Αριθμητικός υπολογισμός τροχιών σωμάτων στη γεωμετρία Schwarzschild

Κουλούρης Κωνσταντίνος

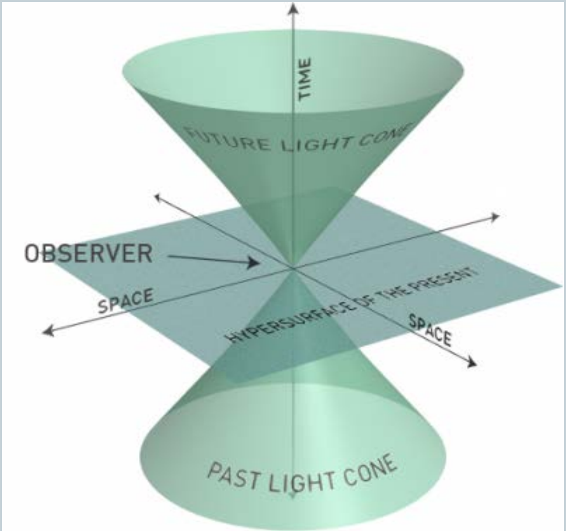
Σύνοψη

- Σχετικότητα
  Ειδική και γενική θεωρία
- Γεωμετρία Swarzschild
  Μετρική και εξισώσεις γεωδαιτικών τροχιών
- Υπολογιστική προσομοίωση
  Μέθοδος και αποτελέσματα

Ειδική θεωρία της σχετικότητας

Στοιχειώδες μήκος επίπεδου χωροχρόνου

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



Μετασχηματισμοί Lorentz

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Γενική θεωρία της σχετικότητας

Εξίσωση Newton

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r})=\mathbf{4\pi G\rho_m(r)}$$

Εξίσωση Einstein

$$R_{\mu\nu} - ½\, Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}\, 8\pi G/c^4$$

Γενικευμένη μετρική χωροχρόνου

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}$$

Γεωμετρία Swarzschild

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Περιγράφει τον χώρο γύρω από μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας, χωρίς φορτίο και γωνιακή ταχύτητα.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdt)^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Γεωδαιτικές εξισώσεις

Σύμβολα Christoffel $\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}$

$$g_{\alpha\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

Γεωδαιτική εξίσωση για χρονοειδείς γεωδαιτικές

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{dx^{\gamma}}{d\tau}$$

Γεωδαιτικές εξισώσεις

Θεωρώντας ότι θ=π/2 λόγω σφαιρικής συμμετρίας:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\left(\frac{2GM}{c^2r^2}\right)\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\left(\frac{2GM}{c^2r^2}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\left(\frac{2GM}{r^2}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + r\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}$$

Συμμετρίες και διατηρούμενες ποσότητες

Συμμετρίες αντιστοιχούν σε διατηρούμενες ποσότητες.

Για κάθε διάνυσμα Killing **ξ** που χαρακτηρίζει μια συμμετρία ισχύει ότι:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{u} = const.}$$

Η μετρική Schwarzschild είναι χρονικά ανεξάρτητη και σφαιρικά συμμετρική:

$$\boxed{\xi^{\alpha} = (1,0,0,0)} \qquad \boxed{\eta^{\alpha} = (0,0,0,1)}$$

Αυτά τα διανύσματα αντιστοιχούν σε διατηρούμενες ποσότητες

$$\boxed{e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{u} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau}} \qquad \boxed{l = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{u} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}}$$

Ενεργό δυναμικό

Από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας προκύπτει η σχέση:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{e^2-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)-1\right]$$

Και ορίζοντας τις παρακάτω ποσότητες:

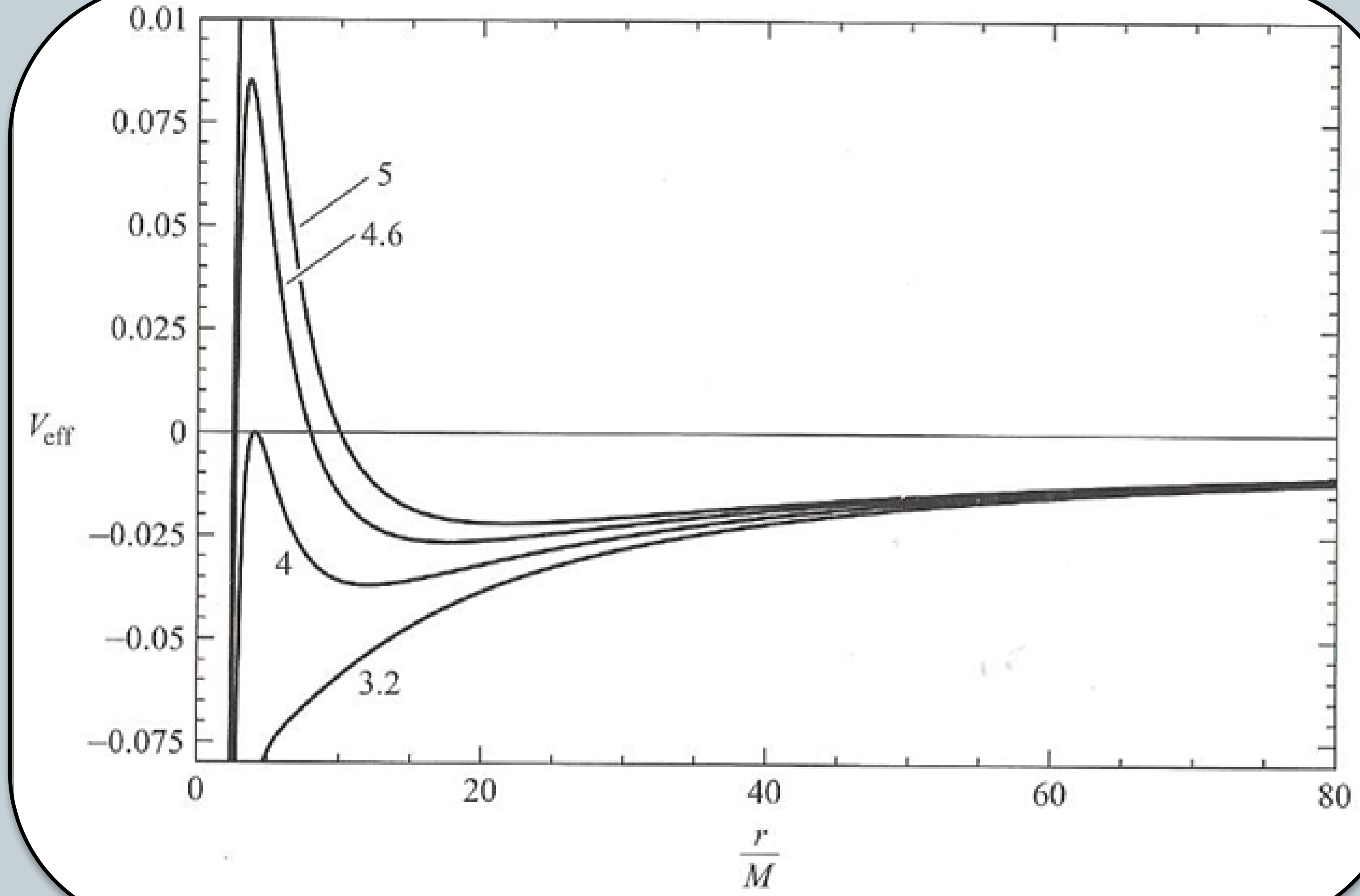
$$E \equiv \frac{e^2-1}{2}$$

$$V_{eff}(r) \equiv \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)-1\right] = -\frac{M}{r}+\frac{l^2}{2r^2}-\frac{Ml^2}{r^3}$$

Προκύπτει η σχέση:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}(r)$$

Ενεργό δυναμικό



Εξισώσεις ολοκλήρωσης

Χρησιμοποιώντας τις διατηρούμενες ποσότητες και την σχέση για το ενεργό δυναμικό, οι γεωδαιτικές εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 (r - 3M) - \frac{M}{r^2} = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 (r - 3M) - \frac{M}{r^2}$$

Μέθοδος Runge-Kutta - Εισαγωγή

Μέθοδος αριθμητικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Διαχωρισμός του πεδίου ολοκλήρωσης T σε N τμήματα Δt και υπολογισμός του κάθε βήματος χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\Delta t\, x'(t)+\Delta t^2\, x''(t)/2 + O(\Delta t^3)$$

Η χρήση περισσότερων όρων από το ανάπτυγμα Taylor αντιστοιχεί σε μεγαλύτερης τάξης Runge-Kutta με μικρότερο σφάλμα.

Το σφάλμα κάθε βήματος μιας n τάξης ολοκλήρωσης είναι $\sim O(\Delta t^{n+1})$ και το συνολικό σφάλμα $\sim O(\Delta t^n)$.

Μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

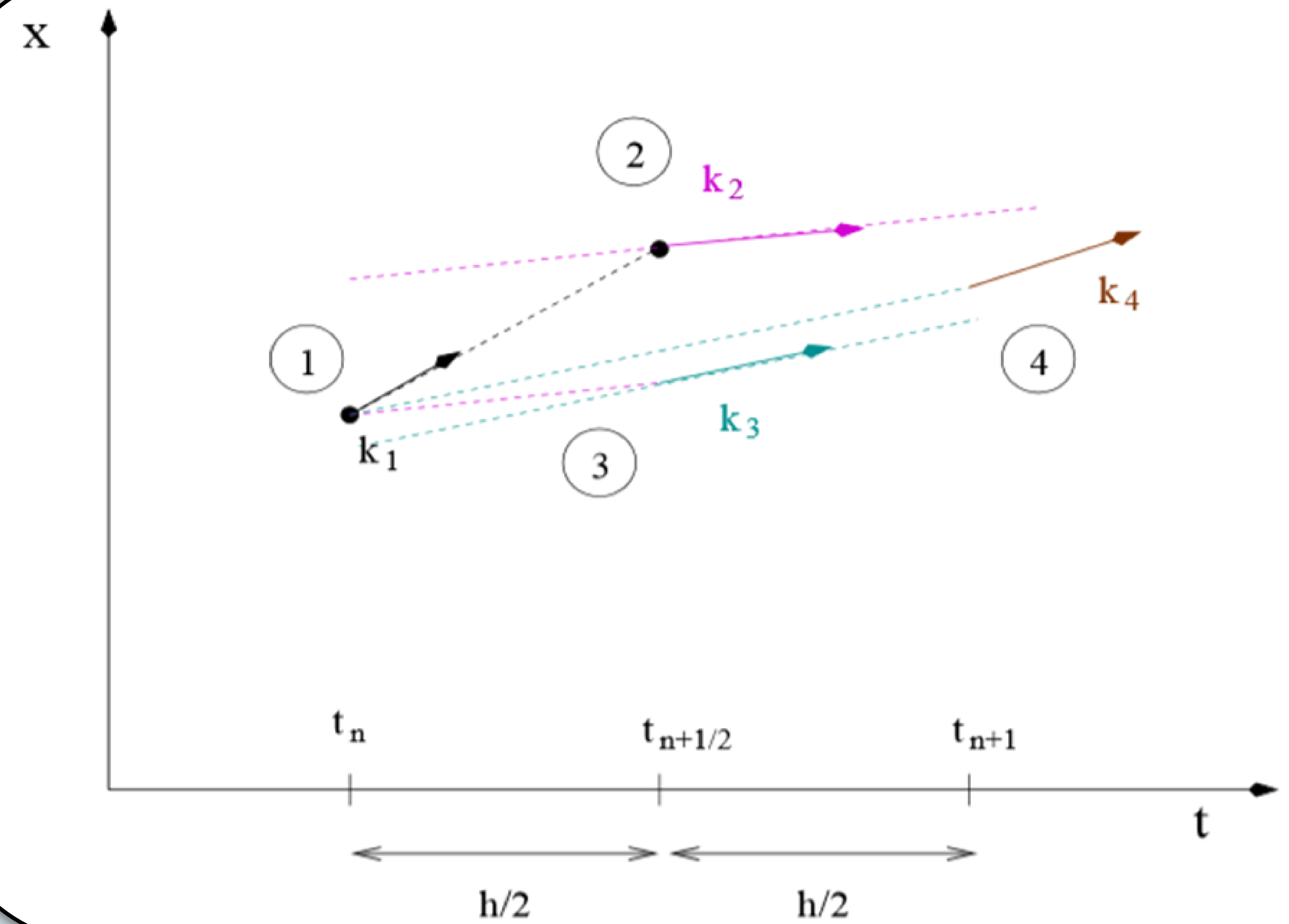
$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

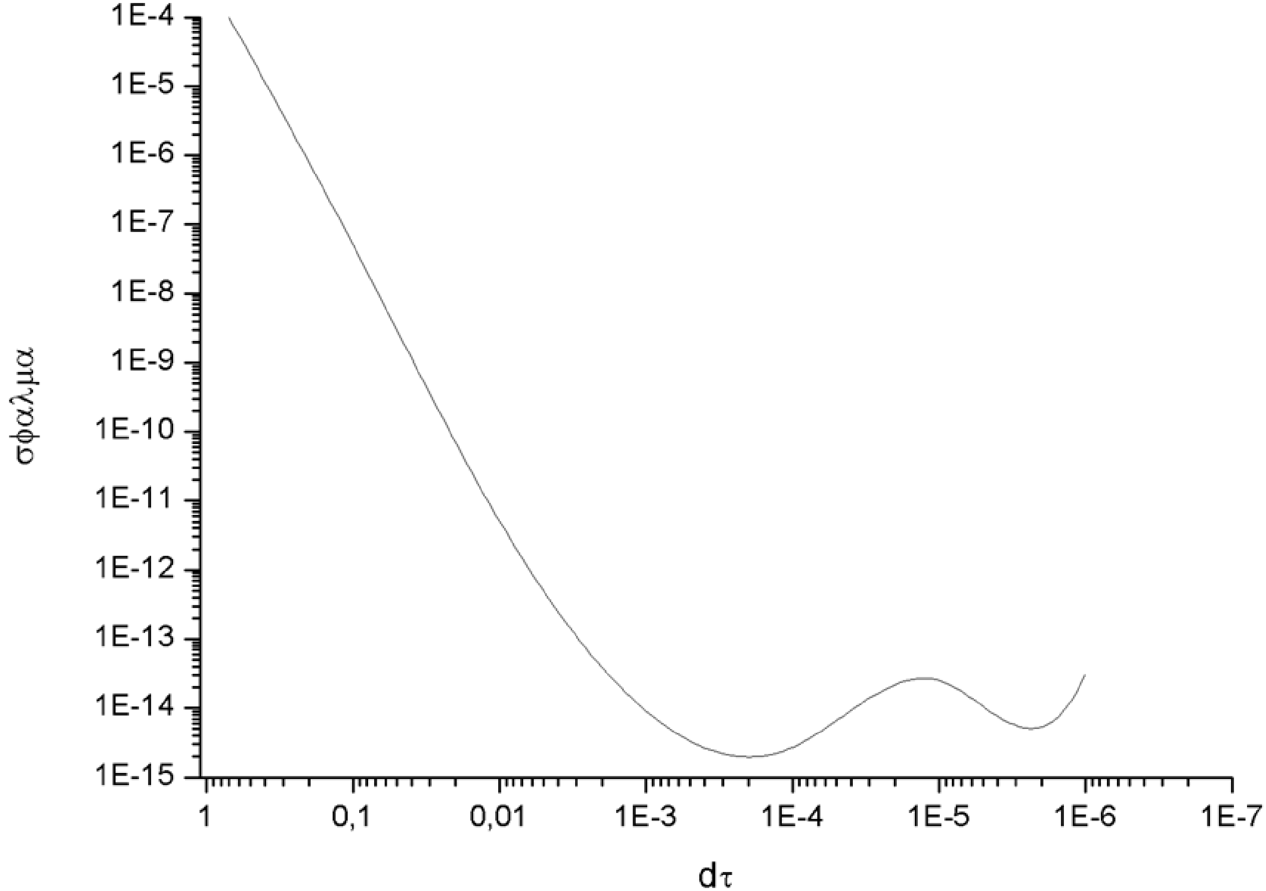
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3)$$

Runge-Kutta 4ης τάξης – Βήμα ολοκλήρωσης



Runge-Kutta 4ης τάξης – Σφάλμα ολοκλήρωσης



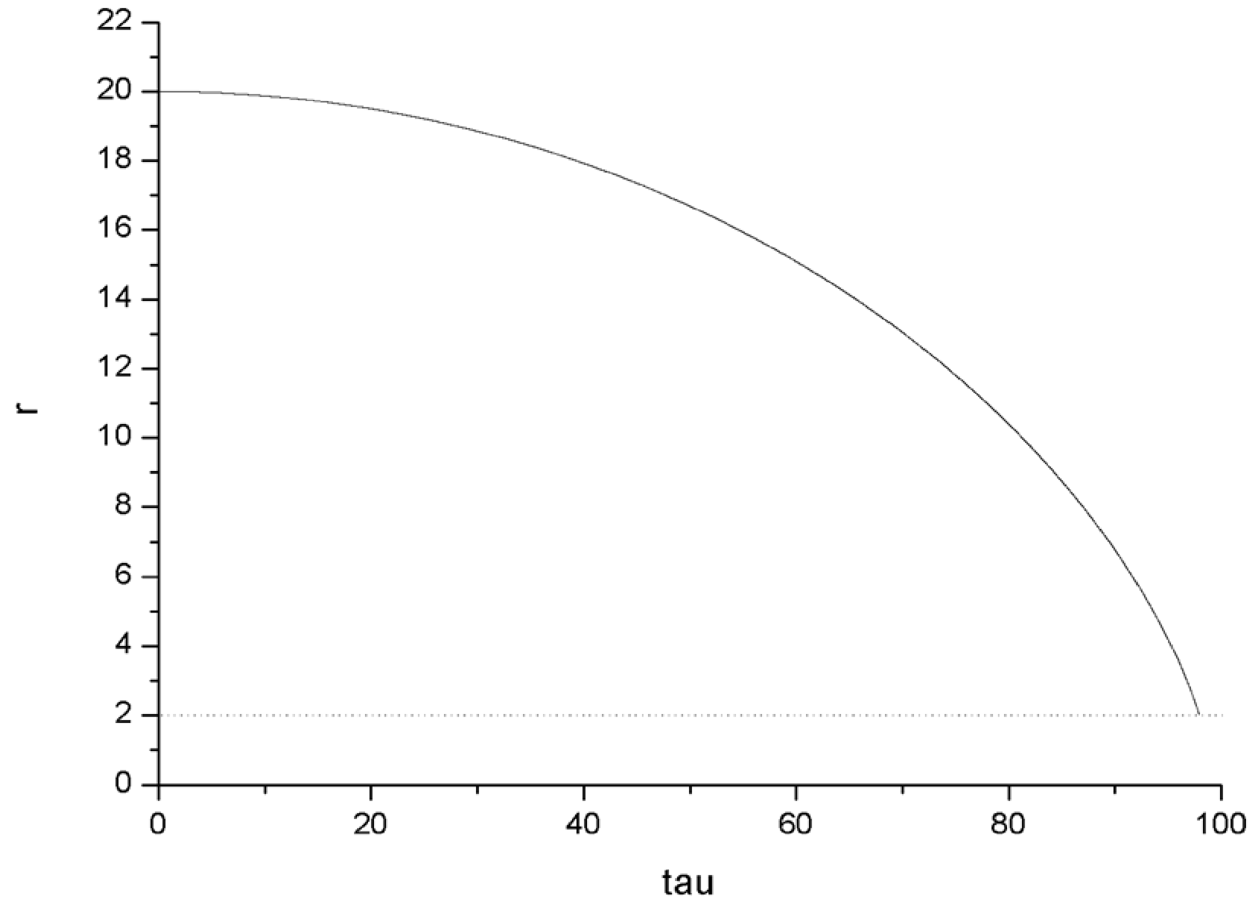
Ακτινικές τροχιές

Οι συντεταγμένες Schwarzschild παρουσιάζουν ιδιομορφία στις συντεταγμένες $r=0$ και $r_s=2GM/c^2$.

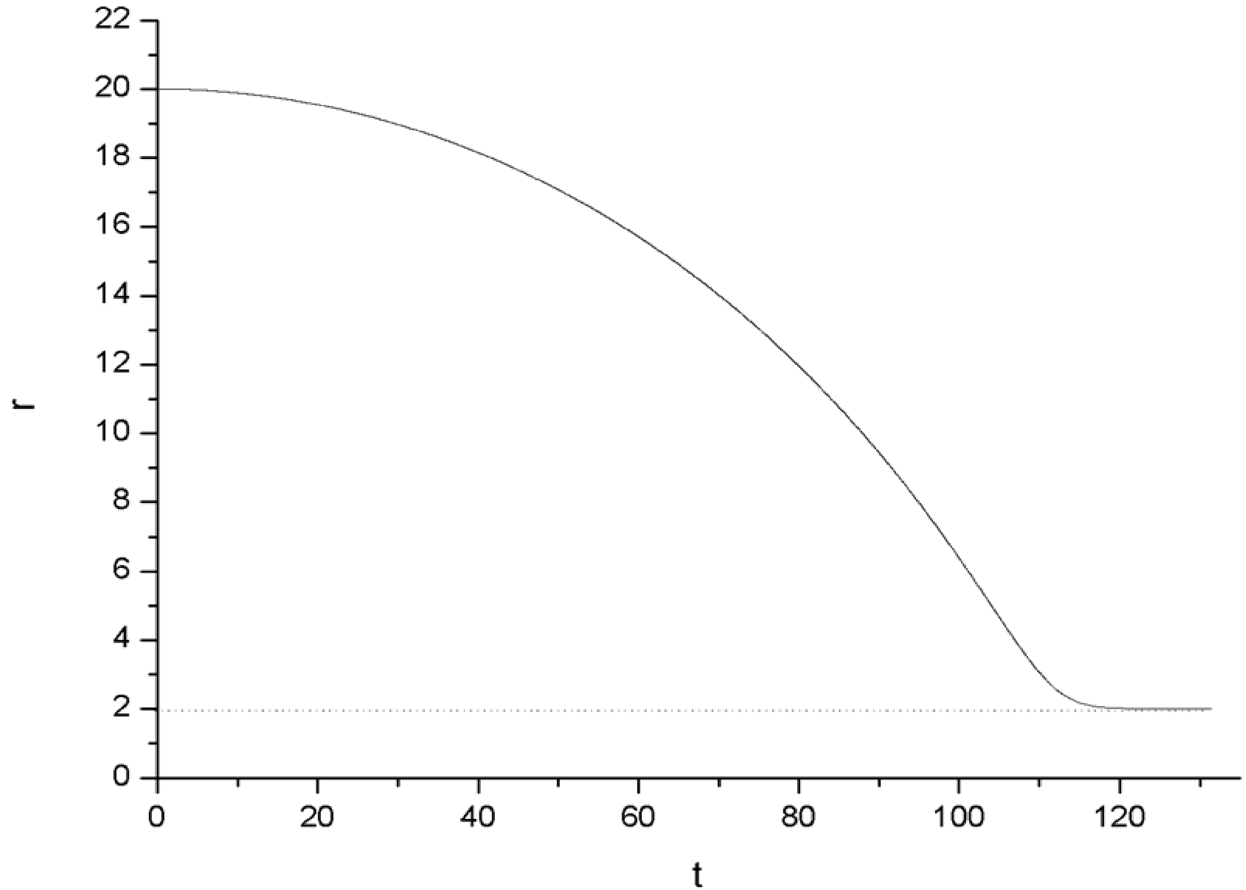
Η ακτίνα r_s ονομάζεται ακτίνα Schwarzschild και συμπίπτει με τον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας.

Ο ιδιόχρονος που χρειάζεται ένα σώμα για να φτάσει στην ακτίνα r_s ξεκινώντας από κάποια ακτίνα r είναι πεπερασμένος, ενώ το αντίστοιχο διάστημα στην χρονική συντεταγμένη t είναι άπειρο.

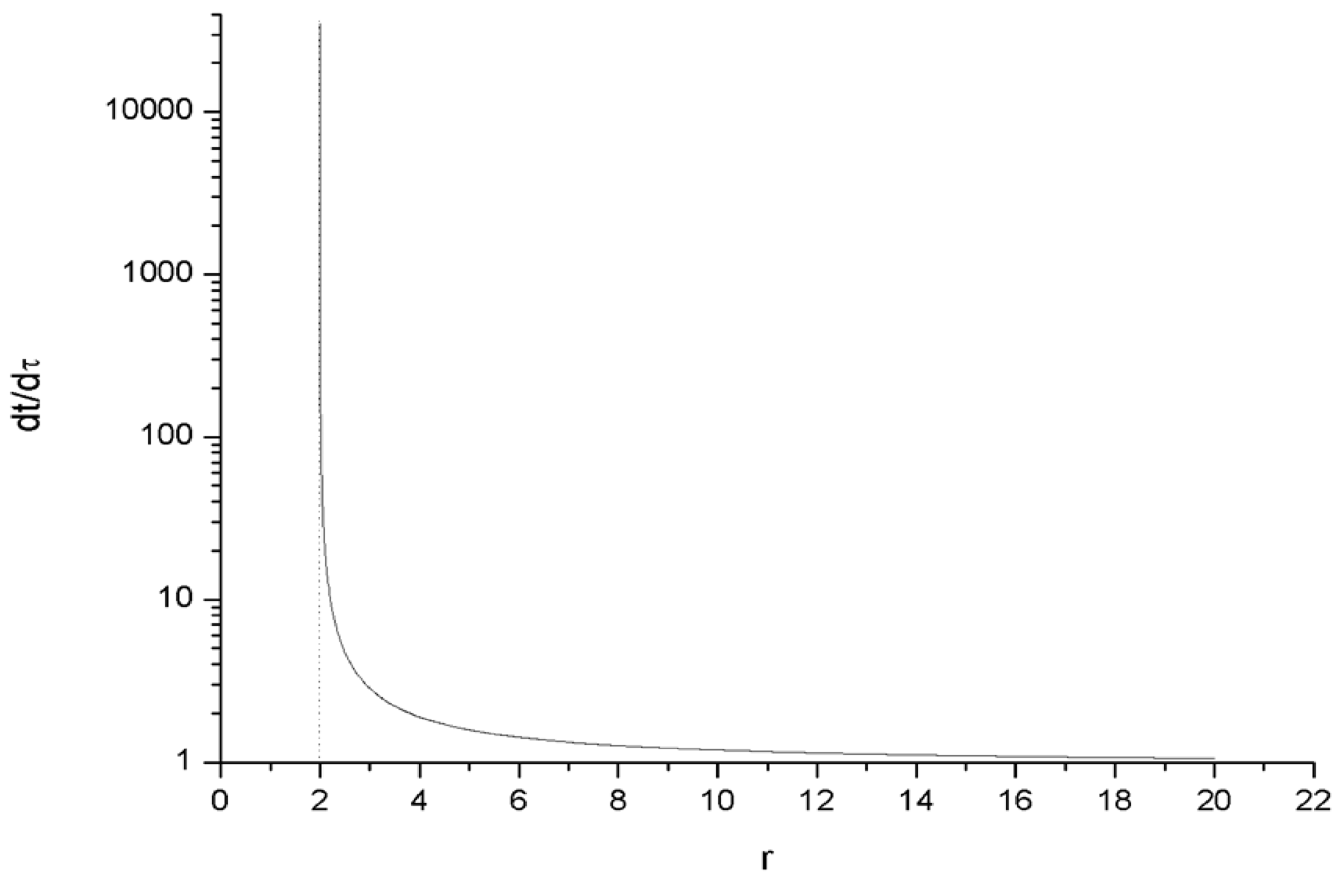
Ακτινικές τροχιές – r(τ)



Ακτινικές τροχιές – r(t)

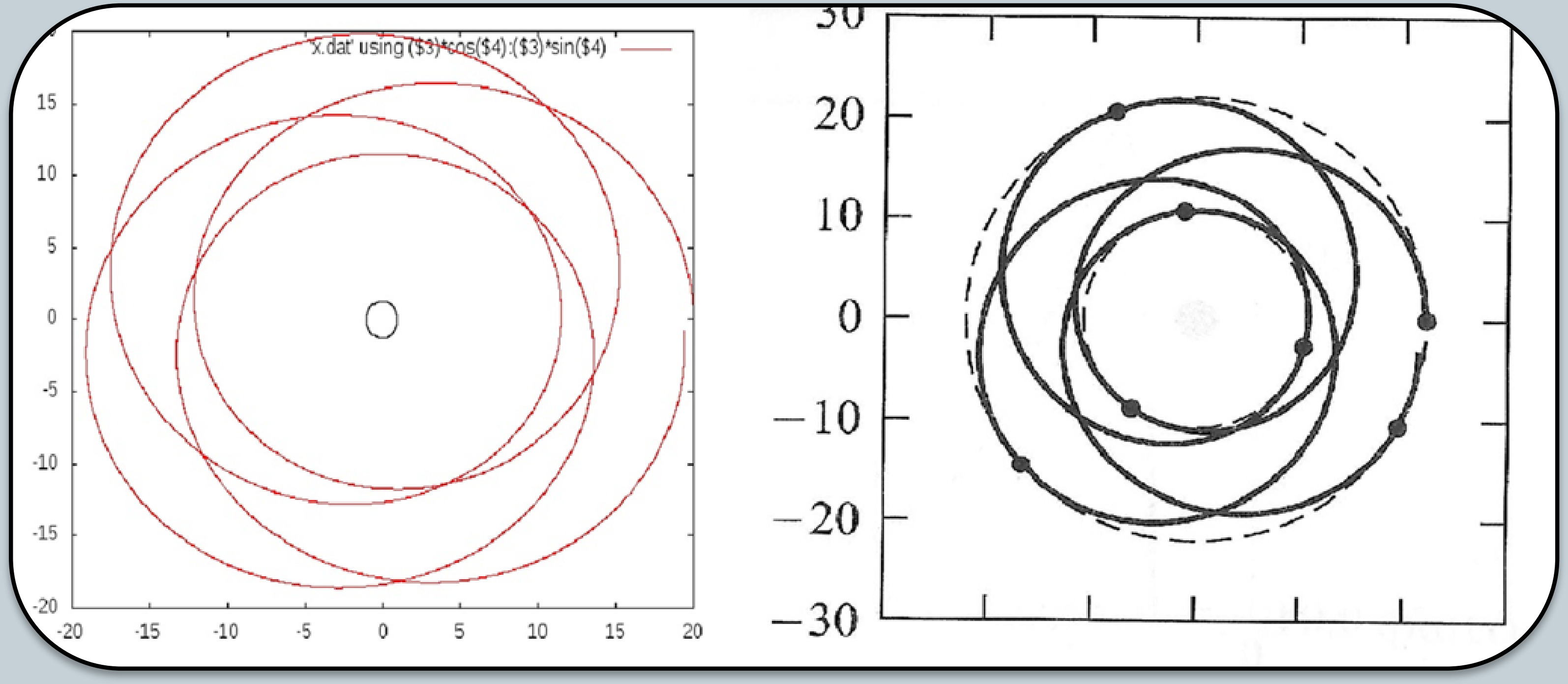


Ακτινικές τροχιές – γ(r)



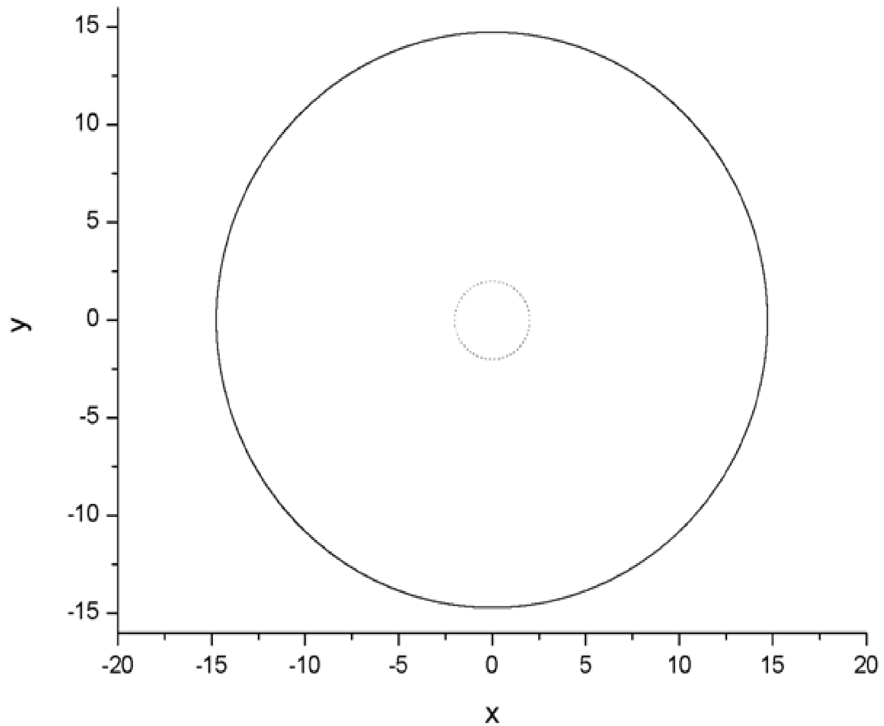
Δέσμιες τροχιές

Μια μεγάλη διαφορά σε σχέση με την κλασική μηχανική είναι η γωνιακή μετατόπιση των σημείων καμπής των δέσμιων τροχιών.



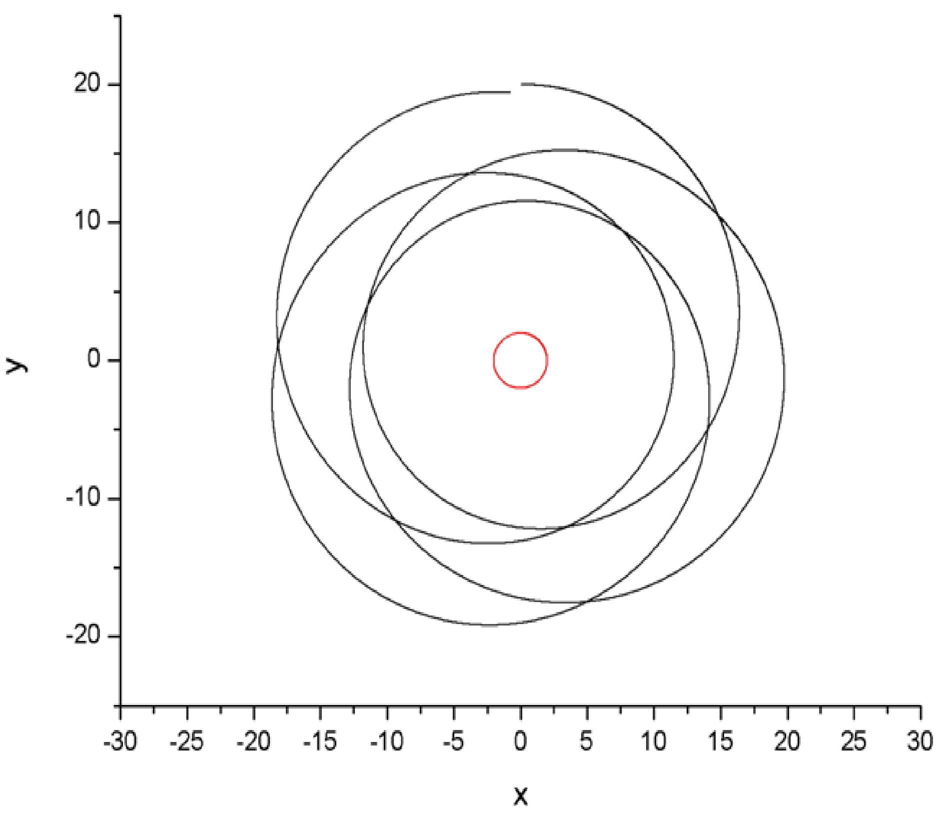
Δέσμιες τροχιές – Κυκλικές τροχιές

Εάν η ενέργεια του σώματος αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο του ενεργού δυναμικού, η τροχιά είναι σταθερή:



Δέσμιες τροχιές – Μετάπτωση του περιηλίου

Για ενέργεια που αντιστοιχεί σε κοιλότητα του ενεργού δυναμικού συμβαίνει μετάπτωση του περιηλίου:



Επαλήθευση αποτελεσμάτων

Ακτινική τροχιά:

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (2M)^{\frac{1}{3}} (\tau_* - \tau)^{\frac{2}{3}}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}(r)$$

Δέσμιες τροχιές:

$$r_{\substack{min\\max}} = \frac{l^2}{2M}\left[1 \pm \sqrt{1 - 12\left(\frac{M}{l}\right)^2}\right]$$

$$\Delta\varphi = 2l\int_{r_1}^{r_2} r^2 \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

Τροχιές ακτινών φωτός

Είναι απαραίτητη η επιλογή μιας διαφορετικής παραμέτρου ολοκλήρωσης αντί για τον ιδιόχρονο τ.

Ορίζοντας μια παράμετρο ολοκλήρωσης λ τέτοια ώστε $u_\alpha = dx_\alpha / d\lambda$ και **u*u**=0 οι εξισώσεις μπορούν να οριστούν με την ίδια μορφή:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(\frac{2GM}{r^2}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + r\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}$$

Ακτίνες φωτός – Διατηρούμενες ποσότητες

Οι διατηρούμενες ποσότητες έχουν την ίδια μορφή:

$$e \equiv -\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

$$l \equiv \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{u} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

Όμως, λόγω της αλλαγής στην κανονικοποίηση της τετραταχύτητας, προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{eff}(r)$$

Όπου:

$$W_{eff}(r) \equiv \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$b^2 \equiv \frac{l^2}{e^2}$$

Ακτίνες φωτός – Εξισώσεις ολοκλήρωσης

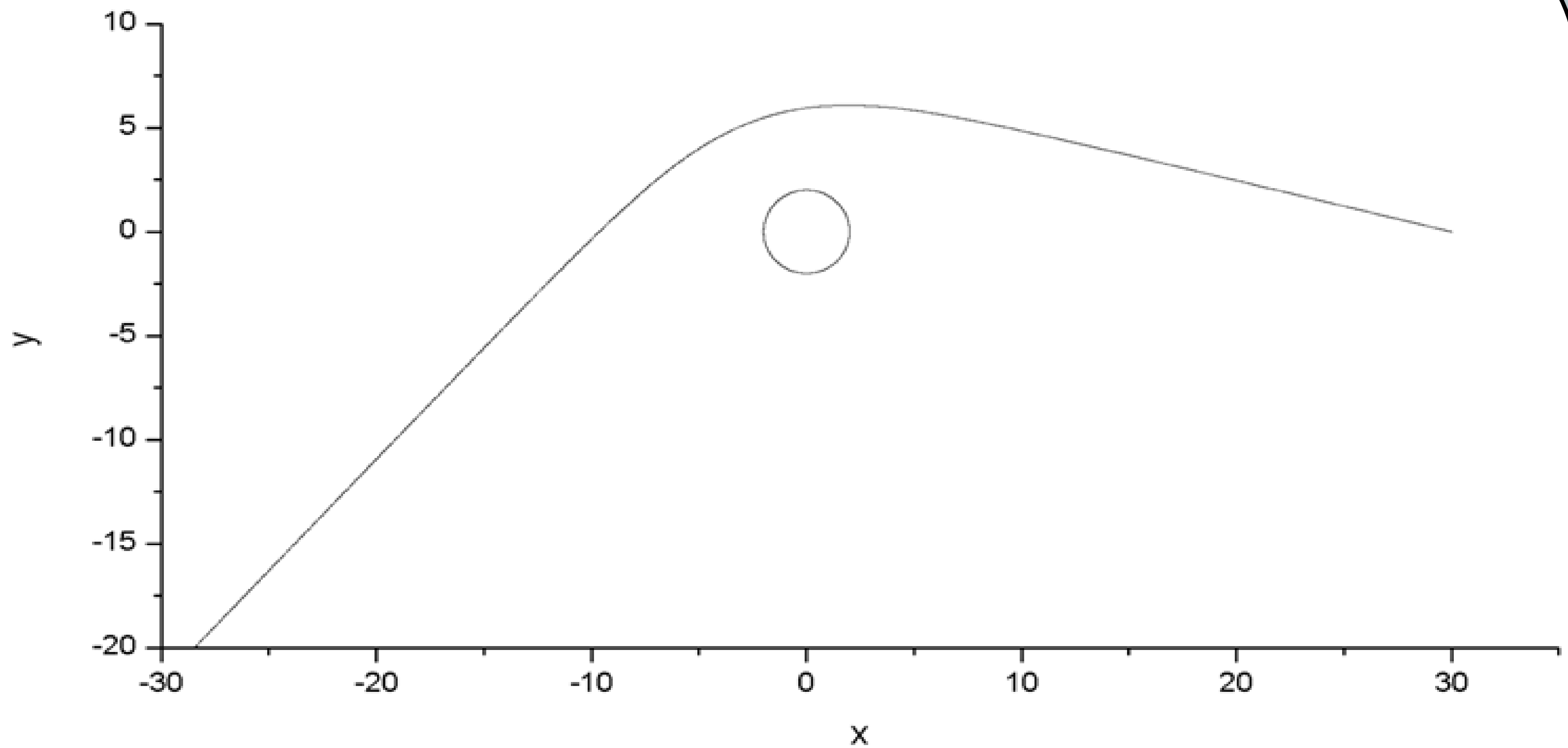
Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, οι γεωδαιτικές εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}$$

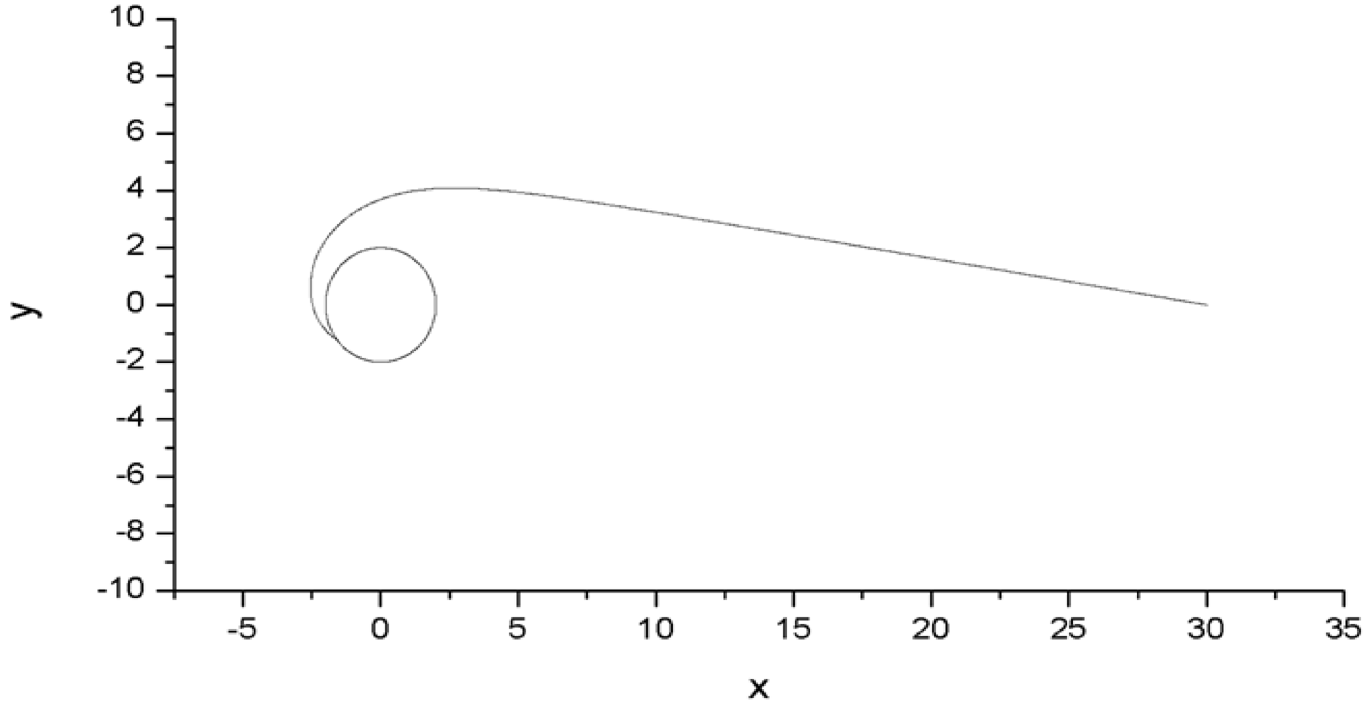
$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{d\lambda^2} = \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 (r - 3M) = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 (r - 3M)$$

Ακτίνες φωτός – Κάμψη τροχιάς



Ακτίνες φωτός – Παγίδευση στον ορίζοντα



Επαλήθευση αποτελεσμάτων

Γωνία κάμψης του φωτός:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

Όπου r_1 η ακτίνα για την οποία ισχύει:

$$W_{eff} = \frac{1}{b^2}$$

Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

Η μαθηματική ανωμαλία που παρατηρείται στην ακτίνα Schwarzschild αποτελεί ιδιομορφία του συστήματος συντεταγμένων και όχι της γεωμετρίας.

Ο περιορισμός μπορεί να ξεπεραστεί με τον ορισμό ενός διαφορετικού συστήματος συντεταγμένων:

$$t = v - r - 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$

Προκύπτει ή μετρική:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Συντεταγμένες E-F – Γεωδαιτικές Εξισώσεις

Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Christoffel προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2}\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 + r\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{M}{r^2}\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 + \frac{2M}{r^2}\frac{dv}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} - (2M-r)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau}$$

Συντεταγμένες E-F – Διατηρούμενες ποσότητες

Η μετρική είναι ανεξάρτητη των v και θ, άρα προκύπτουν τα διανύσματα Killing:

$$\boldsymbol{\xi} = (1,0,0,0)$$

$$\boldsymbol{\eta} = (0,0,1,0)$$

Από τα οποία προκύπτουν οι διατηρούμενες ποσότητες:

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dv}{d\tau} - \frac{dr}{d\tau}$$

$$l = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{u} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

Συντεταγμένες E-F – Εξισώσεις Ολοκλήρωσης

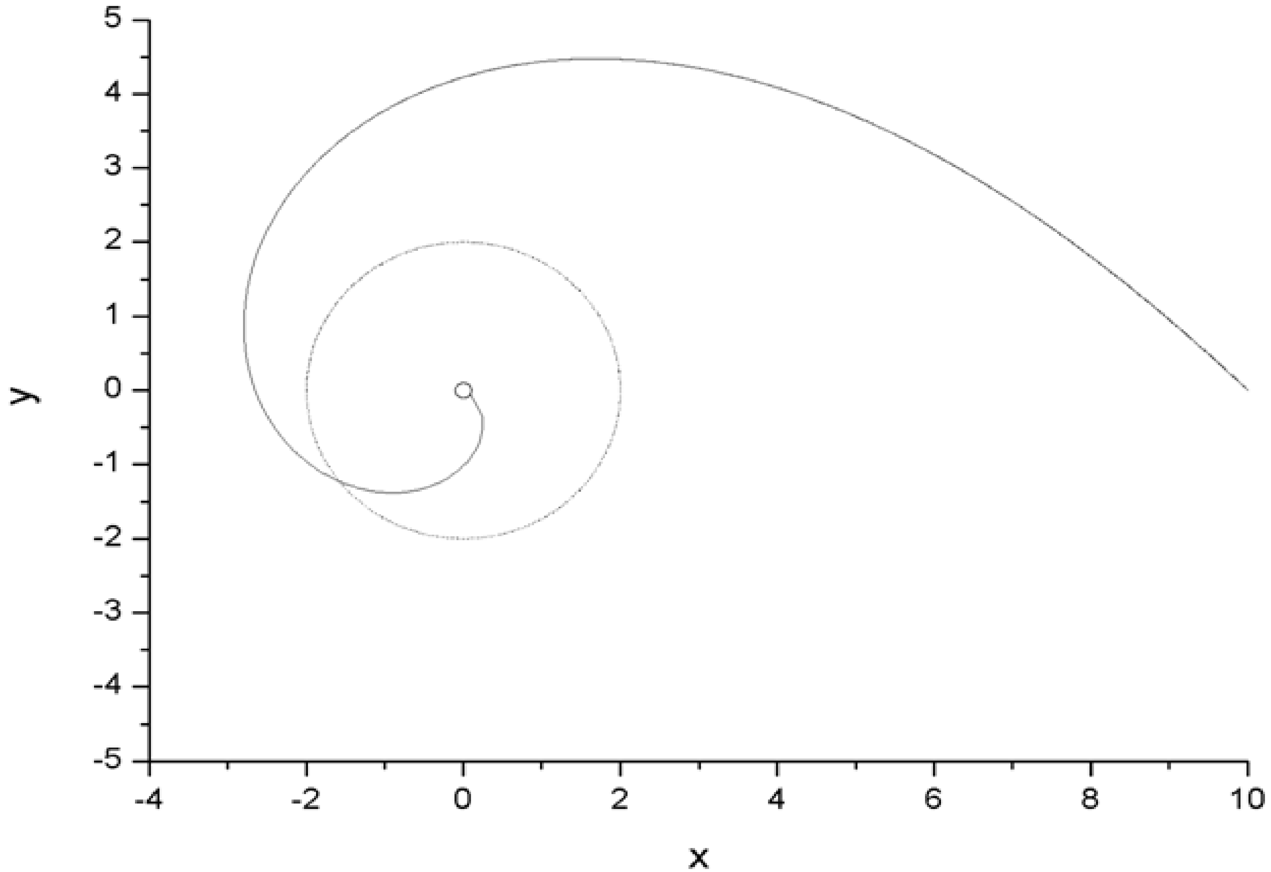
Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, οι γεωδαιτικές εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = \frac{l^2}{r^3} - \frac{M}{r^2}\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2$$

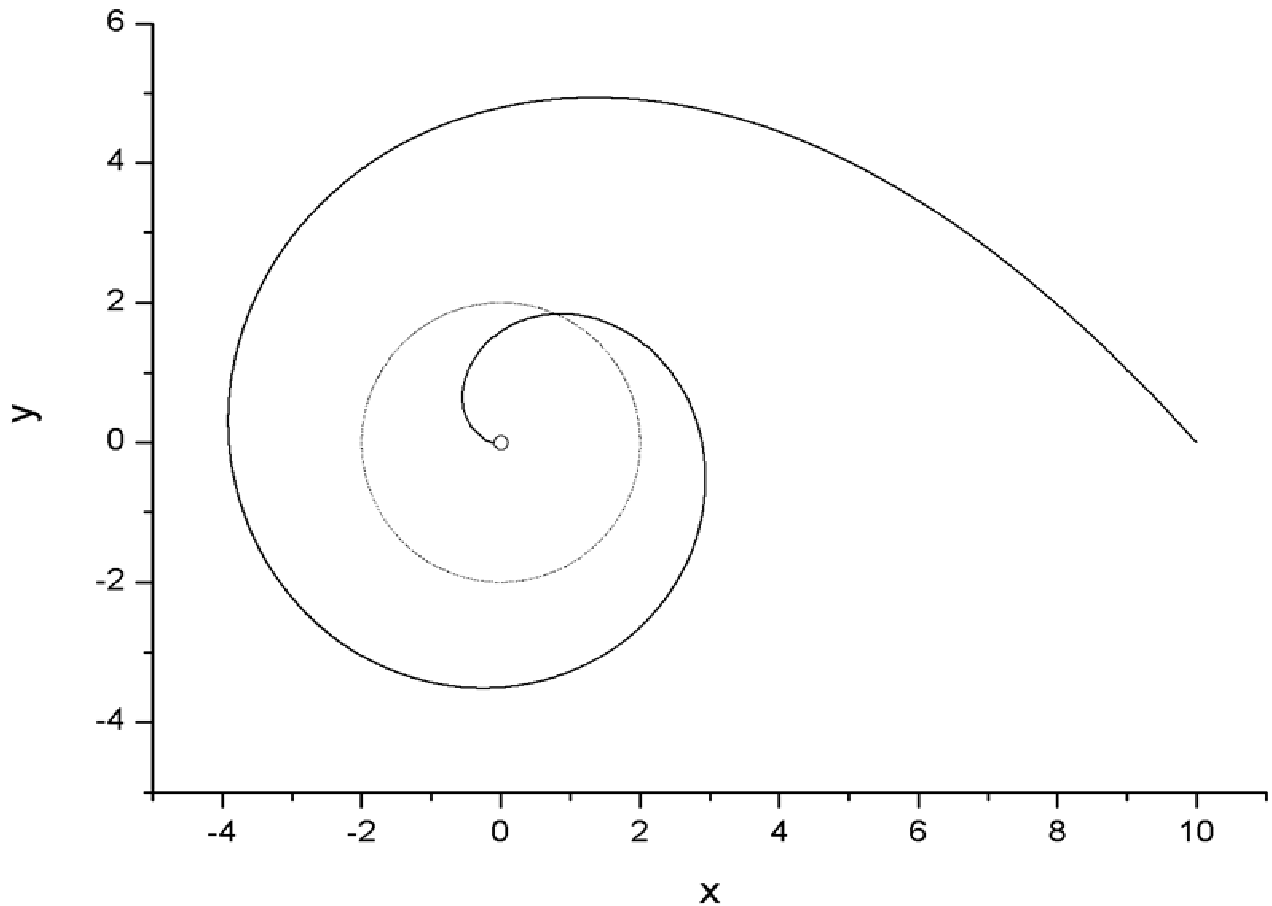
$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{M}{r^2}\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - \frac{2Me}{r^2}\frac{dv}{d\tau} - \frac{l^2}{r^4}(2M - r)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{2l}{r^3}\left[e - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dv}{d\tau}\right]$$

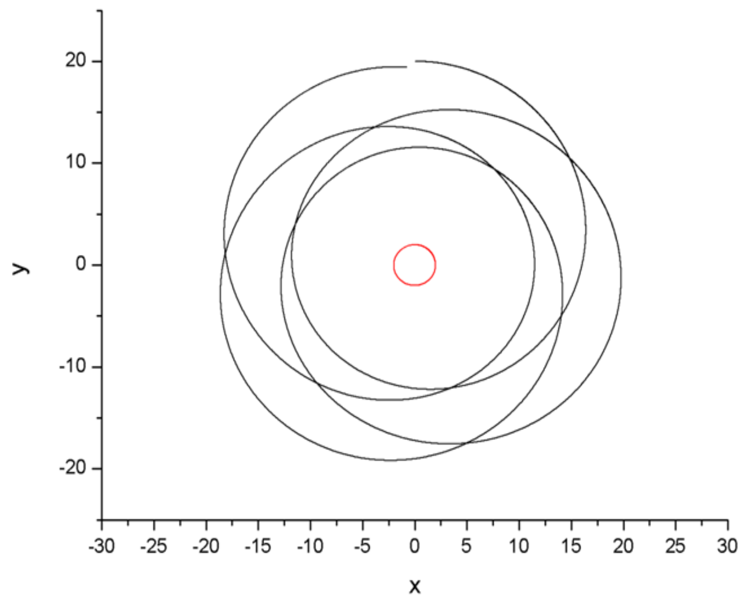
Συντεταγμένες E-F - Τροχιές

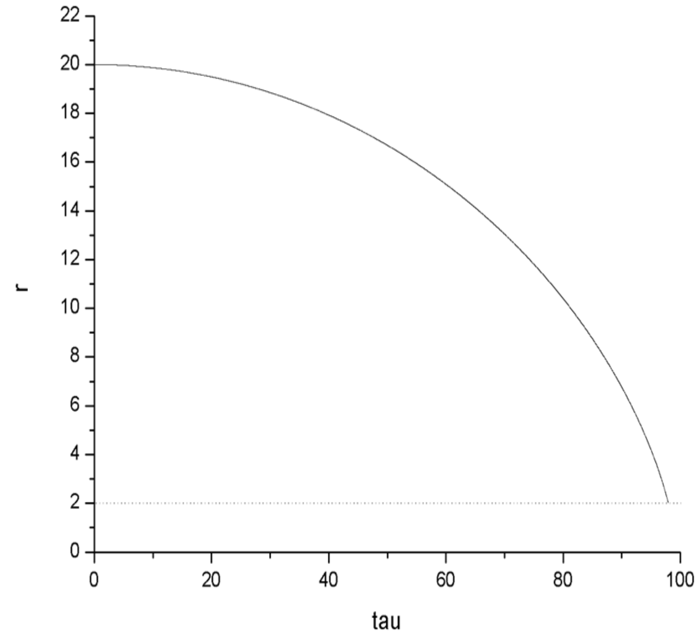


Συντεταγμένες E-F - Τροχιές



Επαλήθευση αποτελεσμάτων





Τέλος παρουσίασης

Σας ευχαριστώ