Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

Διάρκεια: 120 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 1.5)

Α) Για την πρόσπτωση φωτός μήκους κύματος λ_2 έχουμε

$$\frac{1}{2}m_e\upsilon_{\max}^2 = eV_{c2} \to V_{c2} = \frac{1}{2}\left(0.511\mathrm{MeV/c^2}/\mathrm{e}\right)\times\left(5.2\times10^5\,\mathrm{m/s}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}0.511\times10^6\times\left(5.2\times10^5\right)^2/(3\times10^8)^2 V = 0.7676\mathrm{V}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$eV_{c2} = h\,f - \phi \to \phi = h\,f - eV_{c2} = 4.08\mathrm{eV}$$

και σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 (σελ 66) πρόκειται για Αργίλιο (Al).

Β) $eV_{c1} = \dfrac{h\,c}{\lambda_1} - \phi \to \lambda_1 = \dfrac{h\,c}{eV_{c1}+\phi} = 294\mathrm{nm}$

Γ)

$$f_0 = \phi/h = 9.86\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 1.5)

Α)Οι δυνατές τιμές της ενέργειας είναι $E_n = n^2\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

Κατά την μετάπτωση $n+1 \to n$ εκπέμπεται φωτόνιο ενέργειας

$$hf = \left((n+1)^2 - n^2\right)\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = (2n+1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Άρα $n = \dfrac{4fL^2m}{h} - \dfrac{1}{2}$.

Τότε η τελική κυματοσυνάρτηση είναι

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = A\sin\left(\left(\frac{4\pi fLm}{h} - \frac{\pi}{2L}\right)x\right) \equiv A\sin(kx),\ k \equiv \left(\frac{4\pi fLm}{h} - \frac{\pi}{2L}\right)$$

όπου Α σταθερά κανονικοποιήσεως

Η πιθανότητα να βρεθεί στο κεντρικό 1/3 του κουτιού δηλαδή $L/3$ < x < $2L/3$ είναι

$$P = \frac{\int_{L/3}^{2L/3} |\psi|^2 \, dx}{\int_0^L |\psi|^2 \, dx} = \frac{\int_{L/3}^{2L/3} \sin^2(kx) \, dx}{\int_0^L \sin^2(kx) \, dx}$$

Αλλά $\int_a^b \sin^2(kx) \, dx = \frac{b-a}{2} + \frac{\sin(2ak)}{4k} - \frac{\sin(2bk)}{4k}$

Αρα η ζητουμένη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{\frac{L}{6} + \frac{\sin\left(\frac{2kL}{3}\right)}{4k} - \frac{\sin\left(\frac{4kL}{3}\right)}{4k}}{\frac{L}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2kL}\left[\sin\left(\frac{2kL}{3}\right) - \sin\left(\frac{4kL}{3}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{kL}\cos(kL)\sin\left(\frac{kL}{3}\right)$$

Β) Για να γίνεται αυτή η μετάπτωση πρέπει ο n να είναι ακέραιος.. Άρα το L πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη $L = \frac{1}{2}\sqrt{n + \frac{1}{2}}\sqrt{\frac{h}{mf}}$

<u>Θέμα 3^ο</u> (Μονάδες: 2.0)

Α) Η κυματοσυνάρτηση ψ προσδιορίζεται από την εξίσωση του Schoedinger

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi$$

Στην περιοχή $x < -a$ η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται λόγω απειρισμού του δυναμικού.

Στην περιοχή $-a < x < 0$ έχουμε $V = 0$ και καθώς $E > 0$ η εξίσωση γράφεται

$$\psi_I'' = -k_I^2 \psi_I, \; k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

με γενική λύση

$$\psi_I = A\sin(k_I x) + B\cos(k_I x)$$

ανάλογα στην περιοχή $x > a$ με $V = V_0$ και καθώς $E < V_0$

$$\psi_{II}'' = k_{II}^2 \psi_{II}, \; k_{II} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Με γενική λύση

$$\psi_{II} = Ce^{k_{II}x} + De^{-k_{II}x}$$

όπου η απαίτηση να είναι η συνάρτηση πεπερασμένη οδηγεί σε $C = 0$

Η συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου στο σημείο $x = 0$ απαιτεί

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow B = D \qquad (3)$$

$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \Rightarrow k_I A = -k_{II} D \qquad (4)$$

Συνεπώς η κυματοσυνάρτηση έχει τη μορφή

$$\psi_I = D \times \begin{cases} 0 & , x < -a \\ -\frac{k_{II}}{k_I}\sin(k_I x) + \cos(k_I x) & , -a < x < 0 \\ e^{-k_{II} x} & , x > 0 \end{cases}$$

B) Η απαίτηση συνέχειας στο $x = -a$ δίνει

$$-\frac{k_{II}}{k_I}\sin(-k_I a) + \cos(k_I a) = 0 \rightarrow \frac{k_I}{k_{II}} = -\tan\left(k_I a\right) \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = -\tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\frac{\pi\hbar}{\sqrt{18mE}}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \rightarrow \frac{E}{V_0 - E} = 3 \rightarrow V_0 = \frac{4E}{3}$$

<u>Θέμα 4^{o}</u> (Μονάδες: 2.0)

A) Αφού το άτομο του υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση 2*p*, έχουμε $n = 2$ και $\ell = 1$. Επίσης γνωρίζουμε ότι η γωνία που σχηματίζει η στροφορμή με τον άξονα *z* είναι $\cos\vartheta = \frac{L_z}{|\mathbf{L}|} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \frac{m_\ell}{\sqrt{2}}$ με $m_\ell = 1, 0, -1$. Αφού δίνεται ότι η γωνία είναι ελάχιστη, συμπεραίνουμε ότι $m_\ell = 1$. Άρα η κυματοσυνάρτηση του ατόμου (*Z*=1) είναι (Πίνακες 7.2 και 7.3)

$$\Psi_{211}(r,\vartheta,\varphi) = \left(\frac{1}{2\alpha_0}\right)^{3/2}\frac{r}{\sqrt{3}\alpha_0}e^{-r/2\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\vartheta e^{i\varphi}$$

B) Η δυναμική ενέργεια είναι

$U(r) = -k\frac{e^2}{r}$ (σχέση 7.16), οπότε

$$\left\langle U\right\rangle = \int_0^\infty \left|R_{21}(r)\right|^2 U(r) r^2 dr = -ke^2\left(\frac{1}{2\alpha_0}\right)^3\frac{1}{3\alpha_0^2}\int_0^\infty r^3 e^{-r/a_0}dr = -\frac{ke^2}{24}\frac{1}{\alpha_0^5}\alpha_0^3\alpha_0\int_0^\infty z^3 e^{-z}dz$$

$\Rightarrow \left\langle U\right\rangle = -\frac{ke^2}{4\alpha_0}$. Αφού γνωρίζουμε ότι $\frac{ke^2}{2\alpha_0} = 13.6\,\text{eV}$, βρίσκουμε $\left\langle U\right\rangle = -6.8\,\text{eV}$.

Γ) Χωρίς μαγνητικό πεδίο οι τρεις στάθμες είναι εκφυλισμένες με $E = -\frac{ke^2}{2\alpha_0}\frac{1}{4} = -3.4\,\text{eV}$. Η ενέργεια αλληλεπίδρασης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι $\hbar\omega_L m_\ell$ (σχέση 8.7), με $\hbar\omega_L = \frac{e\hbar}{2m}B = 9.27\times10^{-24}\times1.5J = 8.68\times10^{-5}\,\text{eV}$. Άρα οι ενέργειες των καταστάσεων είναι

$$E_1 = -3.4 + 8.68\times10^{-5}\,\text{eV},\; E_0 = -3.4\,\text{eV},\; E_{-1} = -3.4 - 8.68\times10^{-5}\,\text{eV}$$

Θέμα 5ο (Μονάδες: 1.0)

Επειδή σε θερμοκρασία $T = 0$ η κατωτάτη ακατάληπτη στάθμη έχει ενέργεια $E = E_c$ και η ανώτατη κατειλημμένη έχει ενέργεια $E = E_c - E_g/10$, άρα η ενέργεια Fermi είναι $E_F = E_c - E_g/20$. Η πιθανότητα να διεγερθεί ένα ηλεκτρόνιο σε ενέργεια E είναι

$$f_{FD}(E,T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1} .$$

Οπότε για να διεγερθεί μέχρι την ενέργεια $E = E_c$ (όπου $E - E_F = E_c - E_F = E_g/20$), έχει πιθανότητα

$$f_{FD}(E_c,T) = \frac{1}{e^{E_g/20kT}+1} .$$

Ζητείται σε θερμοκρασία $T+\delta T$ αυτή να αυξηθεί κατά 10%

$$\frac{1}{e^{E_g/20k(T+\delta T)}+1} = \frac{1.1}{e^{E_g/20kT}+1} \Rightarrow \frac{E_g}{20k\left(T+\delta T\right)} = \ln\left(\frac{e^{E_g/20kT}-0.1}{1.1}\right)$$

Άρα η σχετική αύξηση της θερμοκρασίας είναι

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\frac{E_g}{20kT}}{\ln\left(\frac{e^{E_g/20kT}-0.1}{1.1}\right)} - 1$$

Θέμα 6ο (Μονάδες: 2.0)

Α) Πρόκειται για διάσπαση β. Σύμφωνα με τη σχέση (13.15) του βιβλίου των Serway-Moses ο πυρήνας Χ έχει Ζ=2 και Α=3 και από τον πίνακα του παραρτήματος Ζ διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$

Β) Ο αριθμός των πυρήνων ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ ελαττώνεται εκθετικά με τον χρόνο ως εξής: $N_H = N_{0,H}e^{-\lambda t}$, με χρόνο ημιζωής 12.3 χρόνια. Η ποσότητα του παραγομένου από την διάσπαση ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ μετά από χρόνο t ισούται με την αρχική ποσότητα του ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ μείον την αριθμό των πυρήνων ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ που δεν έχουν διασπαστεί:

$$N_{He} = N_{0,H} - N_H = N_{0,H} - N_{0,H}e^{-\lambda t} = N_{0,H}(1-e^{-\lambda t})$$

Ο λόγος του αριθμού των πυρήνων ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ προς τον αριθμό των πυρήνων ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ μετά από χρόνο t είναι:

$$\frac{N_{He}}{N_H} = \frac{N_{0,H}(1-e^{-\lambda t})}{N_{0,H}e^{-\lambda t}} = \frac{1-e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = e^{+\lambda t} - 1 .$$

Λύνουμε ως προς t και χρησιμοποιούμε την σχέση $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ και έχουμε:

$$t = \frac{\ln(1+N_{He}/N_H)}{\lambda} = T_{1/2}\frac{\ln(1+N_{He}/N_H)}{\ln 2} \Rightarrow$$

$$t = 12.3\frac{\ln(1+4.3)}{\ln 2}\,years = 30\,years$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- Για n θετικό ακέραιο και $\gamma > 0$

$$\int_{z=0}^{+\infty} dz\, e^{-\gamma z} z^n = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$$

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ