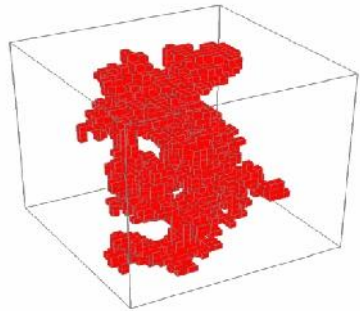


# Αριθμητικές Προσομοιώσεις του πρότυπου ISING στις Τρεις Διαστάσεις



Σχολή Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών και  
Φυσικών Επιστημών  
Εθνικό Μετσόβιο  
Πολυτεχνείο

ΚΟΡΝΑΡΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

# Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη του τρισδιάστατου μοντέλου Ising με τη χρήση προσομοιώσεων Monte Carlo και η μελέτη της συμπεριφοράς του στην κρίσιμη περιοχή.

# Βασικές έννοιες

- Η στατιστική μηχανική κυρίως επικεντρώνεται στον προσδιορισμό των ιδιοτήτων συστημάτων συμπυκνωμένης ύλης.
- Δε στοχεύουμε σε ακριβή λύση αλλά χειριζόμαστε τις πιθανότητες όταν το σύστημα να είναι σε καταστάσεις  $\mu$ - $\nu$ .
- Τα βάρη  $w_{\mu}(t)$  είναι η πιθανότητα το σύστημα να είναι στην κατάσταση  $\mu$  τη χρονική στιγμή  $t$ .
- Τα βάρη πρέπει να υπακούουν στο νόμο των πιθανοτήτων:  $\longrightarrow \sum_{\nu} w_{\nu}(t) = 1.$

# Βασικές έννοιες

- Για μία ποσότητα  $Q$  στην κατάσταση  $\mu$  τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται η εκτίμηση



$$\langle Q \rangle = \sum_{\mu} Q_{\mu} w_{\mu}(t).$$

- Η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας  $Q$  για κατάσταση ισορροπίας είναι



$$\langle Q \rangle = \sum_{\mu} Q_{\mu} p_{\mu} = \frac{1}{Z} \sum_{\mu} Q_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}},$$

- Οι πιθανότητες ακολουθούν κατανομή Boltzmann



$$p_{\mu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\mu}}$$

- Και  $Z = \sum_{\mu} e^{-E_{\mu}/kT}$  είναι η συνάρτηση επιμερισμού

# Διακυμάνσεις-Συσχετισμοί

- Κάθε παρατηρήσιμη ποσότητα  $Q$  έχει στοχαστική συμπεριφορά σύμφωνα με μια κατανομή πιθανότητας  $p(Q)$  που προκύπτει από την κατανομή Boltzmann. Μια τέτοια κατανομή χαρακτηρίζεται πλήρως από τη μέση τιμή  $Q$  και τις ροπές ανώτερης τάξης  $\langle (Q - \langle Q \rangle)^n \rangle$
- Η πιο χρήσιμη ποσότητα δίνεται για  $n=2$

$$(\Delta Q)^2 \equiv \langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2$$

# Διακυμάνσεις-Συσχετισμοί

- Η συνάρτηση συσχετισμού δυο σημείων ορίζεται

$$G_c^{(2)}(i, j) = \langle (s_i - \langle s_i \rangle)(s_j - \langle s_j \rangle) \rangle$$

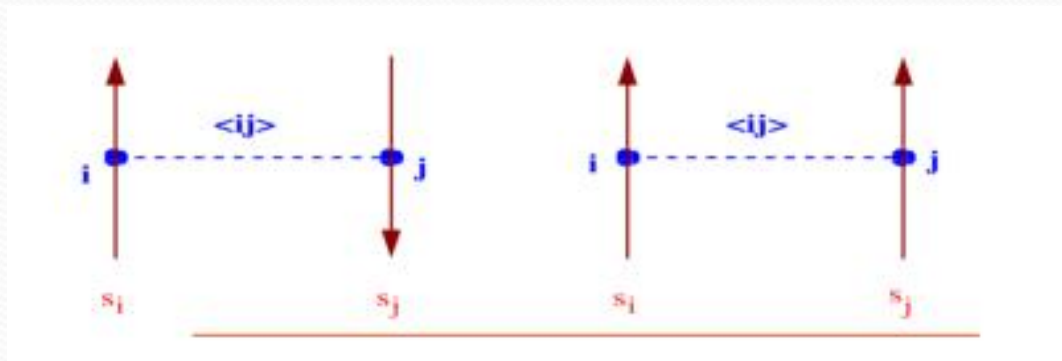
- Παίρνει μέγιστη τιμή για  $\langle (s_i - \langle s_i \rangle)^2 \rangle$
- Και πέφτει γρήγορα ασυμπτωτικά

$$G_c^{(2)}(i, j) \sim e^{-|x_{ij}|/\xi}$$

# Μοντέλο Ising

Κύρια υπόθεση: “Ο μαγνητισμός δημιουργείται από συνδυασμό μαγνητικών διπόλων ή ατόμων”

- Το μοντέλο χρησιμοποιεί ένα πλέγμα οποιασδήποτε γεωμετρίας που σε κάθε πλεγματική θέση τοποθετούνται άτομα με σπιν  $s_i$
- Στο σιδηρομαγνητικό πρότυπο Ising τα σπιν παίρνουν τιμες  $+1$  και  $-1$



# Μοντέλο Ising

- Η Χαμιλτονιανή για το μοντέλο  $\longrightarrow H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i$
- Θεωρούμε κυβικό πλέγμα με  $N$  πλεγματικές θέσεις διατεταγμένες σε κύβο πλευράς  $L$
- Η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται  $\longrightarrow$

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} \exp[\beta J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + \beta B \sum_i s_i]$$

$$Z = \sum_{s_i} e^{-\beta H}$$



# Μοντέλο Ising

- Η πιο σημαντική ποσότητα είναι η μέση μαγνήτιση  $\langle M \rangle$
- Αυτό κυρίως, γιατί το σύστημα παρουσιάζει μετάβαση φάσης από μία διατεταγμένη φάση (χαμηλής θερμοκρασίας) για  $\langle M \rangle > 0$  στην άτακτη φάση (υψηλής θερμοκρασίας) όπου η μαγνήτιση χάνεται  $\langle M \rangle = 0$  στην κρίσιμη θερμοκρασία  $\beta_c$
- Η μέση μαγνήτιση υπολογίζεται:

$$\longrightarrow \langle M \rangle = \left\langle \sum_i s_i \right\rangle$$

# Μοντέλο Ising

- Η μέση ενέργεια:

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\mu} E_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}}$$

- Αλλά σημαντικές ποσότητες, είναι η μέση μαγνητική επιδεκτικότητα και η ειδική θερμότητα, που σχετίζονται με τη μέση μαγνήτιση ανά σπιν.

$$\begin{aligned} \chi &= \beta N (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2) \\ c &= \frac{\beta^2}{N} (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) \end{aligned}$$

# Μοντέλο Ising

- Για το μοντέλο Ising στην κρίσιμη θερμοκρασία το μήκος συσχετισμού  $\xi$  τείνει στο άπειρο και συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά σαν

$$\xi \sim |t|^{-\nu}$$

με  $t$  μια αδιάστατη παράμετρο που ονομάζεται μειωμένη θερμοκρασία και μετράει πόσο μακριά βρισκόμαστε από την κρίσιμη.

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \equiv \frac{\beta - \beta_c}{\beta_c}$$

# Μοντέλο Ising

- Η συνάρτηση συσχετισμού συμπεριφέρεται σύμφωνα

με την



$$G_c^{(2)}(i, j) \sim \frac{1}{|x_{ij}|^\eta}$$

- Παρόμοια συμπεριφορά βάρθμισης παρουσιάζουν και η ειδική θερμότητα, η μαγνήτιση και η μαγνητική επιδεκτικότητα σύμφωνα με τις σχέσεις:



$$\chi \sim |t|^{-\gamma}$$

$$M \sim |t|^\beta$$

$$c \sim |t|^{-\alpha}$$

- Οι εκθέτες των σχέσεων λέγονται κρίσιμοι εκθέτες και παρουσιάζουν την ιδιότητα της παγκοσμιότητας

# Βασικές αρχές προσομοιώσεων M.C.

- Για την επίλυση ενός συστήματος σαν το Ising χρησιμοποιούμε M.C.
- Προσομοίωση τυχαίων θερμικών διαταραχών για μετάβαση από μια κατάσταση σε μία άλλη.
- Για την εκτίμηση της ποσότητας  $Q$  ενός συστήματος χρησιμοποιούν  $M$  καταστάσεις:

$$\longrightarrow Q_M = \frac{\sum_{i=1}^M Q_{\mu_i} P_{\mu_i}^{-1} e^{-\beta E_{\mu_i}}}{\sum_{i=1}^M P_{\mu_i}^{-1} e^{-\beta E_{\mu_i}}}$$

- Αν επιλεγούν οι πιθανότητες ίσες:

$$\longrightarrow Q_M = \frac{\sum_{i=1}^M Q_{\mu_i} e^{-\beta E_{\mu_i}}}{\sum_{i=1}^M e^{-\beta E_{\mu_i}}}$$

# Monte Carlo προσομοιώσεις

- Ανάγκη για important-sampling
- Για ένα κυβικό πλέγμα  $6 \times 6 \times 6$   
→  $10^{65}$  καταστάσεις
- Ένας τυπικός αριθμητικός υπολογισμός μπορεί μέχρι  $10^8$
- Χρησιμοποιούμε την πιθανότητα  $P_\mu$  να επιλεγεί μια κατάσταση  $\mu$
- Και η εκτίμηση για την  $Q$

$$\rightarrow P_\mu = p_\mu = \frac{e^{-\beta E_\mu}}{Z}$$

$$\rightarrow Q_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Q_{\mu_i}$$

# Αλυσίδες Μαρκόβ και δομή των Μόντε Κάρλο

- Για τη δημιουργία τέτοιων καταστάσεων χρησιμοποιούνται διαδικασίες Μαρκόβ.
- Δημιουργία κατάστασης  $\nu$  από  $\mu$  διαφορετική κάθε φορά με πιθανότητα μετάβασης  $\longrightarrow (P(\mu \rightarrow \nu))$
- Σε κατάσταση ισορροπίας ικανοποιείται:

$$\longrightarrow \sum_{\nu} p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = \sum_{\mu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu)$$

# Αλυσίδες Μαρκόβ και δομή των Μόντε Κάρλο

- Για την κατανομή της κανονικής συλλογής τότε:

$$\longrightarrow \frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{p_\nu}{p_\mu} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}$$

- Λύσεις επιλέγονται ανάλογα με την αποδοτικότητά τους:

$$P(\mu \rightarrow \nu) = A e^{-\frac{1}{2}\beta(E_\nu - E_\mu)}$$

$$\longrightarrow P(\mu \rightarrow \nu) = A \frac{e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}}{1 + e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}}$$

$$P(\mu \rightarrow \nu) = A \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & (E_\nu - E_\mu) > 0 \\ 1 & (E_\nu - E_\mu) \leq 0 \end{cases}$$



# Αλυσίδες Μαρκόβ και δομή των Μόντε Κάρλο


- Στις λύσεις οι σταθερές  $A$  επιλέγονται ώστε

$$\rightarrow \sum_{\nu \neq \mu} P(\mu \rightarrow \nu) < 1$$

- Οι πιθανότητες μετάβασης σπάνε σε 2 κομμάτια

$$\rightarrow P(\mu \rightarrow \nu) = g(\mu \rightarrow \nu) A(\mu \rightarrow \nu)$$

- Πιθανότητα επιλογής
- Λόγος αποδοχής
- Εύρεση αλγορίθμου με  $A=1$

- 
- Single spin-flip algorithm (Metropolis)
  - Cluster flip-algorithm (Wolff)

# Metropolis Αλγόριθμος

- Ενδιαφερόμαστε για μεταβάσεις σε ενέργειες που δε διαφέρουν πολύ
- Αλλάζοντας 1 μόνο σπιν μιας κατάστασης, δημιουργούμε μία νέα που διαφέρει κατά ενέργεια  $12J$
- Η κάθε πιθανότητα επιλογής παίρνει την τιμή:

$$\longrightarrow g(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{N}$$

- Και η συνθήκη ισορροπίας:

$$\longrightarrow \frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu)}{g(\nu \rightarrow \mu)A(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{A(\mu \rightarrow \nu)}{A(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}$$

# Metropolis Αλγόριθμος

- Επιλέγουμε από τις λύσεις για τον λόγο αποδοχής:

$$\longrightarrow A(\mu \rightarrow \nu) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\beta(E_\nu - E_\mu)}$$

- Ο αποδοτικότερος αλγόριθμος (Metropolis)

$$\longrightarrow A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & \text{αν } E_\nu - E_\mu > 0 \\ 1 & \text{αλλιως} \end{cases}$$

# Wolff Αλγόριθμος

- Επιλογή ενός σπιν –γεννήτορα και κτίσιμο cluster γύρω από αυτό
- Προσθήκη μελών στο cluster με πιθανότητα  $P_{add}$
- Η περιοχή που μας ενδιαφέρει είναι το σύνορο του cluster
- Για  $m$  σπιν που μπορούν να ενσωματωθούν και  $n$  που δεν μπορούν

$$\rightarrow (1 - P_{add})^{m-n} \frac{A(\mu \rightarrow \nu)}{A(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-2\beta(\mu - \nu)}$$

# Wolff Αλγόριθμος

- Η ενέργεια εξαρτάται από τους δεσμούς που δημιουργούνται ή καταστρέφονται στο σύνορο:

$$\longrightarrow E_\nu - E_\mu = 2J(m - n)$$

- Άρα επιλέγοντας  $P_{add} = 1 - e^{-2\beta J}$  ο λόγος αποδοχής γίνεται **1**

# Επιλογή Wolff

- Χρειαζόμαστε στατιστικά ανεξάρτητα δείγματα
- Ο Metropolis δημιουργεί ισχυρά συσχετισμένες νέες καταστάσεις
- Συνάρτηση αυτοσυσχετισμού μιας ποσότητας:

$$\longrightarrow \rho_Q(t) = \frac{\langle (Q(t') - \langle Q \rangle)(Q(t' + t) - \langle Q \rangle) \rangle_{t'}}{\langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \rangle}$$

- Μειώνεται ασυμπτωτικά με εκθετικό τρόπο:  $\longrightarrow \rho_Q(t) \sim e^{\frac{-t}{\tau_Q}}$
- Στην κρίσιμη περιοχή ο χρόνος αυτοσυσχετισμού μεγαλώνει και παρουσιάζει βράθμιση

$$\longrightarrow \tau \sim L^z$$

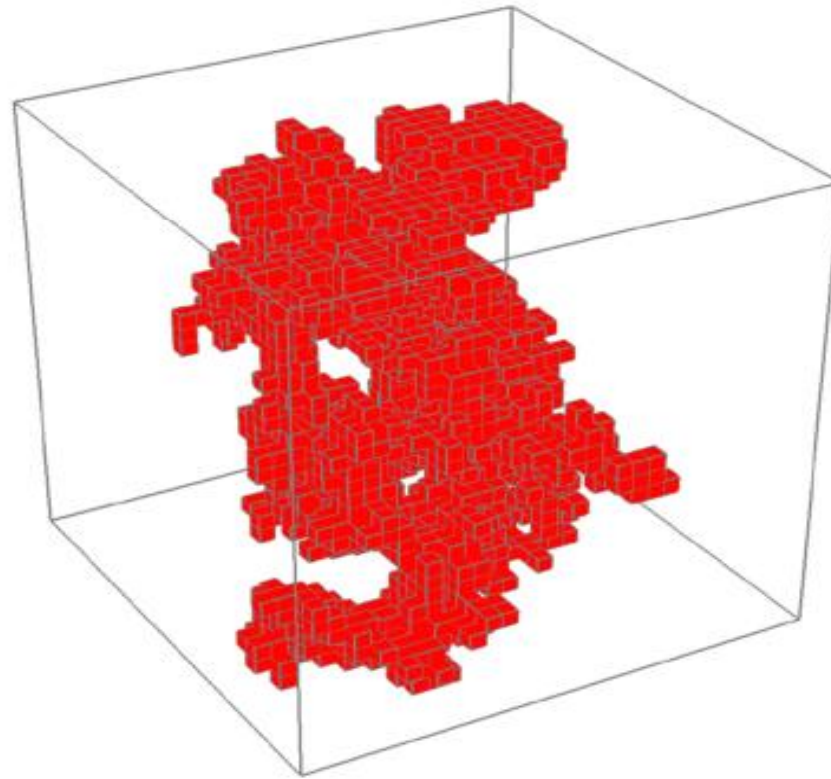
# Επιλογή Wolff

- Στην κρίσιμη περιοχή για Wolff βήματα, ο χρόνος αυτοσυσχετισμού είναι πολύ μικρότερος.
- Αυτό συμβαίνει γιατί φτιάχνει μεγάλα cluster, με αποτέλεσμα μεγάλα cluster να δημιουργούνται και να καταστρέφονται ανάλογα με το μέγεθος τους.



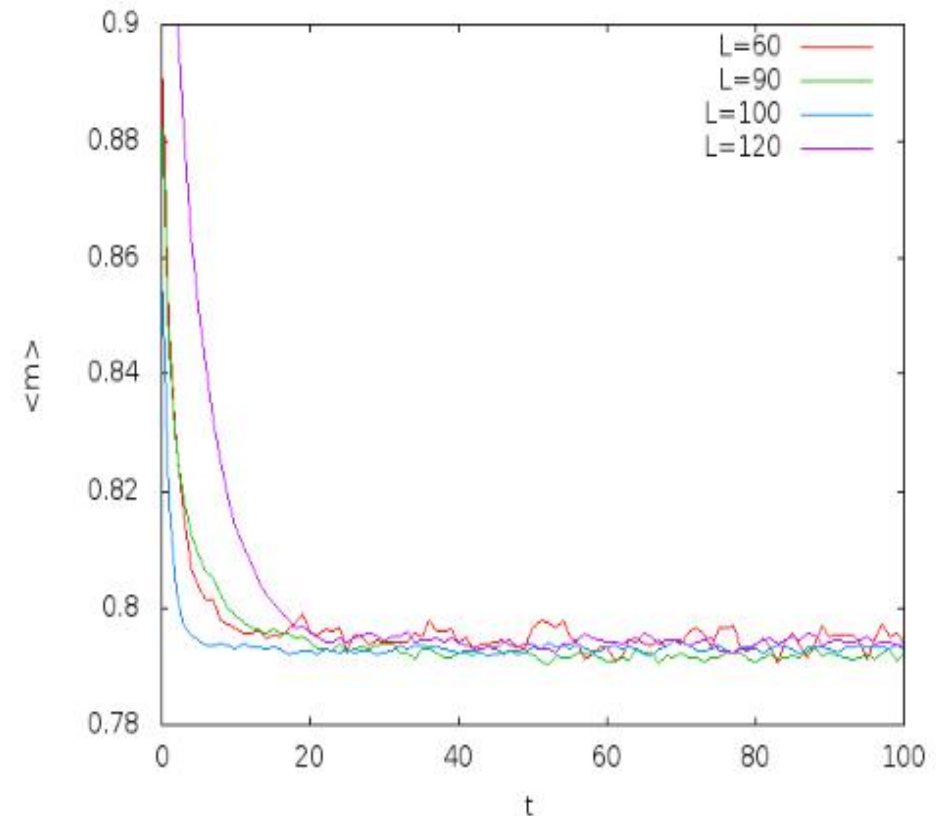
# Επιλογή Wolff

- Ένα τυπικό Cluster Wolff που δημιουργείται στην κρίσιμη περιοχή για  $L = 32$



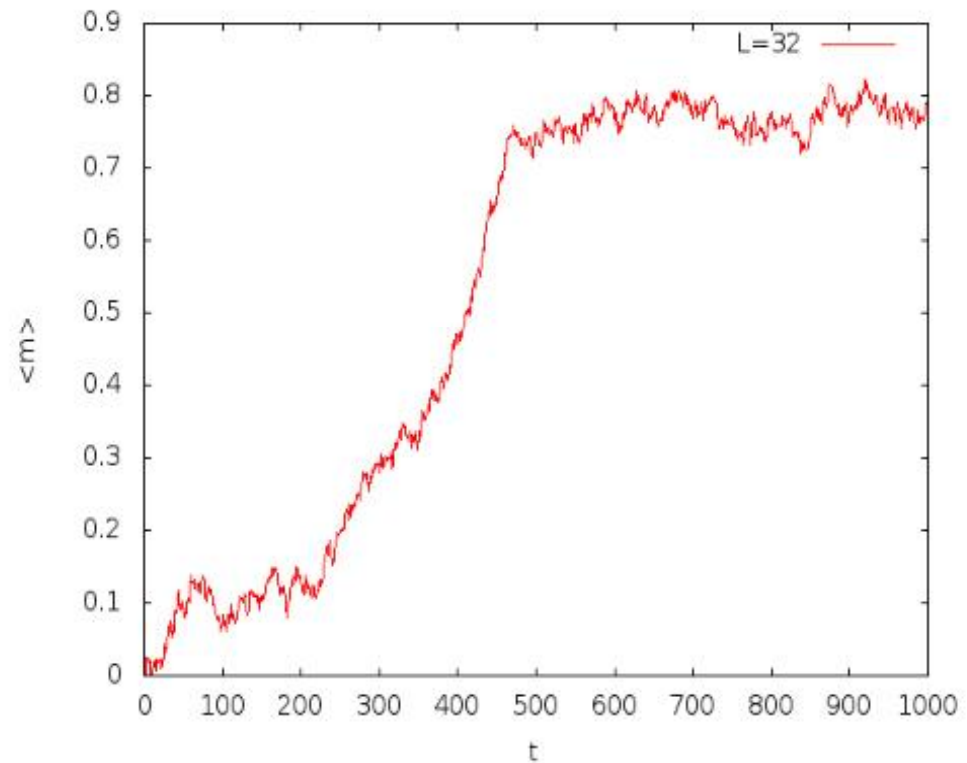
# Θερμική ισορροπία

- Ενδιαφερόμαστε για το σύστημά μας σε ισορροπία
- Αλλαγή αρχικών συνθηκών και μεγέθους του συστήματος



# Θερμική ισορροπία

- Αρχική κατάσταση για υψηλή θερμοκρασία



# Μια πρώτη προσέγγιση της $\beta_c$

- Έχοντας κατασκευάσει  $N_c$  cluster με  $n_i$  μέλη το καθένα και  $S_i$  σπιν
- Η μαγνήτιση και η μέση μαγνήτιση και η μέση μαγνήτιση ανά σπιν

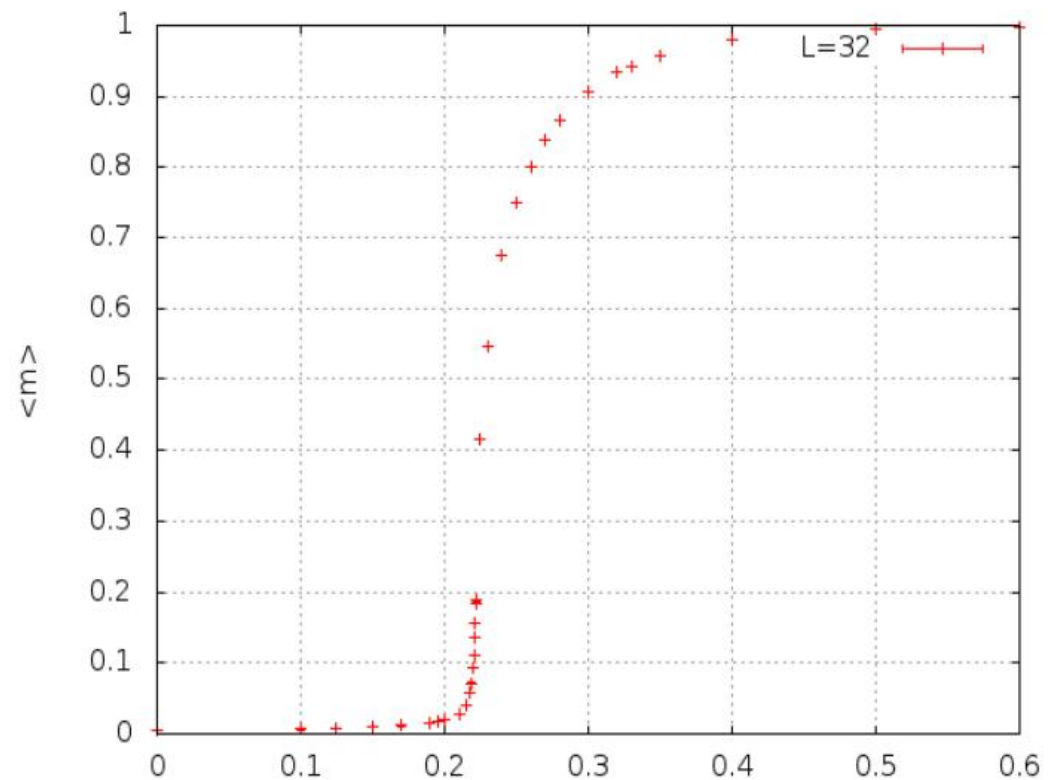
$$M = \sum_{i=1}^{N_c} S_i n_i$$

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_i n_i^2 \right\rangle$$

$$\langle M^2 \rangle = \left\langle \sum_i S_i n_i \sum_j S_j n_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i \neq j} S_i S_j n_i n_j \right\rangle + \left\langle \sum_i S_i^2 n_i^2 \right\rangle$$

# Μια πρώτη προσέγγιση της $\beta_c$

- Αναμένουμε μια απότομη αλλαγή φάσης για  $\beta = \beta_c$  περίπου για την τιμή  $0.221654$
- Για θερμοκρασίες μικρότερες εκείνης της αλλαγής φάσης  $\beta > \beta_c$  όλο και περισσότερα σπιν προσανατολίζονται στην ίδια διεύθυνση



# Μέθοδοι υπολογισμού

- Στο μοντέλο Ising όταν η  $\beta$  πλησιάζει την  $\beta_c$  παρουσιάζονται φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους και οι διακυμάνσεις  $\chi, c$  παρουσιάζουν μέγιστο σε μία ψευδοκρίσιμη θερμοκρασία  $\beta_c(L)$
- για το μοντέλο μας

$$\xi \sim |t|^{-\nu}$$

$$\langle m \rangle \sim |t|^\beta$$

$$c \sim |t|^{-\alpha}$$

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}$$

$$t \equiv \frac{\beta_c - \beta}{\beta_c} \rightarrow 0$$

# Μέθοδοι υπολογισμού

- Για  $\beta \rightarrow \beta_c$

$$\xi(t, L) \sim L$$

- Άρα

$$|t| \sim L^{-1/\nu}$$

- Και οι κρίσιμοι εκθέτες παρουσιάζουν βάθμιση σύμφωνα:

$$c \sim L^{\alpha/\nu}$$

$$m \sim L^{-\beta/\nu}$$

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu}$$

# Finite size scaling - με κατάρρευση

- Υπολογισμός της κρίσιμης θερμοκρασίας και των κρίσιμων εκθετών  $\nu$ ,  $\gamma$  ταυτόχρονα
- Θέλουμε σχέση βάρθμισης για τις διακυμάνσεις κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία
- Για  $F(x)$  συνάρτηση βάρθμισης και ορίζοντας την αδιάστατη μεταβλητή



$$x = L^{1/\nu} t$$

- Η βάρθμιση της μαγνητικής επιδεκτικότητας:

→  $\chi = L^{\gamma/\nu} F_\chi(x) = L^{\gamma/\nu} F_\chi(L^{1/\nu} t)$



# Finite size scaling-με κατάρρευση

- Όταν  $x \rightarrow 0$

$$\chi = L^{\gamma/\nu} F_\chi(x) \sim L^{\gamma/\nu}$$

- Η συνάρτηση βάθμισης λοιπόν βρίσκεται από μετρήσεις μαγνητικής επιδεκτικότητας
- Αντίστοιχες συναρτήσεις βάθμισης για τη μέση μαγνήτιση και την ειδική θερμότητα:

$$\langle m \rangle (\beta, L) = L^{-\beta/\nu} F_m(L^{1/\nu} t)$$

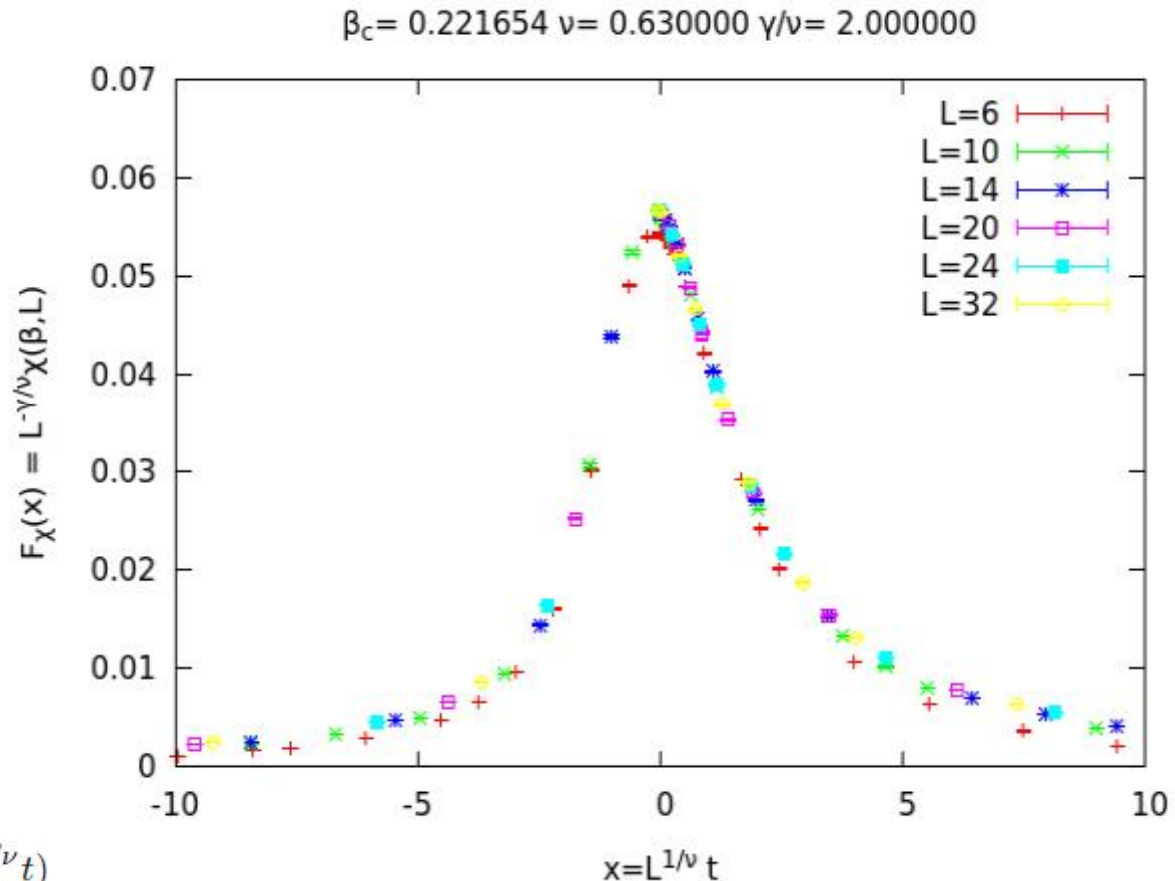
$$c(\beta, L) = L^{\alpha/\nu} F_c(L^{1/\nu} t)$$

# Finite size scaling

- Όταν ισχύουν οι σχέσεις βάθμισης τότε όλες οι μετρήσεις πέφτουν πάνω στην ίδια καμπύλη.
- Για τη μαγνητική επιδεκτικότητα πρέπει να γνωρίζουμε την  $\beta_c$ ,  $\gamma/\nu$  και  $\nu$



$$\chi = L^{\gamma/\nu} F_\chi(x) = L^{\gamma/\nu} F_\chi(L^{1/\nu} t)$$

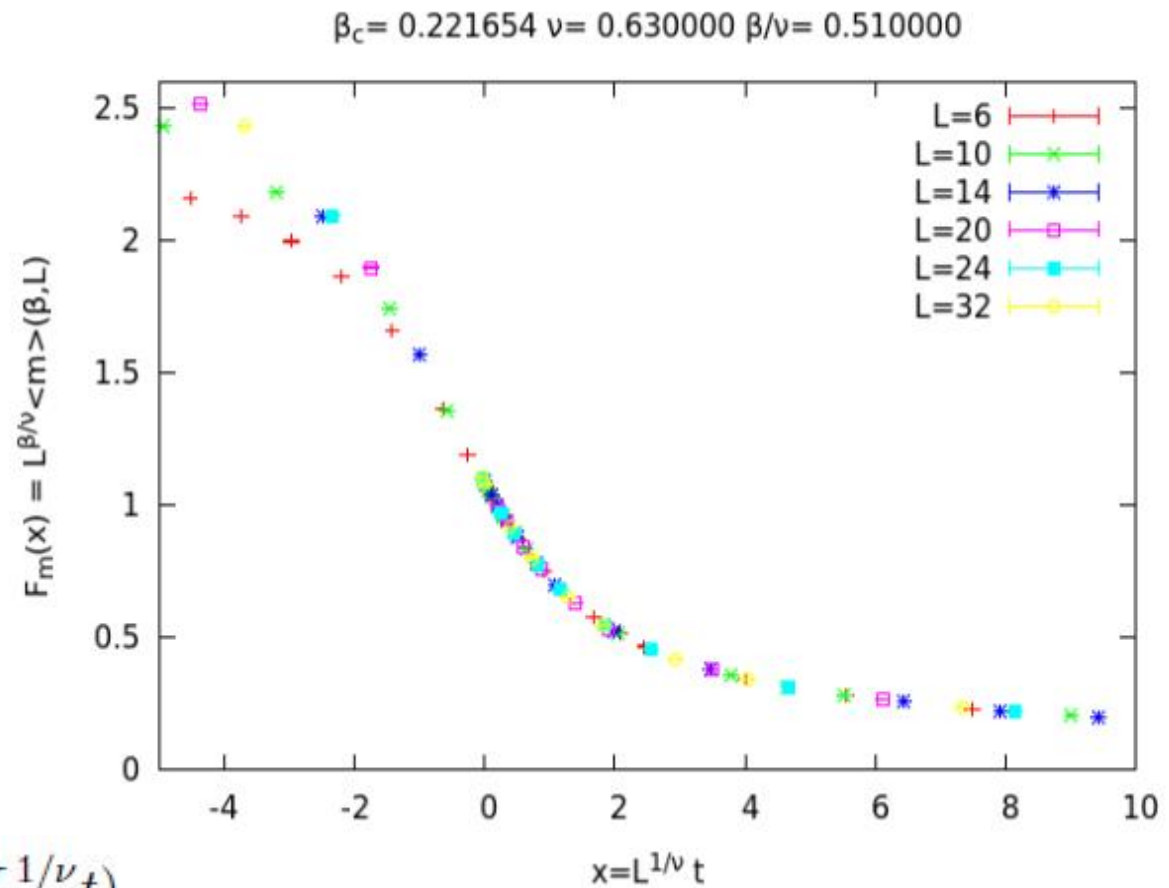


- Μικρές μεταβολές στις παραμέτρους προκαλούν απόκλιση των καμπυλών

# Finite size scaling

- Για τη  
βάθμιση της  
μέσης  
μαγνήτισης

$$\langle m \rangle (\beta, L) = L^{-\beta/\nu} F_m(L^{1/\nu} t)$$

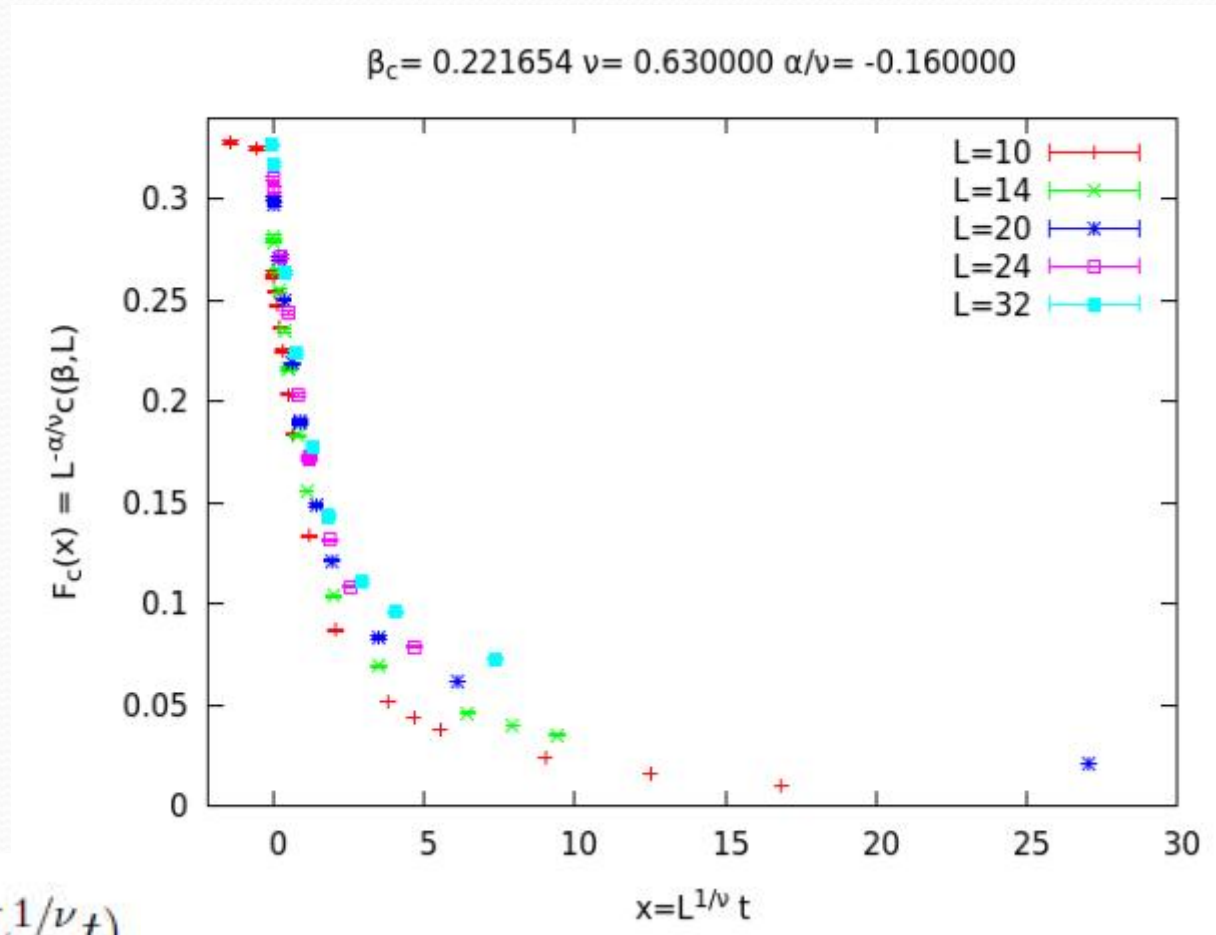


# Finite size scaling

- Βάθμιση της ειδικής θερμότητας



$$c(\beta, L) = L^{\alpha/\nu} F_c(L^{1/\nu} t)$$



# Binder Cumulant

$$U = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3 \langle m^2 \rangle^2}$$

- Την κρίσιμη θερμοκρασία μπορούμε να υπολογίσουμε και με cumulant 4<sup>ης</sup> τάξης
- Ο cumulant παίρνει μια σταθερή τιμή  $U^*$  στην κρίσιμη θερμοκρασία για συστήματα διαφορετικού μεγέθους
- Για  $\beta > \beta_c$  η τιμή του τείνει να ταυτιστεί με τη τιμή γκαουσιανής κατανομής μικρής διασποράς  $2/3$
- Από την τομή των καμπυλών  $U(\beta, L)$  στο  $(\beta_c, U^*)$  βρίσκουμε καλή εκτίμηση για την κρίσιμη θερμοκρασία

# Binder Cumulant

- Βαθμίζοντας τον Binder cumulant μπορούμε να πάρουμε μία ακόμα εκτίμηση της κρίσιμης θερμοκρασίας και του εκθέτη  $\nu$

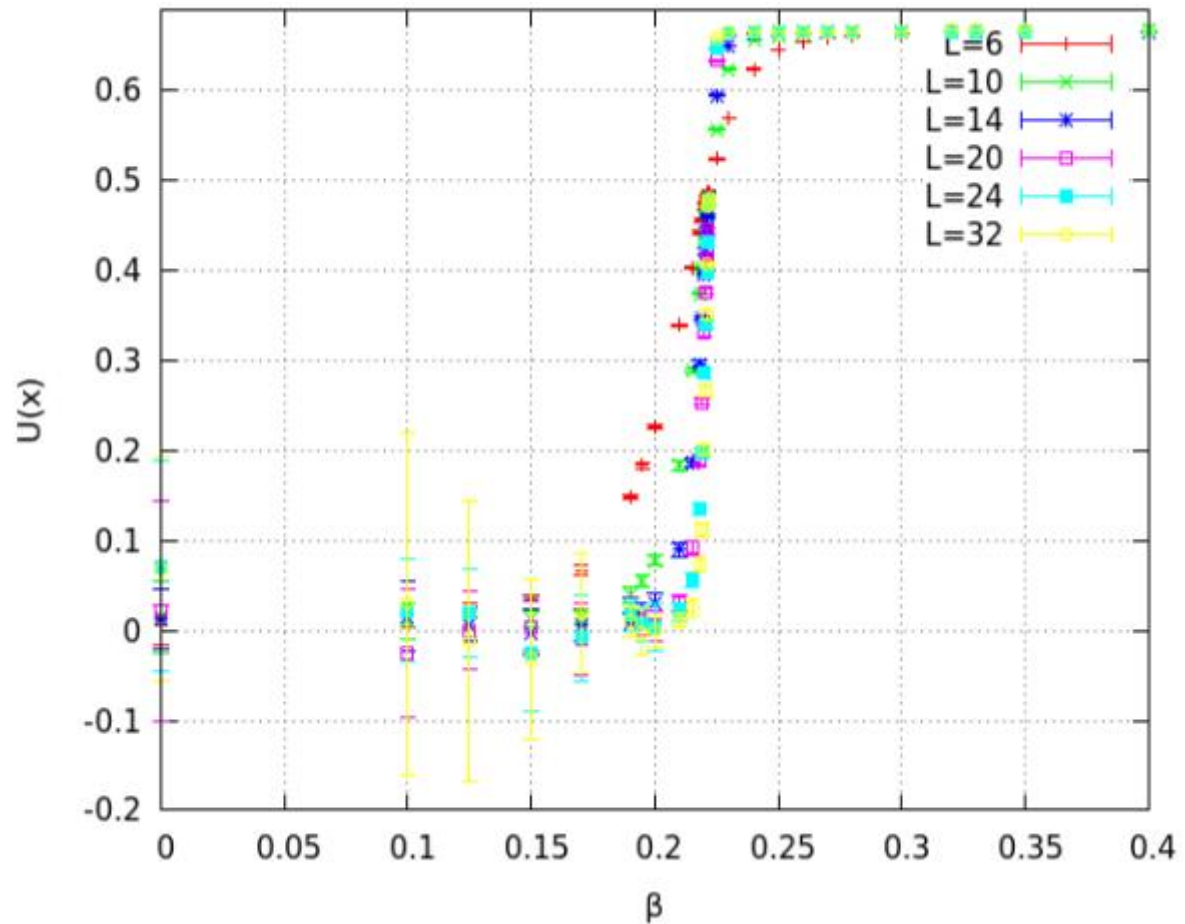
- Η συνάρτηση βάρθμισης:  $\rightarrow U = F_U(x) = F_U(L^{1/\nu}t)$

- Λόγω της σχέσης:

$$U = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3 \langle m^2 \rangle^2} \sim U_* + U_1(L^{1/\nu}t) + U_2(L^{1/\nu}t)^2 + \dots$$

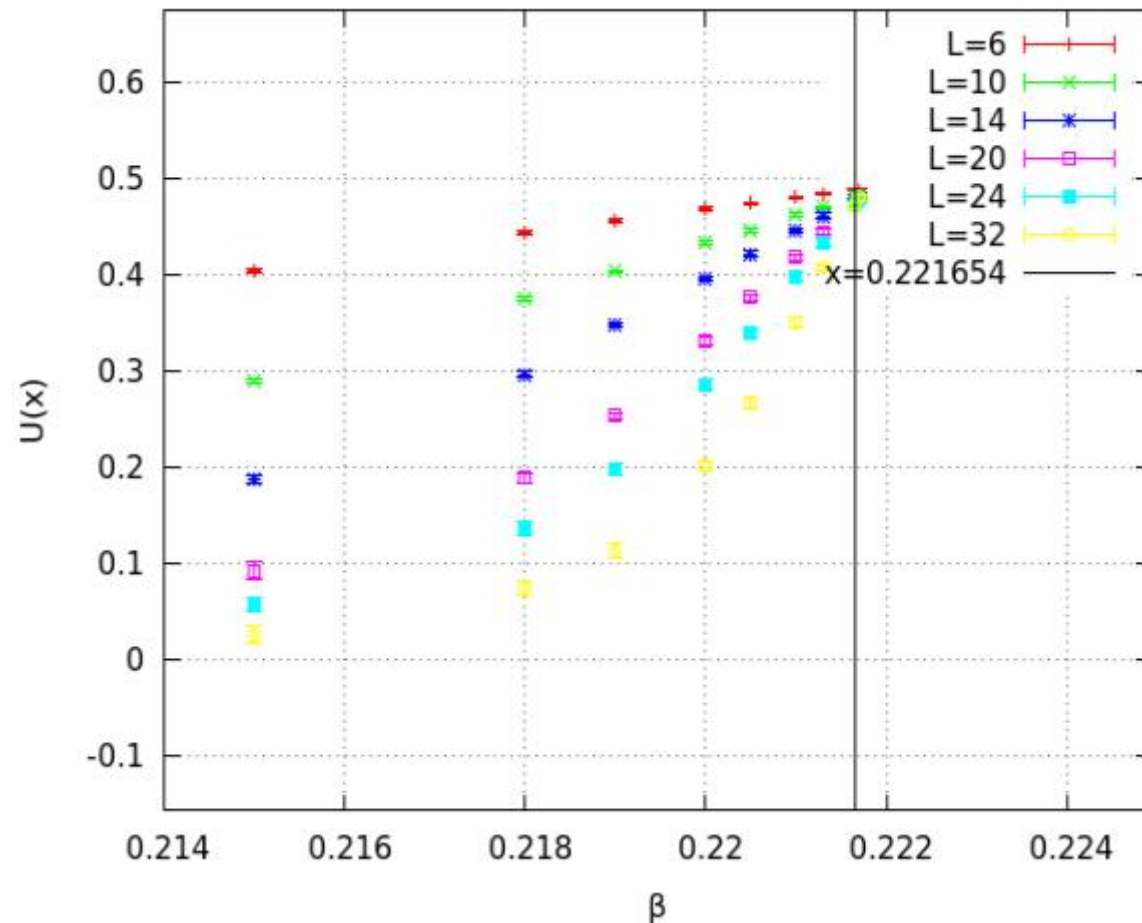
# Binder Cumulant

- Binder Cumulant για διάφορα  $L$  και θερμοκρασίες: Παρατηρούμε την περιοχή που τέμνονται οι καμπύλες



# Binder Cumulant

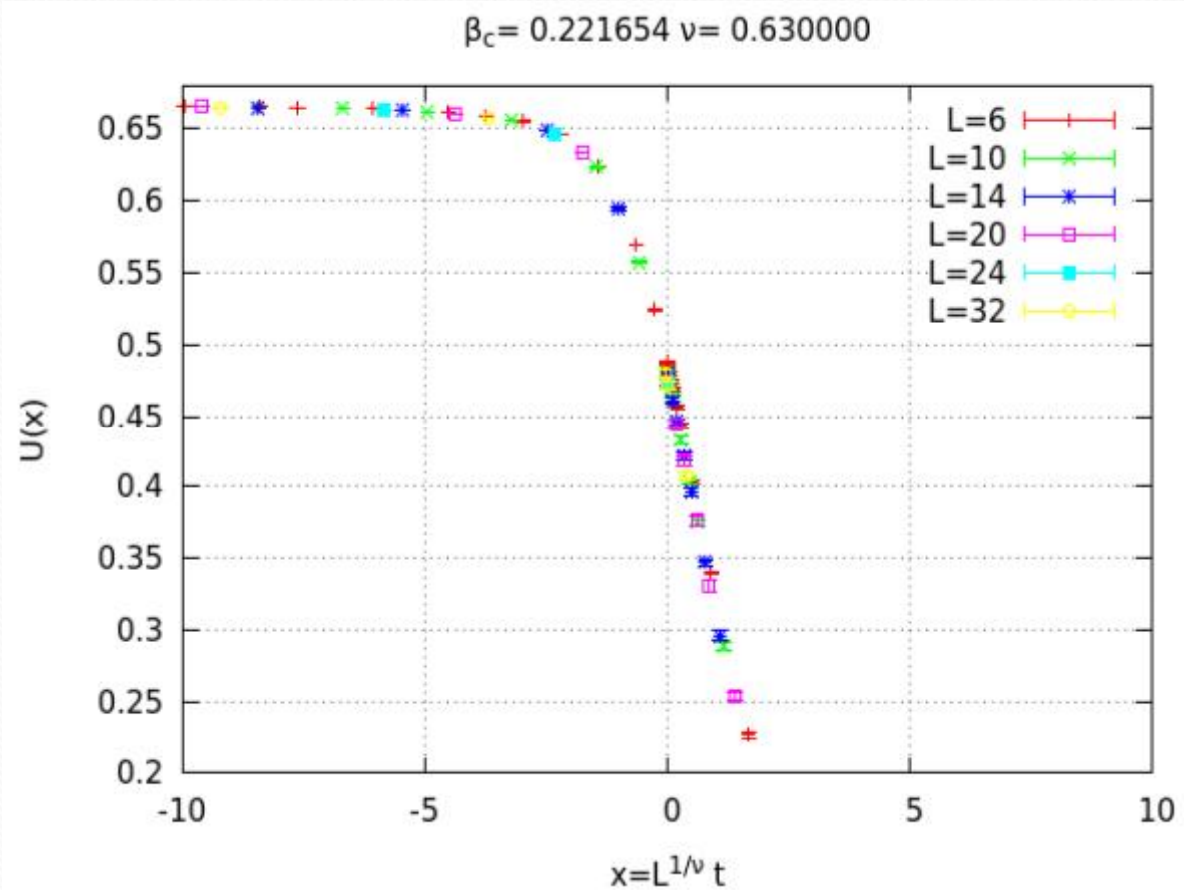
- Μεγεθύνουμε για  $\beta = \beta_c = 0.221654$  και παρατηρούμε ότι η τομή των καμπυλών είναι για αυτή την τιμή. Βρίσκουμε  $U \approx 0.5$  για αυτή τη θερμοκρασία αναμενόμενο από βιβλιογραφία Binder Cumulant για διάφορα  $L$  και θερμοκρασίες.





# Binder Cumulant

- Βάθμιση του Binder Cumulant σύμφωνα με τη βάθμιση πεπερασμένου μεγέθους για τιμές  $\nu = 0.63$  και  $\beta_c = 0.221654$
- Παρατηρούμε εξαιρετική βάθμιση για αυτές τις τιμές του κρίσιμου εκθέτη και θερμοκρασίας γύρο από το μηδέν



# Energy Cumulant

- Αντίστοιχα ορίζουμε το cumulant ενέργειας:

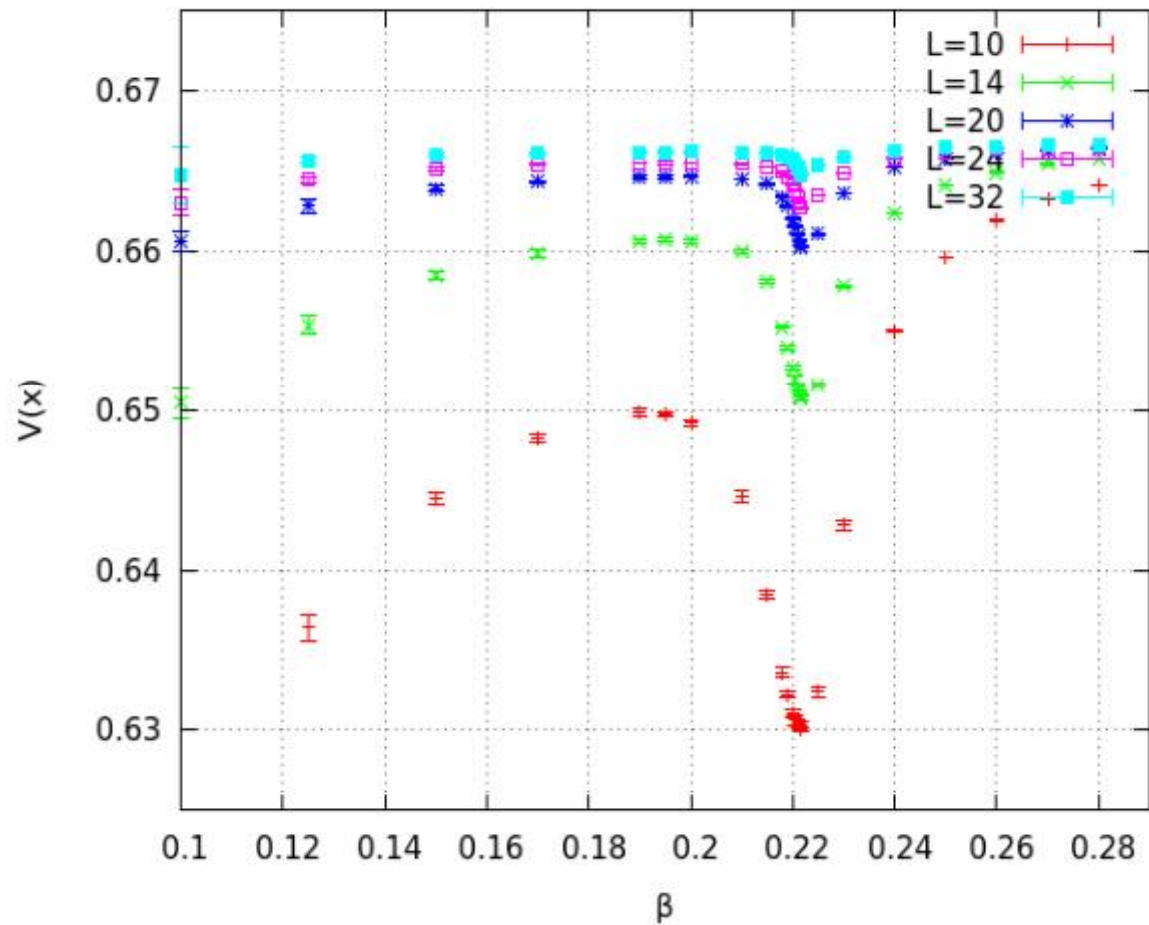
$$\rightarrow V = 1 - \frac{\langle e^4 \rangle}{3\langle e^2 \rangle^2}$$

- Τα ελάχιστα των γραφικών παραστάσεων για διάφορα  $L$  τείνουν στην κρίσιμη θερμοκρασία σαν

$$\longrightarrow L^{-1/\nu}$$

# Μέθοδοι υπολογισμού

- Όσο μεγαλώνει το σύστημα τείνει να πάρει την τιμή  $2/3$



# Υπολογισμός σφαλμάτων

- Ο υπολογισμός των σφαλμάτων που εισέρχονται στις μετρούμενες ποσότητες έγινε με τη μέθοδο Jackknife
- Για μια ποσότητα  $Q$
- Για  $n_Q = \frac{n}{2\tau_Q}$  ανεξάρτητες μετρήσεις το πραγματικό στατιστικό σφάλμα είναι

$$(\delta Q)^2 \approx \frac{1}{n_Q - 1} (\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2)$$

# Υπολογισμός σφαλμάτων

- Για  $n$  μετρήσεις τις οποίες χωρίζουμε σε “καλάθια” bins που περιέχουν  $b = n - \frac{n}{n_b}$  στοιχεία
- Και για κάθε bin τις μετράμε ως ανεξάρτητες και το σφάλμα υπολογίζεται:

$$(\delta Q)^2 = \sum_{j=0}^{n_b-1} (Q_j^b - \langle Q^b \rangle)^2 = n_b \left( \langle (Q^b)^2 \rangle - \langle Q^b \rangle^2 \right)$$

# Αποτελέσματα

Συγγραφέας	έτος	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Αναφορά
Ferrenberg	1991		0.3258	1.239(7)	[14]
Guttman	1993	0.1010(5)	0.329(9)	1.239(3)	[15]
Oitmaa	1991	0.096(6)	0.318(4)	1.25(2)	[17]
Le Guilou	1987		0.325(15)	1.2341(20)	[16]
Bhanot	1994	0.207(4)	0.308(5)		[18]

Συγγραφέας	έτος	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\nu$	Αναφορά
Kleinert	1998	0.122(9)	0.3470(4)	1.317(2)	0.6703(13)	[9]
A.Vicari	2002	0.110(1)	0.32365(3)	1.2372(5)	0.6301(4)	[19]

	Blotte	Ferrenberg-Landau	Vicari
$\beta c$	0.221654(3)	0.221659(26)	0.2216544(3)

# Αποτελέσματα

$\beta_c$	$\frac{\alpha}{\nu}$	$\frac{\beta}{\nu}$	$\frac{\gamma}{\nu}$	$\nu$
$0.221654 \pm 0.0003$	$0.16 \pm 0.05$	$0.51 \pm 0.02$	$2 \pm 0.02$	$0.63 \pm 0.03$



***ΤΕΛΟΣ***