

Ακτινοβολία Hawking

Πιέρρος Ντελής



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
July 3, 2013

Outline

Σχετικότητα

Ειδική & Γενική Θεωρία

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Πεδία Στον Χωρόχρονο

Ακτινοβολία Hawking

Εκπομπή Σωματιδίων Από Μελανές Οπές

Ειδική θεωρία της Σχετικότητας

Χωρόχρονος Minkowski

Λίγα λόγια...

Στοιχειώδες Μήκος Επίπεδου Χωρόχρονου

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Μετρική

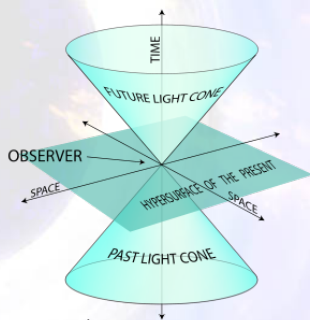
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμοί Lorentz

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{\beta}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma c\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμός Poincare

$$x^\mu \rightarrow x^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + \alpha^\nu$$



Κώνος Φωτός

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Αρχές Ισοδυναμίας

Ασθενής Αρχή Ισοδυναμίας

$$m_{\text{αδρανειακή}} = m_{\text{βαρυντική}}$$

Αρχή Ισοδυναμίας Einstein

(Νόμοι της Φύσης) $\stackrel{\text{Τοπικά}}{\Rightarrow}$ (Νόμοι της Ειδικής Σχετικότητας)

Ισχυρή Αρχή Ισοδυναμίας

Το αποτέλεσμα ενός τοπικού πειράματος (βαρυντικό ή όχι) σε ένα freely falling εργαστήριο είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας και της θέσης του εργαστηρίου στον χωρόχρονο.

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Εξισώσεις **Newton** & **Einstein** για το Βαρυτικό Πεδίο

Κατ'αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε για το βαρυτικό πεδίο:

Εξίσωση **Newton**

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho_m(\mathbf{r})$$

Η σχετικιστική εξίσωση του βαρυτικού πεδίου είναι:

Πεδιακή Εξίσωση **Einstein**

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Η λύσης της περιγράφει την γεωμετρία του χωρόχρονου:

Γενικευμένη Μετρική Χωρόχρονου (Πεδίο **Einstein**)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Καμπυλότητα

Τανυστής **Riemann** μετράει καμπυλότητα τανυστών:

Μεταθέτης παράλληλης μετατόπισης διανύσματος

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\kappa = \mathcal{R}^\rho{}_{\kappa\mu\nu}V_\rho$$

Αποδουκνύεται ότι ο τανυστής **Riemann** έχει την μορφή:

Τανυστής **Riemann** και σύμβολα **Christoffel**

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \\ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\end{aligned}$$

Ποσότητες που εκφράζουν καμπυλότητα:

Τανυστης Καμπυλότητας & Βαθμωτό **Ricci**

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\rho{}_{\mu\rho\nu} \quad \& \quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$$

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Λύση της Εξίσωσης **Einstein** στο Κενό

Εξίσωση Einstein Κενού

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$$

που έχει λύση για **στατικό σφαιρικά συμμετρικό Χωρόχρονο**

Λύση Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Schwarzschild Μελανές οπές

Μελανές Οπές

Περιοχές του Χωρόχρονου όπου ότι σωματίδιο περάσει στην περιοχή αυτή δεν επανέρχεται στον υπόλοιπο Χωρόχρονο

Μετρικές Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2$$

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Αποφυγή ιδιομορφίας $r = R_S$

Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

$$v = t + r^*$$

$$u = t - r^*$$

$$r^* = r + R_S \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right)$$

Συνθήκη Φωτοειδών Ακτίνων

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & , \text{(κινούμενες ακτινικά προς το κέντρο)} \\ 2 \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & , \begin{pmatrix} \text{προς τα έξω } r > 2GM \\ \text{προς τα μέσα } r < 2GM \end{pmatrix} \end{cases}$$

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Schwarzschild Μελανές οπές

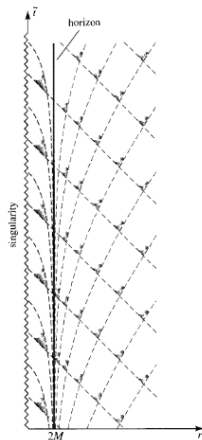
Μελανές Οπές

Περιοχές του Χωρόχρονου όπου ότι σωματίο περάσει στην περιοχή αυτή δεν επανέρχεται στον υπόλοιπο Χωρόχρονο

Μετρικές Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2$$



Συνθήκη Φωτοειδίων Ακτίνων

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & , \text{(κινούμενες ακτινικά προς το κέντρο)} \\ 2 \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & , \begin{pmatrix} \text{προς τα έξω } r > 2GM \\ \text{προς τα μέσα } r < 2GM \end{pmatrix} \end{cases}$$

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

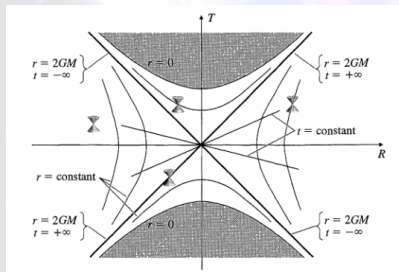
Schwarzschild Μελανές Οπές

Maximally Extended Schwarzschild Metric

Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

$$T = \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2R_S} \sinh \left(\frac{t}{2R_S} \right)$$

$$R = \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2R_S} \cosh \left(\frac{t}{2R_S} \right)$$



Μετρική Kruskal-Szekeres

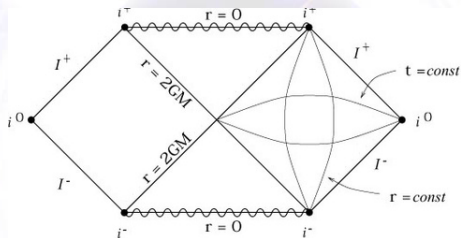
$$ds^2 = \frac{4R_S^3}{r} e^{-r/R_S} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2$$

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Schwarzschild Μελανές οπές-Διάγραμμα Penrose

Κατάλληλος Μετασχηματισμός

Διάγραμμα Kruskal \Rightarrow Διάγραμμα Penrose



- i^+ = Μελλοντικό Χρονοειδές Άπειρο ($T_P = \frac{\pi}{4}$, $R_P = \frac{\pi}{4}$)
- i^0 = Χωροειδές Άπειρο ($T_P = 0$, $R_P = \frac{\pi}{2}$)
- i^- = Παρελθοντικό Χρονοειδές Άπειρο ($T_P = -\frac{\pi}{4}$, $R_P = \frac{\pi}{4}$)
- I^+ = Μελλοντικό φωτοειδές Άπειρο ($0 < T_P < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < R_P < \frac{\pi}{2}$)
- I^- = Παρελθοντικό φωτοειδές Άπειρο ($-\frac{\pi}{4} < T_P < 0$, $\frac{\pi}{4} < R_P < \frac{\pi}{2}$)

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Πεδία Σε Επίπεδο Χωρόχρονο

Εξίσωση κίνησης Βαθμωτού Πεδίου σε **Minkowski** χωρόχρονο.

Εξίσωση **Klein-Gordon**

$$(\square - m^2)\phi = 0 \quad , \quad \square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

Η εξίσωση αυτή λύνεται από:

Πεδίο ανεπτυγμένο σε Επίπεδα Κύματα

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^{n-1}k \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) \right]$$

$$f_{\mathbf{k}}(x^\mu) = \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{[(2\pi)^{n-1} 2\omega(\mathbf{k})]^{1/2}}$$

Μεταθετικές Σχέσεις Τελεστών

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(n-1)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Η ορθοκανονικότητα των επιπέδων κυμάτων θεμελιώνεται από:

Εσωτερικό Γινόμενο

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int_{\Sigma} (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1) n^\mu \sqrt{-\gamma} d^{n-1}x$$

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Πεδία Σε καμπυλωμένο Χωρόχρονο

Εξίσωση κίνησης Βαθμωτού Πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο.

Εξίσωση Klein-Gordon

$$(\square - m^2 - \xi \mathcal{R})\phi = 0 \quad , \quad \square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$$

Πεδίο ανεπτυγμένο σε Modes

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^{n-1}k \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) \right]$$

Μεταθετικές Σχέσεις Πεδίου

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(n-1)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Η ορθοκανονικότητα των modes θεμελιώνεται από:

Εσωτερικό Γινόμενο

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int_{\Sigma} (\phi_1 \nabla_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla_\mu \phi_1) n^\mu \sqrt{-\gamma} d^{n-1}x$$

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Μετασχηματισμός Bogoliubov

- Γ.Θ.Σ. = Τοπική Θεωρία
- Μετασχηματισμός Poicare **Δεν** είναι συμμετρία της Γ.Θ.Σ.
- Ελευθερία επιλογή βάσης

Βαθμωτό Πεδίο

$$\hat{\phi} = \sum_j (\hat{a}_j f_j + \hat{a}_j^\dagger f_j^*) = \sum_j (\hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^*)$$

Αναπτύσσουμε την μια βάση στην άλλη:

Μετασχηματισμός Bogoliubov

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_j (\alpha_{ij} g_j + \beta_{ij} g_j^*) \\ g_i &= \sum_j (\alpha_{ij}^* f_j - \beta_{ij} f_j^*) \end{aligned} \quad \text{με} \quad \begin{aligned} \alpha_{ij} &= \langle f_i, g_j \rangle \\ \beta_{ij} &= -\langle f_i, g_j^* \rangle \end{aligned}$$

Η ορθοκανονικότητα των modes μας δίνει:

Συνθήκη Συντελεστών Bogoliubov

$$\sum_k (\alpha_{j'k}^* \alpha_{jk} - \beta_{j'k}^* \beta_{jk}) = \delta_{jj'}$$

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Χώρος Fock

Καστάση κενού f-mode

$$\hat{a}_j |0_f\rangle = 0 \quad \forall j$$

Καστάση κενού g-mode

$$\hat{b}_j |0_g\rangle = 0 \quad \forall j$$

Διεγερμένες Καταστάσεις f-mode

$$|n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_j!}} (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} |0_f\rangle$$

Διεγερμένες Καταστάσεις g-mode

$$|n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_j!}} (\hat{b}_j^\dagger)^{n_j} |0_g\rangle$$

Τελεστής Αρίθμωσης f-mode

$$\hat{n}_{fj} = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$$

Τελεστής Αρίθμωσης βάσης g-mode

$$\hat{n}_{gj} = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$$

όπου:

Κατάσταση Κενού f-mode

$$|0_f\rangle = |0, 0, 0, 0, \dots\rangle$$

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Παραγωγή g-σωματιδίων από το f-κενό

Παρατηρητής που χρησιμοποιεί g-mode παρατηρεί κατάσταση $|0_f\rangle$

Παρατήρηση Αριθμού σωματιδίων στην i -Κατάσταση

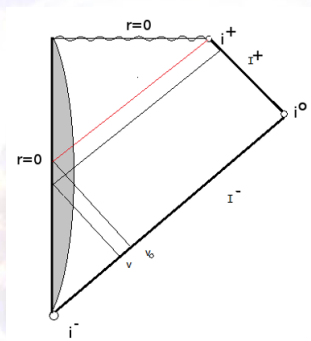
$$\begin{aligned}\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle &= \langle 0_f | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0_f \rangle \\ &= \langle 0_f | \sum_j (\alpha_{ji}^* \hat{a}_j^\dagger + \beta_{ji} \hat{a}_j) \sum_k (\alpha_{ki} \hat{a}_k + \beta_{ki}^* \hat{a}_k^\dagger) | 0_f \rangle \\ &= \sum_{jk} \beta_{ji} \beta_{ki}^* \langle 0_f | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_f \rangle \\ &= \sum_{jk} \beta_{ji} \beta_{ki}^* \langle 0_f | (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \delta_{jk}) | 0_f \rangle \\ &= \sum_j \beta_{ji} \beta_{ji}^* = \sum_j |\beta_{ji}|^2\end{aligned}$$

Σχόλιο

Για μη μηδενικό συντελεστή $|\beta_{ji}|$ έχουμε παραγωγή σωματιδίων

Ακτινοβολία Hawking

Διάγραμμα Penrose Βαρυτικής Κατάρρευσης

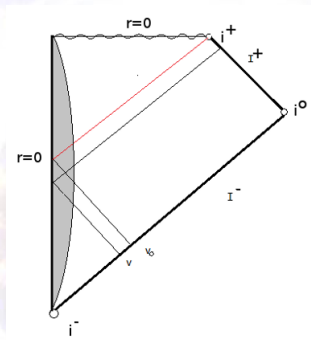


- Στον $\mathcal{I}^-(v \rightarrow -\infty)$: $f_{\omega l m} \propto e^{-i\omega v}$
- Στον $\mathcal{I}^+(u \rightarrow +\infty)$: $g_{\omega l m} \propto e^{-i\omega u}$
- v =σταθερή ingoing ray \rightarrow u =σταθερή out-going ray

$$u = g(v) \ \& \ v = g^{-1}(u) = G(u)$$

Ακτινοβολία Hawking

Μοντέλο Ακτινοβολίας



Άμαζο Πεδίο

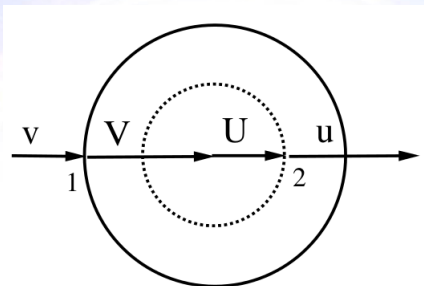
$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0$$

Φωτεινή ακτίνα

$$f_{\omega l m} \sim \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r\sqrt{4\pi\omega}} \times \begin{cases} e^{-i\omega v}, & \text{στον } I^- \\ e^{-i\omega G(u)}, & \text{στον } I^+ \end{cases}$$
$$g_{\omega l m} \sim \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r\sqrt{4\pi\omega}} \times \begin{cases} e^{-i\omega u}, & \text{στον } I^+ \\ e^{-i\omega g(v)}, & \text{στον } I^- \end{cases}$$

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος



Εσωτερική Μετρική

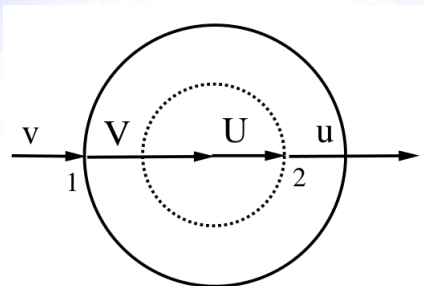
$$ds_{int}^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \& \quad \begin{aligned} V &= T + r \\ U &= T - r \end{aligned}$$

Εξωτερική Μετρική

$$ds_{ext}^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \& \quad \begin{aligned} v &= t + r^* \\ u &= t - r^* \end{aligned}$$

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος



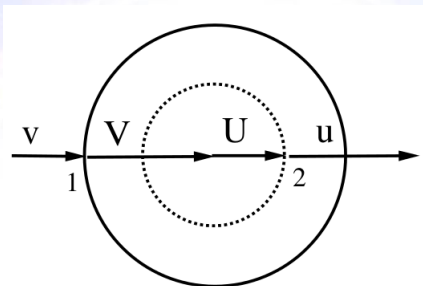
Η ιστορία της ακτίνας: $r = R(t)$

Ίδια Εσωτερική Γεωμετρία

$$1 - \left(\frac{dR}{dT}\right)^2 = \left(\frac{R - 2GM}{R}\right) \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 - \left(\frac{R - 2GM}{R}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dT}\right)^2$$

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος



Συνθήκες:

1. Η σχέση μεταξύ των v και V για εισερχόμενες ακτίνες.
2. Η σχέση μεταξύ των V και U στο κέντρο του κελυφους.
3. Η σχέση μεταξύ των U και u για εξερχόμενες ακτίνες.

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος

- Φωτοειδής Ακτίνα μπένει στο κέλυφος σε $R_1 > R_S$
- $(1 - \frac{R_S}{R_1}) = \text{σταθερό} \ \& \ \frac{dR}{dT} = \text{σταθερό}$
- $\frac{dt}{dT} = \text{σταθερό} \Rightarrow t \propto T$
- $r^* \propto r$ κοντά στην γειτονιά του R_1

Συνθήκη 1

$$V = T + r = Wt + Zr^* \Rightarrow V(v) = av + b$$

- Κέντρο κέλυφους $r = 0$

Συνθήκη 2

$$\left. \begin{array}{l} V = T + r \\ U = T - r \end{array} \right\} \Rightarrow U(V) = V$$

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος

- Η ακτίνα εξέρχεται από το κέλυφος κοντά στο $r = R_S$ στο T_0
- Κοντά στο $T \rightarrow T_0$, $R(T) = R_S + A(T_0 - T)$

Από Συνθήκη Γεωμετρίας

$$\left(\frac{dt}{dT}\right)^2 \approx \frac{R_S^2}{(T_0 - T)^2} \Rightarrow t \sim -R_S \ln\left(\frac{T_0 - T}{B}\right)$$

Επίσης

$$r^* \sim R_S \ln\left(\frac{r - R_S}{R_S}\right) \sim R_S \ln\left(\frac{A(T_0 - T)}{R_S}\right)$$

Εξωτερικά

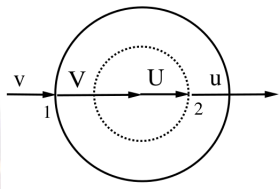
$$u = t - r^* \sim -2R_S \ln\left(\frac{T_0 - T}{B'}\right) \text{ \& } T \sim T_0 - B' e^{-\frac{u}{2R_S}}$$

Εσωτερικά

$$U = T - r = T - R(T) \sim (1 + A)T - R_S - AT_0 \sim (1 + A)T$$

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος



Συνθήκη 1

$$V(v) = av + b$$

Συνθήκη 2

$$U(V) = V$$

Συνθήκη 3

$$U \sim -K' e^{-\frac{u}{2R_S}}$$

Μοντέλο λεπτού Φλοιού Φάση 1

$$v = g(u) = v_0 - K e^{-\frac{u}{2R_S}}$$

Μοντέλο λεπτού Φλοιού Φάση 2

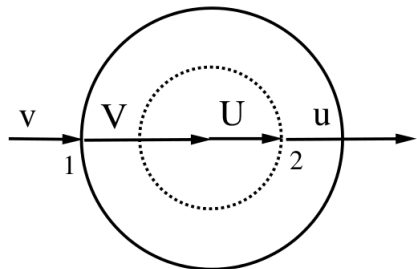
$$u = G(v) = -2R_S \ln \left(\frac{v - v_0}{K} \right)$$

Ακτινοβολία Hawking

Λεπτό Κέλυφος

Γενίκευση Πολλών Φλοιών

Γραμμική αναλογία συντεταγμένων για όλους τους εσωτερικούς Φλοιούς εκτός λογαριθμικής αναλογίας τελευταίας εξαγωγής ακτίνας



Συνθήκη 1

$$V(v) = av + b$$

Συνθήκη 2

$$U(V) = V$$

Συνθήκη 3

$$U \sim -K'e^{-\frac{u}{2R_S}}$$

Φάσεις Μοντέλο λεπτού Φλοιού

$$g(u) = v_0 - Ke^{-\frac{u}{2R_S}} \quad \& \quad G(v) = -2R_S \ln \left(\frac{v - v_0}{K} \right)$$

Ακτινοβολία Hawking

Υπολογισμός Συντελεστών Bogoliubov

Εξερχόμενα modes

$$g_{\omega lm} \sim \begin{cases} e^{2R_S i\omega \ln[(v_0-v)/K]} & , v < v_0 \\ 0 & , v > v_0 \end{cases}$$

Ανάπτυξη Fourier

$$g_{\omega lm} = \int_0^{+\infty} d\omega' (\alpha_{\omega'\omega lm}^* f_{\omega' lm} - \beta_{\omega'\omega lm} f_{\omega' lm}^*)$$

Συντελεστές Bogoliubov

$$\alpha_{\omega'\omega lm}^* = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\omega'v} e^{2R_S i\omega \ln[(v_0-v)/K]}$$
$$\beta_{\omega'\omega lm} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{-i\omega'v} e^{2R_S i\omega \ln[(v_0-v)/K]}$$

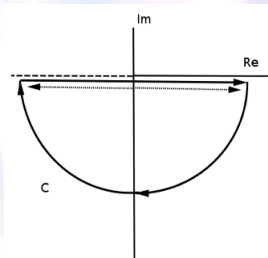
Ακτινοβολία Hawking

Υπολογισμός Συντελεστών Bogoliubov

Αλλάγή μεταβλητής $v' = v_0 - v$

$$\alpha_{\omega'\omega lm}^* = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^{+\infty} dv' e^{-i\omega' v'} e^{2R_S i\omega \ln[v'/K]}$$

$$\beta_{\omega'\omega lm} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^{+\infty} dv' e^{i\omega' v'} e^{2R_S i\omega \ln[v'/K]}$$



Θεώρημα Cauchy

$$\oint_C dv' e^{-i\omega' v'} e^{2R_S i\omega \ln[v'/K]} = 0$$

Υπολογισμός Ολοκληρώματος

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dv' e^{-i\omega' v'} e^{2R_S i\omega \ln[v'/K]} &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dv' e^{i\omega' v'} e^{2R_S i\omega \ln[-v'/K - i\epsilon]} \\ &= -e^{2\pi R_S \omega} \int_0^{+\infty} dv' e^{i\omega' v'} e^{2R_S i\omega \ln[v'/K]} \end{aligned}$$

Ακτινοβολία Hawking

Υπολογισμός Συντελεστών Bogoliubov

Αναλογία Συντελεστών Bogoliubov

$$|\alpha_{\omega'\omega lm}| = e^{2\pi R_S \omega} |\beta_{\omega'\omega lm}|$$

Επομένως η συνθήκη των συντελεστών Bogoliubov γίνεται:

Συνθήκη Ορθοκανονικότητας Συντελεστών Bogoliubov

$$\sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega'\omega lm}|^2 - |\beta_{\omega'\omega lm}|^2) = \sum_{\omega'} (e^{4\pi R_S \omega} - 1) |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1$$

Μέσος Αριθμός σωματιδίων

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{4\pi R_S \omega} - 1}$$

Ακτινοβολία Hawking

Υπολογισμός Συντελεστών Bogoliubov

Αναλογία Συντελεστών Bogoliubov

$$|\alpha_{\omega'\omega lm}| = e^{2\pi R_S \omega} |\beta_{\omega'\omega lm}|$$

Επομένως η συνθήκη των συντελεστών Bogoliubov γίνεται:

Συνθήκη Ορθοκανονικότητας Συντελεστών Bogoliubov

$$\sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega'\omega lm}|^2 - |\beta_{\omega'\omega lm}|^2) = \sum_{\omega'} (e^{4\pi R_S \omega} - 1) |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1$$

Μέσος Αριθμός σωματιδίων

$$\langle 0_f | \hat{n}_g | 0_f \rangle = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{4\pi R_S \omega} - 1}$$

Ακτινοβολία Hawking

Υπολογισμός Συντελεστών Bogoliubov

Αναλογία Συντελεστών Bogoliubov

$$|\alpha_{\omega'\omega lm}| = e^{2\pi R_S \omega} |\beta_{\omega'\omega lm}|$$

Επομένως η συνθήκη των συντελεστών Bogoliubov γίνεται:

Συνθήκη Ορθοκανονικότητας Συντελεστών Bogoliubov

$$\sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega'\omega lm}|^2 - |\beta_{\omega'\omega lm}|^2) = \sum_{\omega'} (e^{4\pi R_S \omega} - 1) |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1$$

Μέσος Αριθμός σωματιδίων

$$\langle 0_f | \hat{n}_g | 0_f \rangle = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{4\pi R_S \omega} - 1}$$

Θερμοκρασία Hawking

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$$

Ακτινοβολία Hawking

Υπολογισμός Συντελεστών Bogoliubov

Αναλογία Συντελεστών Bogoliubov

$$|\alpha_{\omega'\omega lm}| = e^{2\pi R_S \omega} |\beta_{\omega'\omega lm}|$$

Επομένως η συνθήκη των συντελεστών Bogoliubov γίνεται:

Συνθήκη Ορθοκανονικότητας Συντελεστών Bogoliubov

$$\sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega'\omega lm}|^2 - |\beta_{\omega'\omega lm}|^2) = \sum_{\omega'} (e^{4\pi R_S \omega} - 1) |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1$$

Μέσος Αριθμός σωματιδίων

$$\langle 0_f | \hat{n}_g | 0_f \rangle = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{4\pi R_S \omega} - 1}$$

Θερμοκρασία Hawking

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \left(\approx \frac{1.227 \times 10^{23} \text{ kg K}}{M(\text{kg})} \right)$$

Τέλος

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Τέλος

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

