διαδότη με σπιν 1, το φωτόνιο. Γενικότερα αν μια κατάσταση πόλωσης είναι αναλλοίωτη κάτω από στροφή γωνίας θ τότε για το σπιν θα έχουμε:

$$S = 360^\circ / \theta \quad (5.12.1)$$

Οι καταστάσεις πόλωσης των βαρυτικών κυμάτων μένουν αναλλοίωτες κάτω από στροφές 180° στο επίπεδο xy και έτσι τα βαρυτόνια θα έχουν σπιν 2. Αυτό προέρχεται και από το γεγονός ότι η πηγή των βαρυτικών κυμάτων είναι ένας τανυστής 2ης τάξης, ενώ για παράδειγμα για το φωτόνιο είναι το τετρα-ρεύμα, τανυστής 1ης τάξης. Τα βαρυτόνια είναι πολύ δύσκολο να ανιχνευθούν και παίζουν σημαντικό ρόλο σε άλλες θεωρίες, όπως π.χ. στη θεωρία των χορδών.

Κεφάλαιο 6

Ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων

6.1 Πηγές βαρυτικών κυμάτων

Οποιοδήποτε σώμα με μη κυλινδρική ή σφαιρική συμμετρία που επιταχύνεται, παράγει βαρυτικά κύματα. Θέλουμε την επιτάχυνση για να μη μηδενίζεται η παράγωγος του τετραπολικού τανυστή και την ασυμμετρία, επειδή για παράδειγμα ο τετραπολικός τανυστής ενός σφαιρικά συμμετρικού σώματος μηδενίζεται. Έτσι, ένα σφαιρικά συμμετρικό άστρο που περιστρέφεται δε θα παράξει βαρυτικά κύματα, ενώ αν έχει βαθουλώματα θα παράξει. Τις πηγές των βαρυτικών κυμάτων δεν μπορούμε να τις βρούμε στη γη, οποιαδήποτε κατασκευή και αν φτιάξουμε αφού το πλάτος τους θα είναι αμελητέο. Έτσι, πρέπει να πάμε στο ευρύτερο σύμπαν να αναζητήσουμε πηγές, όπου υπάρχουν πολύ μαζικά σώματα όπως αστέρες νετρονίων, πάλσαρς και μαύρες τρύπες.

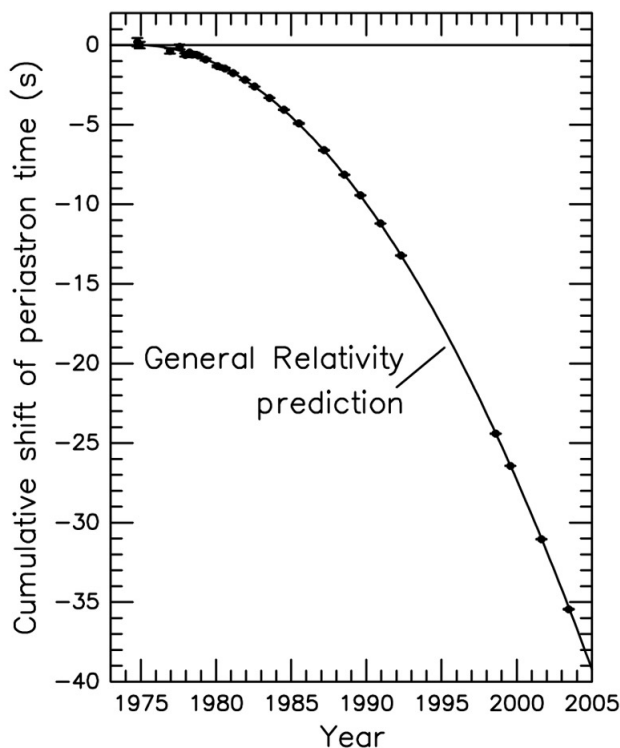
Οι αστέρες νετρονίων είναι πολύ μαζικά και πυκνά σώματα που αποτελούνται κυρίως από νετρόνια και προέρχονται από το θάνατο αστέρων. Τα πάλσαρς είναι περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων που παράγουν μαγνητικά πεδία, με αποτέλεσμα τα ηλεκτρόνια να παράγουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία προς μια κατεύθυνση και να τη λαμβάνουμε στη γη ως διακοπτόμενους παλμούς. Η περίοδος περιστροφής τους διακυμαίνεται μεταξύ 1msec και 1sec. Τα πάλσαρς, επειδή γενικά περιστρέφονται σε πολύ σταθερή βάση, αποτελούν ακριβή ρολόγια. Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες καταστάσεων που θα μπορούσαν να στείλουν βαρυτικά κύματα στη γη. Για παράδειγμα, ένας περιστρεφόμενος αστέρας νετρονίων με σταθερή περίοδο περιστροφής εάν δεν είναι απολύτως συμμετρικός θα παράξει βαρυτικά κύματα τα οποία θα έχουν συνεχώς την ίδια συχνότητα και πλάτος και ονομάζονται συνεχή βαρυτικά κύματα. Μια άλλη κατηγορία βαρυτικών κυμάτων είναι τα λεγόμενα στοχαστικά βαρυτικά κύματα. Αυτά θα προέρχονται από το γεγονός ότι βαρυτικά κύματα από οποιαδήποτε πηγή και οποιαδήποτε συχνότητας διαπερνούν συνέχεια τη γη και σε κάποιες περιπτώσεις έχουν υπέρθεση, οπότε μπορεί να λάβουμε ένα σήμα στον ανιχνευτή. Πριν φτάσουμε στην κύρια κατηγορία βαρυτικών κυμάτων τα οποία είναι τα πιο εύκολα ανιχνεύσιμα υπάρχουν και τα βαρυτικά κύματα που δε γνωρίζουμε από πού μπορεί να προέλθουν, τα οποία βέβαια είναι πολύ δύσκολο να ανιχνευθούν γιατί στην ουσία δεν ξέρουμε τι ψάχνουμε.

Η τελευταία και πιο σημαντική κατηγορία βαρυτικών κυμάτων είναι τα κύματα που προέρχονται από δυαδικά συστήματα αστρικών σωμάτων. Τα δυαδικά αυτά συστήματα θα αποτελούνται συνήθως από περιστρεφόμενες μαύρες τρύπες ή περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Αυτά τα σώματα λόγω της βαρύτητας περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο για τεράστια χρονικά διαστήματα παράγοντας βαρυτικά κύματα. Όσο περνάει ο χρόνος τα κύματα παίρνουν ενέργεια από το σύστημα. Αυτή η ενέργεια είναι που τα κρατούσε σε τροχιά μεταξύ τους. Έτσι με την πάροδο του χρόνου έρχονται όλο και πιο κοντά, γεγονός που τα κάνει να περιστρέφονται πολύ πιο γρήγορα εκμπέποντας πιο ισχυρά

βαρυτικά κύματα, χάνοντας και άλλη ενέργεια και αυτή η διαδικασία συνεχίζεται. Συνεχίζεται όμως μέχρι το σημείο όπου θα συγκρουστούν, προκαλώντας ένα από τα πιο κατακλυσμικά γεγονότα στο σύμπαν. Επίσης η συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων θα αυξάνεται όσο πλησιάζουν τα σώματα. Η πρώτη καταγραφή ένδειξης βαρυτικών κυμάτων έγινε το 1974 από τους Hulse και Taylor με την πειραματική επιβεβαίωση της σχέσης:

$$P = \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{R^5} \quad (6.1.1)$$

που εξαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το σύστημα που ανακάλυψαν ονομάζεται *PSRB1913+16* αποτελούνταν από ένα δυαδικό σύστημα ενός πάλσαρ και ενός αστέρα νετρονίων σε τροχιά γύρω από ένα κοινό κέντρο μάζας. Όπως είπαμε, η εκπομπή βαρυτικών κυμάτων κάνει το σύστημα να χάνει ενέργεια και να έρχεται όλο και πιο κοντά. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει αυτή τη μείωση της απόστασης πειραματικά και σύμφωνα με τις προβλέψεις της γενικής θεωρίας σχετικότητας. Το διάγραμμα δείχνει πως η περίοδος της τροχιάς του δυαδικού συστήματος μειώνεται με τα χρόνια: Οι



Σχήμα 6.1: Μείωση της περιόδου της τροχιάς του δυαδικού συστήματος των Hulse και Taylor, λόγω βαρυτικής ακτινοβολίας. Η εικόνα βρίσκεται στην [3]

Hulse και Taylor κέρδισαν το βραβείο Nobel το 1993 για τις προσπάθειές τους. Πρόσφατα, στις 14 Σεπτεμβρίου του 2015 έγινε η πρώτη ευθεία ανακάλυψη βαρυτικών κυμάτων μέσω του πειράματος LIGO όπως θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια.

6.2 Εκτίμηση πλάτους

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή πειραματικών διατάξεων, ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά την τάξη μεγέθους του πλάτους ενός βαρυτικού κύματος που θα προέρχεται από

δυναμικό αστρικό σύστημα. Θα χρησιμοποιήσουμε Νευτώνεια ανάλυση για ένα σύστημα που απαιτεί διορθώσεις από τη γενική σχετικότητα, αλλά για μια εκτίμηση θα το θεωρήσουμε αρκετό. Η γωνιακή ταχύτητα για ένα τέτοιο σύστημα θα είναι:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{2GM}}{2R^{3/2}} \quad (6.2.1)$$

Η συχνότητα της κίνησης θα είναι:

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{GM}}{4\pi} \sim \frac{\sqrt{GM}}{10R^{3/2}} \quad (6.2.2)$$

Για την περίπτωση του περιστρεφόμενου πάλσαρ με τον αστέρα νετρονίων η διαταραχή του βαρυτικού κυματος ήταν:

$$\tilde{h}_{ij}(t, x) = \frac{8GM}{c^4 r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

όπου επαναφέραμε τις σωστές μονάδες. Παρατηρούμε ότι:

$$h \sim \frac{4G^2 M^2}{c^2 r R} \sim \frac{R_S^2}{r R} \quad (6.2.4)$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα σώματα είναι μαύρες τρύπες μάζας 10 φορές η μάζα του ήλιου, που περίπου ισούται με $(1.98855) \times 10^{30} kg$ και αν θεωρήσουμε τις παρακάτω αποστάσεις:

$$R_S \sim 10^6 cm \quad (6.2.5)$$

$$R \sim 10^7 cm \quad (6.2.6)$$

$$r \sim 10^{26} cm \quad (6.2.7)$$

Τότε μια τέτοια πηγή χαρακτηρίζεται από τιμές της τάξης:

$$f \sim 10^2 s^{-1} \quad (6.2.8)$$

$$h \sim 10^{-21} \quad (6.2.9)$$

Παρατηρούμε ότι για να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε τέτοιες πηγές θα πρέπει να έχουμε ευαισθησία της τάξης των $100 Hz$ και εντάσεις της τάξης των 10^{-21} τουλάχιστον. Πιο συγκεκριμένα, η επίδραση των βαρυτικών κυμάτων σε δοκιμαστικές μάζες που απέχουν κατά απόσταση L προσεγγιστικά είναι της τάξης:

$$\frac{\Delta L}{L} \sim h \quad (6.2.10)$$

Άρα η ευαισθησία που χρειαζόμαστε για να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε μια τέτοια αλλαγή θα είναι για κύματα πλάτους τέτοιας τάξης πρέπει να είναι εξαιρετικά ακριβής.

6.3 Συμβολομετρία

Μια πολύ καλή ανιχνευτική διάταξη για την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων είναι το συμβολόμετρο. Ένα συμβολόμετρο κατασκευασμένο για βαρυτικά κύματα θα αποτελείται από δύο βραχίονες και από τρία κάτοπτρα που αναπαριστούν τις δοκιμαστικές μάζες σε ελεύθερη πτώση. Η μια από αυτές είναι ο

διαχωριστής δέσμης. Στέλνουμε έτσι μια δέσμη λείζερ και ο διαχωριστής δέσμης διαχωρίζει τις δέσμες οι οποίες κατευθύνονται στους βραχίονες. Εκεί συναντούν ολικά ανακλαστικά κάτοπτρα και στη συνέχεια κατευθύνονται προς μια φωτοδίοδο όπου δίνουν το σήμα. Έστω ότι οι βραχίονες βρίσκονται κατά τους άξονες x και y . Τότε σύμφωνα με το φαινόμενο της συμβολής κυμάτων, όταν οι δέσμες επανασυνδεθούν θα συμβάλουν ενισχυτικά ή καταστρεπτικά, δηλαδή θα αυξηθεί ή θα μειωθεί το πλάτος της υπέρθεσης. Πιο συγκεκριμένα, εάν $L(x)$ και $L(y)$ είναι τα μήκη των βραχιόνων τότε θα έχουμε ενισχυτική συμβολή εάν η διαφορά των μηκών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος και αποσβεστική συμβολή, αν διαφέρουν κατά περιττό μήκος κύματος:

$$\Delta L = L(x) - L(y) = n\lambda n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ενισχυτική συμβολή} \quad (6.3.1)$$

$$\Delta L = L(x) - L(y) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda n = 1, 1, 2, \dots \quad \text{αποσβεστική συμβολή} \quad (6.3.2)$$

Εάν περάσει ένα βαρυτικό κύμα το ΔL θα μεταβάλλεται περιοδικά, ανάλογα με τη συμβολή των κυμάτων. Αυτό θα συμβαίνει επειδή οι δύο βραχίονες θα διαστέλλονται και θα συστέλλονται σε διαφορετικές φάσεις, ανάλογα με τις καταστάσεις πόλωσης του βαρυτικού κύματος. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα κύμα της μορφής:

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(t - z) = \text{asin}[\omega(t - z)] \quad (6.3.3)$$

με καθορισμένη συχνότητα ω και διαδίδεται κατά τον άξονα z τότε αφού οι βραχίονες είναι στους άξονες x και y όταν ο ένας βραχίονας θα διαστέλλεται ο άλλος θα συστέλλεται και κατά ένα τέταρτο της περιόδου θα συμβαίνει το αντίστροφο κλπ. Αυτό γίνεται σαφές αν κάνουμε το μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$X = \left(1 + \frac{1}{2} \text{asin}\omega t\right)x \quad (6.3.4)$$

$$Y = \left(1 - \frac{1}{2} \text{asin}\omega t\right)y \quad (6.3.5)$$

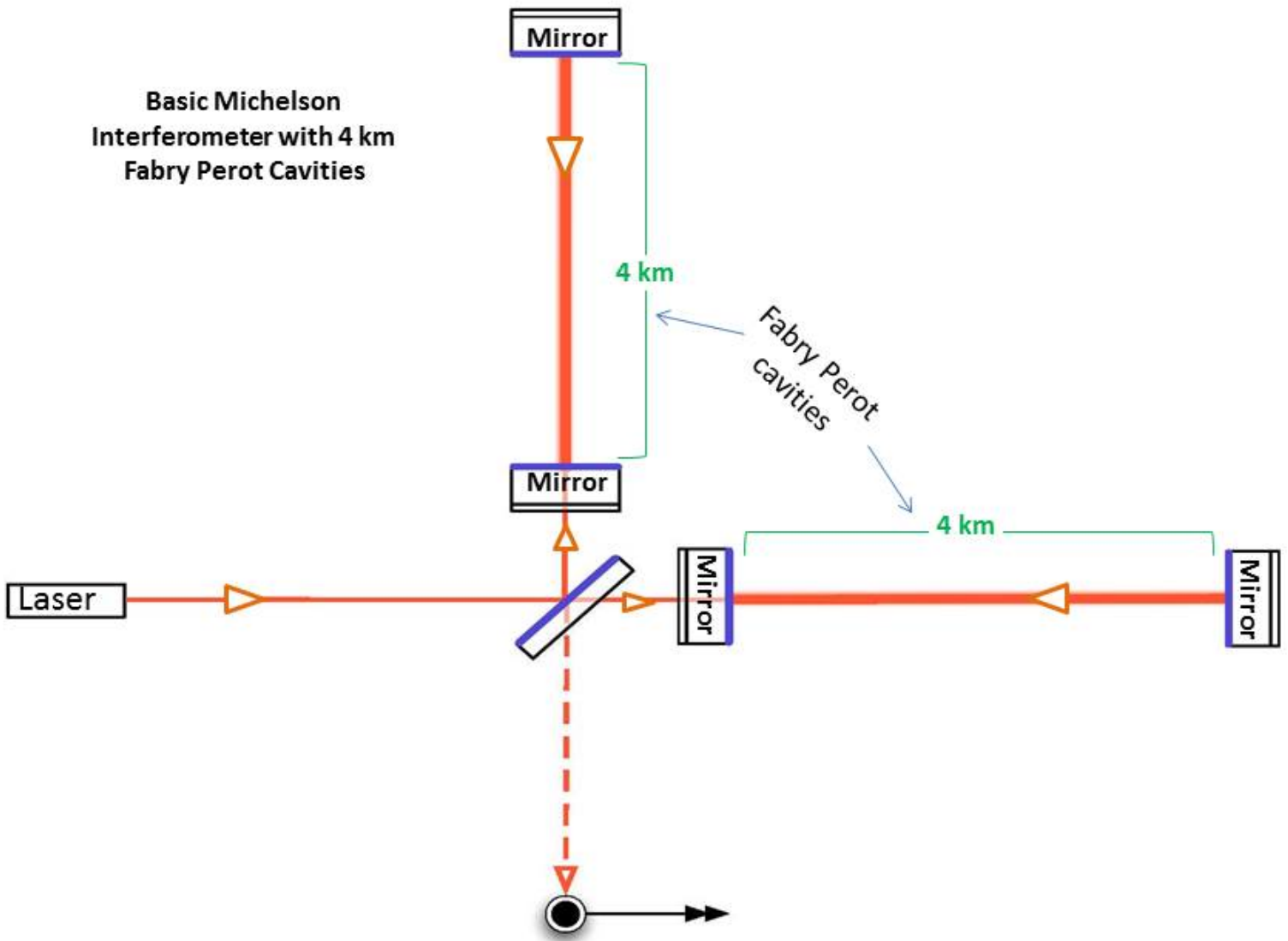
Μια σημαντική βελτίωση στην ένταση της δέσμης σε ένα συμβολόμετρο μπορεί να γίνει προσθέτοντας άλλους δύο ανακλαστικούς καθρέφτες έτσι ώστε η δέσμη να ανακλάται στα κάτοπτρα μπρος πίσω ως και 100 φορές πριν φτάσει στη φωτοδίοδο. Οι κοιλότητες μέσα στις οποίες συμβαίνει αυτό ονομάζονται κοιλότητες Fabry-Perot. Η αλλαγή φάσης που θα προέλθει από την επίδραση βαρυτικού κύματος στους βραχίονες για 100 χτυπήματα σε κάθε κοιλότητα (200 συνολικά) είναι:

$$\delta\phi \sim 200 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \delta L \sim 10^{-9} \quad (6.3.6)$$

Τέλος, παραθέτουμε μια σχηματική απεικόνιση της παραπάνω πειραματικής διάταξης:

6.4 Εναλλακτικές μέθοδοι

Εκτός από τη συμβολομετρία υπάρχουν και άλλες μέθοδοι ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων. Μια σημαντική κατηγορία αυτών είναι οι βαρυτικοί ανιχνευτές συντονισμού. Η ιδέα ξεκίνησε από το Joseph



Σχήμα 6.2: Συμβολόμετρο Michelson-Morley με κοιλότητες Fabry-Perot. Το σχήμα βρίσκεται στην [6]

Weber το 1960. Σε αντίθεση με τα συμβολόμετρα όπου τα βαρυτικά κύματα αλληλεπιδρούν με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, στους βαρυτικούς ανιχνευτές συντονισμού τα βαρυτικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια σε ένα μαζικό αντικείμενο και το προκαλούν να ταλαντωθεί. Ένας τυπικός τέτοιος ανιχνευτής αποτελείται από μια μάζα αλουμινίου κυλινδρικού σχήματος μήκους της τάξης των $3m$, μάζας της τάξης των $1000kg$ και ανιχνευτική ικανότητα μικρού εύρους για συχνότητες από $500Hz$ έως και $1.5kHz$. Για ένα βαρυτικό κύμα πλάτους $h \sim 10^{-21}$ και μήκους l η επίδραση θα είναι της τάξης:

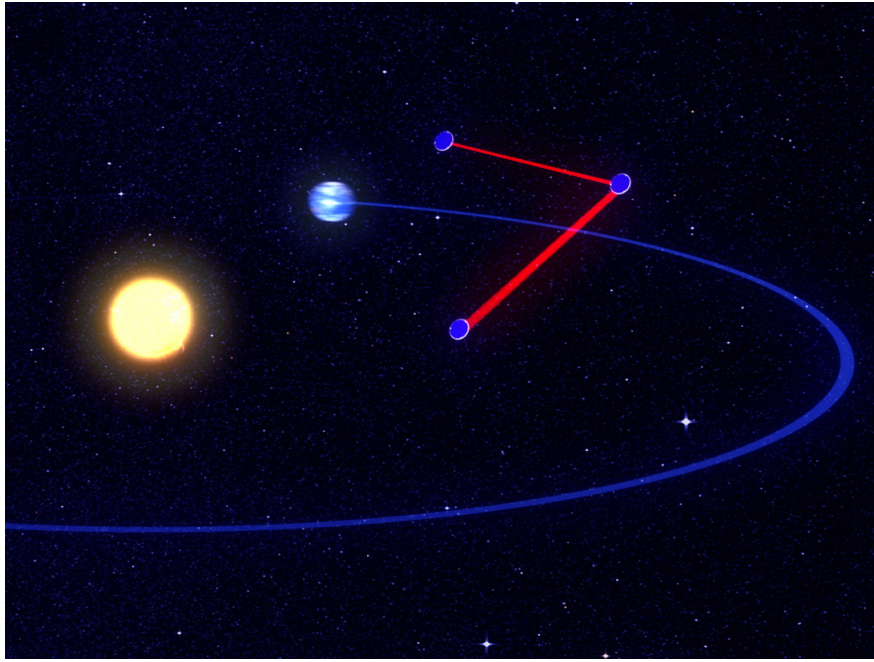
$$\delta l_{gw} \sim hl \sim 10^{-21} \quad (6.4.1)$$

Για να πετύχουμε τέτοιες ακρίβειες θα πρέπει να ξεπεραστούν διαφόρων ειδών θόρυβοι και έτσι οι μάζες αυτές πρέπει να φτάσουν σε υπερβολικά χαμηλές θερμοκρασίες, της τάξης των μερικών mK που επιτυγχάνεται με κρυογενικές μεθόδους χρησιμοποιώντας ήλιο. Ένα τέτοιο πείραμα είναι ο ανιχνευτής Auriga και βρίσκεται στην Ιταλία. Μια άλλη μέθοδος ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων είναι να χρησιμοποιήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που μας κάνουν να επικοινωνούμε με διαστημόπλοια που έχουμε στείλει στο διάστημα. Τα βαρυτικά κύματα θα προκαλέσουν μια αλλαγή στο προβλεπόμενο χρόνο απόκρισης. Τέτοια πειράματα διεξάγει η NASA. Όπως είπαμε και πριν, τα πάλλσας αποτελούν εξαιρετικά ακριβή κοσμολογικά ρολόγια σε βάθος ετών με ανωμαλίες που ούτε ατομικά ρολόγια δεν είναι σε θέση να ανιχνεύσουν. Εάν θεωρήσουμε ότι οι παλμοί που έρχονται στη γη έχουν ρυθμό λήψης εξαιρετικά ακριβή, τότε μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να ανιχνεύσουμε χρονικές ανωμαλίες.

Τέλος, συζητώντας για μεθόδους ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων στο διάστημα επανέρχαστε στη συμβολομετρία. Αυτό συμβαίνει γιατί το διάστημα μας προσφέρει δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα, υψηλό κενό και μεγάλου μήκους βραχίονες, που όπως είδαμε αυξάνουν την ακρίβεια ανίχνευσης. Έτσι, το πρόγραμμα *eLISA* φιλοδοξεί να χτίσει ένα συμβολόμετρο στο διάστημα. Εκτός από τα πλεονεκτήματα που αναφέραμε, ένα τέτοιο συμβολόμετρο θα αποφεύγει πολλούς θορύβους που είναι αναπόφευκτοι στη γη, καθώς και το ίδιο το βαρυτικό πεδίο της γης. Το πείραμα αυτό του οποίου η κατασκευή αναμένεται να ολοκληρωθεί το 2034 θα αυξήσει το εύρος συχνοτήτων. Το *eLISA* θα αποτελείται από τρία διαστημόπλοια ένα κύριο και δύο δευτερεύοντα, που θα περιέχουν δοκιμαστικές μάζες, και θα είναι διατεταγμένα στα άκρα ενός τριγώνου. Στέλνοντας παλμούς λέιζερ το κύριο διαστημόπλοιο στα δευτερεύοντα, στην ουσία θα έχουμε ένα συμβολόμετρο με μήκη της τάξης του ενός εκαταμμυρίου χιλιομέτρων, κάτι που θα αυξάνει δραστικά την ακρίβεια. Οι αποστάσεις αυτές όμως είναι πολύ μεγάλες για να χρησιμοποιηθούν καθρέφτες για την ανάκλαση των ακτίνων γιατί τότε η ανακλώμενη ακτίνα θα ήταν πολύ ασθενούς πλάτους. Αντ' αυτού το *eLISA* θα χρησιμοποιεί οπτικούς αναμεταδότες, δηλαδή θα στέλνει το ένα διαστημόπλοιο μια ακτίνα λέιζερ στο άλλο και τότε το τελευταίο θα στέλνει πίσω μια ακτίνα αλλά από το δικό του λέιζερ, το οποίο θα έχει ρυθμιστεί να είναι σε φάση με το πρώτο. Τέλος, τα διαστημόπλοια θα πρέπει να έχουν τέτοια τεχνολογία, ώστε να ρυθμίζουν αυτόματα τη θέση τους από τις διάφορες παρεμβολές που θα προκαλούνται κυρίως από τον ήλιο. Μια αναπαράσταση αυτών έχουμε στο παρακάτω σχήμα:

6.5 Το πείραμα LIGO

Σε αυτό το τελευταίο μέρος της διπλωματικής θα ασχοληθούμε με ένα συγκεκριμένο πείραμα, το πείραμα LIGO αφού είναι και το πρώτο που πραγματικά ανίχνευσε τα βαρυτικά κύματα. Το LIGO αποτελείται από ένα συμβολόμετρο με βραχίονες μήκους $4km$ ο καθένας και βρίσκεται στη Λουιζιάννα (υπάρχει και άλλο ένα πανομοιότυπο στην Ουάσιγκτον και ονομάζονται LIGO Livingston και LIGO Hanford αντίστοιχα). Θα δούμε τώρα τα βασικά χαρακτηριστικά του.



Σχήμα 6.3: Τριγωνική διάταξη των δορυφόρων για το πρόγραμμα eLISA. Η εικόνα βρίσκεται στην [9]

6.5.1 Τεχνολογία

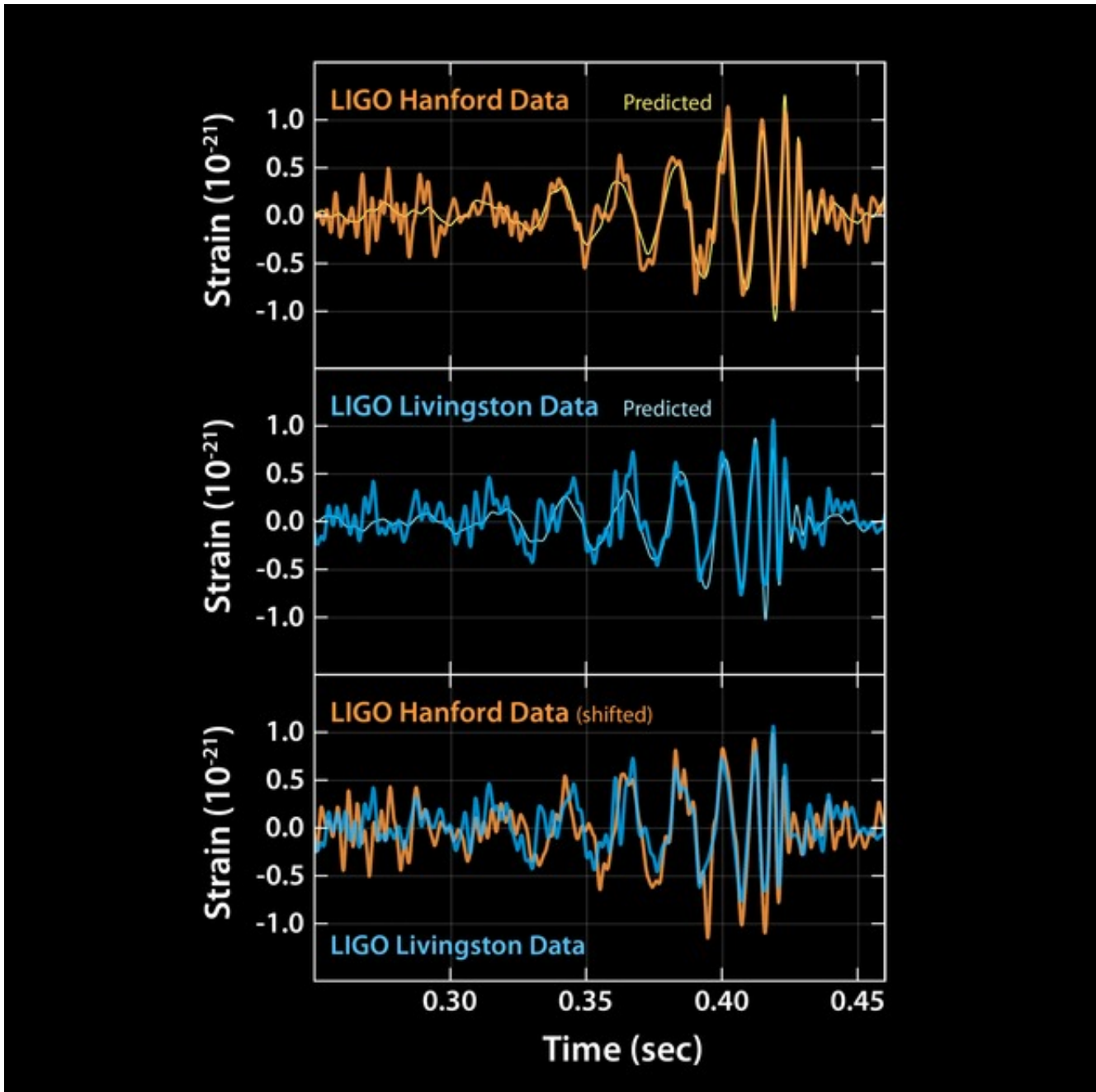
Για να μπορέσει να ανιχνευθεί μια απόσταση της τάξης των $10^{-20}m$ χρειάζεται υψηλού επιπέδου απομόνωση από διαφόρων ειδών θορύβους που μπορεί να διαταράξουν τις δοκιμαστικές μάζες. Οι δοκιμαστικές μάζες του LIGO είναι κάτοπτρα μάζας $40kg$ η κάθε μία, πάχους $20cm$ και διαμέτρου $34cm$. Το πιο σημαντικό είδος θορύβου είναι οι σεισμικές δονήσεις. Οι δονήσεις αυτές δεν περιλαμβάνουν μόνο σεισμούς αλλά και άλλους παράγοντες όπως πχ αυτοκίνητα που περνούν σε κοντινούς δρόμους και ο,τιδήποτε άλλο, λόγω της υπερευαισθησίας της πειραματικής διάταξης. Γι αυτό το λόγο, το πρώτο σκέλος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η λεγόμενη ενεργητική απόσβεση. Αισθητήρες που είναι ρυθμισμένοι για τις κατάλληλες συχνότητες και όταν αισθανθούν κάποιου είδους κίνηση ενεργούν δημιουργώντας κίνηση αντίθετης κατεύθυνσης. Το δεύτερο στάδιο απομόνωσης είναι η παθητική απόσβεση. Αυτή συντελείται με το να κρεμάσουμε τις δοκιμαστικές μάζες-κάτοπτρα από ένα τετραπλό εκκρεμές. Τα εκκρεμή έχουν την ιδιότητα ότι για υψηλές συχνότητες παράγουν ελάχιστη κίνηση στη δοκιμαστική μάζα, όσο πιο μεγάλο το εκκρεμές τόσο καλύτερη η ακρίβεια. Έτσι, σε συνδυασμό με την ενεργητική απόσβεση έχουν ικανοποιητική απομόνωση των δοκιμαστικών μαζών από σεισμικές δονήσεις. Επιπρόσθετα, ένα άλλο είδος θορύβου μπορεί να προκληθεί από τα μόρια του αέρα μέσα στους βραχίονες. Αν αυτά τα μόρια συγκρουστούν με τις δοκιμαστικές μάζες, τότε λόγω της ορμής τους θα τους δώσουν ενέργεια και κατά συνέπεια μπορεί να προκαλέσουν παρανοήσεις ότι μετατοπίσεις των μαζών συμβαίνουν λόγω βαρυτικών κυμάτων. Γι αυτό το λόγο χρειαζόμαστε υψηλό κενό μέσα στους βραχίονες με πίεση της τάξης του ενός τρισεκατομμυριοστού της ατμόσφαιρας. Το υψηλό κενό παρέχει και το πλεονέκτημα ότι απωθεί τη σκόνη. Εάν είχαμε σκόνη στους βραχίονες τότε η δέσμη του λέιζερ θα μπορούσε να διασπαρεί και να χάσει τη συγκεντρωτικότητά της, πράγμα που θα δυσκόλευε το σήμα να φτάσει ευκρινές στη φωτοδίοδο. Το οπτικό σύστημα του LIGO αποτελείται όπως έγινε σαφές από καθρέφτες, δέσμες λέιζερ και τη φωτοδίοδο στην οποία ανιχνεύεται το τελικό σήμα. Η τελική δέσμη λέιζερ έχει ισχύ $200Watt$ αλλά για να φτάσει εκεί έχει περάσει από διάφορα στάδια ενίσχυσης, με την αρχική δέσμη να ξεκινά με ισχύ $4Watt$. Τέλος, το LIGO χρησιμοποιεί

κοιλότητες Fabry-Perot έτσι ώστε τα φωτόνια να ταξιδεύουν τελικά 1120km αντί των 4km που είναι το μήκος του κάθε βραχίονα.

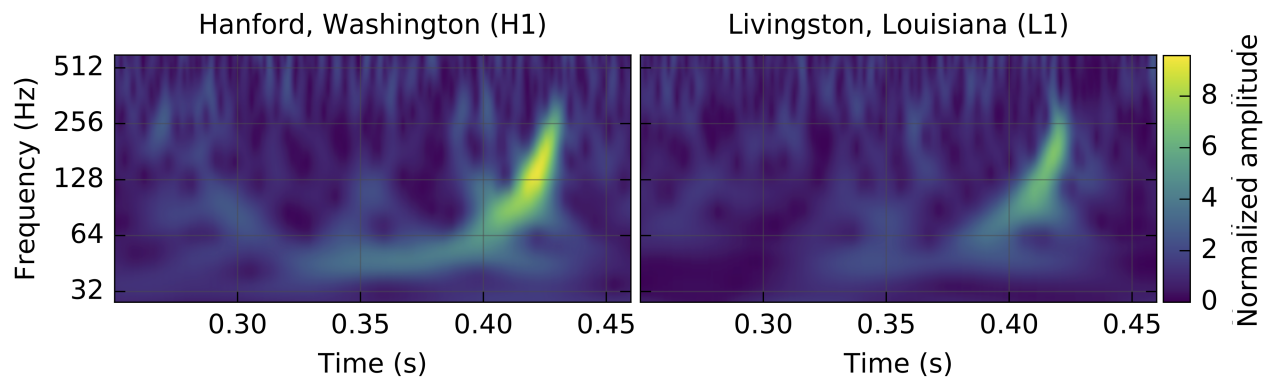
6.5.2 Ανίχνευση

Στις 14 Σεπτεμβρίου 2015(9:51UTC) ανακαλυφθηκαν για πρώτη φορά ευθέως βαρυτικά κύματα από τα δύο ταυτόσημα συμβολόμετρα του παρατηρητηρίου LIGO . Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις τα κύματα αυτά παρήχθησαν από τη σύγκρουση περιστρεφόμενων μαύρων τρυπών μάζας η μία 29 φορές η μάζα του ήλιου και η άλλη 36 μάζες ήλιου και συνέβη 1.3 δισεκατομμύρια χρόνια πριν! Ένα μέρος αυτής της συνολικής μάζας-ενέργειας, περίπου 3 μάζες ήλιου, μετατράπηκε σε βαρυτικά κύματα σε κλάσματα του δευτερολέπτου. Το πείραμα στο Hanford παρατήρησε τα κύματα 7milliseconds μετά από το αντίστοιχο στο Livingsston και λόγω των αντίστοιχων γεωγραφικών τοποθεσιών συμπεραίνουμε ότι τα κύματα προήλθαν από το νότιο ημισφαίριο. Ακόμη, στις 26 Δεκεμβρίου του ίδιου έτους το LIGO ανίχνευσε και δεύτερο γεγονός, πάλι από περιστρεφόμενες μελανές οπές, με μάζες 14 και 8 μάζες ήλιου αντίστοιχα, το οποίο γεγονός συνέβη 1.4 δισεκατομμύρια έτη φωτός μακριά. Παρακάτω παραθέτουμε τα τελικά αποτελέσματα των αρχικών παρατηρήσεων:

Όπου το strain αντιπροσωπεύει την τάση των βαρυτικών κυμάτων που είναι όπως περιμέναμε της τάξης των 10^{-21} . Οι πρώτες δύο γραφικές παραστάσεις δείχνουν τα πειραματικά δεδομένα σε συνάρτηση με τις προβλέψεις της γενικής σχετικότητας. Παρατηρούμε ότι συγκλίνουν, αν λάβουμε υπόψη και τους όποιους θορύβους του πειράματος. Η τελευταία γραφική παράσταση συγκρίνει τα πειραματικά δεδομένα των δύο πειραμάτων. Η γραφική παράσταση του Hanford έχει αλλάξει λίγο από την αρχική για λόγους σύγκρισης. Ο λόγος που δεν είχε ίδια μορφή αρχικά είναι λόγω του προσανατολισμού των βραχιόνων του πειράματος ,καθώς και της χρονικής καθυστέρησης των 7ms σε σχέση με το Livingsston . Παρατηρούμε και πάλι ότι υπάρχει σχεδόν ταύτιση. Τέλος, παραθέτουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα των δύο πειραμάτων αλλά αυτή τη φορά στο χώρο των συχνοτήτων όπου βλέπουμε ξεκάθαρα το σήμα από τα βαρυτικά κύματα:



Σχήμα 6.4: Ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων από το παρατηρητήριο LIGO. Το διάγραμμα απεικονίζει την τάση h των κυμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο. Η εικόνα βρίσκεται στην [6]



Σχήμα 6.5: Ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων από το παρατηρητήριο LIGO. Το διάγραμμα απεικονίζει τη συχνότητα f των κυμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο. Η εικόνα βρίσκεται στην [6]

Συμπεράσματα

Με την παρούσα διπλωματική εργασία, θέλησα να αναδείξω τη συναρπαστική φύση των βαρυτικών κυμάτων, τα οποία αποτελούν έναν πολλά υποσχόμενο κλάδο της σύγχρονης φυσικής. Κατόπιν ανάλυσης των βασικών χαρακτηριστικών τους, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πρόσφατη ανακάλυψή τους δεν αποτελεί το τέλος της προσπάθειας ανίχνευσής τους αλλά την αρχή μιας νέας εποχής εξερεύνησης του διαστήματος. Μέχρι τώρα, οι μόνες πηγές άντλησης πληροφοριών για αστρικά φαινόμενα ήταν το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Με την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων ανοίγονται νέοι ορίζοντες για την παρατηρησιακή κοσμολογία και ίσως οδηγηθούμε στη χαρτογράφηση νέων αστρικών σωμάτων. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η προσπάθεια βελτίωσης ανιχνευτικών διατάξεων με σκοπό την αύξηση της ευαισθησίας απόκρισης στα πολύ μικρά πλάτη βαρυτικών κυμάτων, θα οδηγήσει σε καινοτόμες τεχνολογίες οι οποίες θα μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους.

Παράρτημα: Βαθμίδα Lorenz

Σε αυτό το παράρτημα θα αναλύσουμε περαιτέρω τη σημασία της βαθμίδας Lorenz. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό ' για τις μερικές παραγώγους, ο τανυστής Einstein για τη γραμμικοποιημένη βαρύτητα θα γράφεται:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{,\beta})] \quad (6.5.1)$$

Η σχέση αυτή απλοποιείται σημαντικά εάν εισάγουμε την αντίστροφο ιχνους διαταραχή:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (6.5.2)$$

οπότε η εξίσωση για τον τανυστή θα γίνεται:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha}] \quad (6.5.3)$$

και λόγω των εξισώσεων Einstein ($G = 1$):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (6.5.4)$$

προκύπτει ότι:

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (6.5.5)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δυστυχώς είναι αρκετά πολύπλοκες. Η επιλογή όμως της βαθμίδας Lorenz :

$$\bar{h}_{,\alpha}{}^{\mu\alpha} = 0 \quad (6.5.6)$$

έχει την καλή ιδιότητα ότι μηδενίζει τους τελευταίους τρεις όρους της παραπάνω εξίσωσης και έτσι δουλεύουμε σε ένα βολικό σύστημα συντεταγμένων. Παρακάτω αποδεικνύουμε αυτό το επιχείρημα:

$$\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\bar{h}_{\alpha\beta}){}^{,\alpha\beta} \quad (6.5.7)$$

$$= (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\eta^{\alpha\tau}\eta^{\beta\epsilon}\bar{h}^{\gamma\sigma}){}^{,\tau\epsilon} \quad (6.5.8)$$

$$= \delta_{\gamma}^{\tau}\delta_{\sigma}^{\epsilon}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}^{,\tau\epsilon} \quad (6.5.9)$$

$$= h^{\gamma\sigma}{}^{,\gamma\sigma} = (\bar{h}^{\gamma\sigma}){}^{,\gamma} = 0 \quad (6.5.10)$$

$$\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} = \eta_{\mu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}){}^{,\nu\alpha} \quad (6.5.11)$$

$$= \eta_{\mu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}\eta^{\alpha\tau}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}^{,\nu\tau} \quad (6.5.12)$$

$$= \eta_{\mu\gamma}\delta_{\sigma}^{\tau}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}^{,\nu\tau} \quad (6.5.13)$$

$$= \eta_{\mu\gamma}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}^{,\nu\sigma} = \eta_{\mu\gamma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}){}^{,\sigma}{}_{,\nu} = 0 \quad (6.5.14)$$

$$\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{;\alpha} = \eta_{\nu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu}){}^{;\alpha} \quad (6.5.15)$$

$$= \eta_{\nu\gamma}\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\alpha\tau}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\tau} \quad (6.5.16)$$

$$= \eta_{\mu\gamma}\delta_{\sigma}^{\tau}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\tau} \quad (6.5.17)$$

$$= \eta_{\nu\gamma}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\sigma} = \eta_{\nu\gamma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma}){}_{,\mu} = 0 \quad (6.5.18)$$

Βιβλιογραφία

- [1] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley, San Francisco, 2004
- [2] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, third edition, Addison-Wesley, San Francisco, 2002
- [3] James B. Hartle, *Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco, 2003
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, San Francisco, 1973
- [5] WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light 2015, Lectures by Frederic P. Schuller, <https://youtu.be/7G4SqIboeig?list=PLtku678e9yj725K6hjLqKhJ854nTWR5e>
- [6] <https://www.ligo.caltech.edu>
- [7] Martin Hendry, <http://www.ego-gw.it/public/events/vesf/presentations2007/hendry.pdf>
- [8] Michele Maggiore, *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2007
- [9] <https://www.elisascience.org>
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/World_line
- [11] [https://en.wikipedia.org/wiki/Atlas_\(topology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Atlas_(topology))