

# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2004-05

3<sup>η</sup> ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 31/1/2005

## Άσκηση 1

α) Το ηλεκτρικό πεδίο ενός επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει πλάτος  $10^{-2} V m^{-1}$ . Βρείτε (i) το μέτρο του μαγνητικού πεδίου (ii) την ενέργεια ανά μονάδα όγκου κύματος.

Το κύμα προσπίπτει σε μια επιφάνεια. Υπολογίστε την πίεση της ακτινοβολίας (iii) όταν το κύμα απορροφάται τελείως (iv) όταν το κύμα ανακλάται πλήρως από την επιφάνεια.

β) Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από τον ήλιο προσπίπτει στην επιφάνεια της γης με ρυθμό  $1.4 \times 10^3 W m^{-2}$ . Υποθέτοντας ότι αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως επίπεδο κύμα, υπολογίστε το μέτρο των πλατών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο κύμα.

γ) Η μέση ισχύς ενός ραδιοφωνικού σταθμού είναι  $10^5 W$ . Υποθέστε ότι η ισχύς εκπέμπεται ομοιόμορφα σε ένα ημισφαίριο που έχει κέντρο το σταθμό. Βρείτε το μέτρο του διανύσματος Poynting και τα πλάτη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο το οποίο απέχει 10km από την πηγή.

## Άσκηση 2

α) Σε μια τηλεόραση εμφανίζονται είδωλα (διπλή εικόνα), όταν ένα σήμα από τον πομπό φτάνει σε αυτήν από δύο διαφορετικούς δρόμους, ο ένας κατευθείαν και ο άλλος μετά από ανάκλαση σε κάποιο κτήριο. Για μια οθόνη 25 in, το είδωλο βρίσκεται περίπου 1 εκατοστό δεξιά από την κυρίως εικόνα όταν το ανακλώμενο σήμα φτάνει με καθυστέρηση 0.60 μs μετά από το κυρίως σήμα. Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η διαφορά δρόμου ανάμεσα στα δύο σήματα;

β) Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος δίνονται από τις εκφράσεις

$$\vec{E} = \hat{x}f(z - ct) + \hat{y}g(z - ct), \quad \vec{B} = \hat{x}p(z - ct) + \hat{y}h(z - ct)$$

όπου  $f, g, p, h$  τυχαίες (όχι ημιτονοειδείς) συναρτήσεις,  $\hat{x}$  και  $\hat{y}$  μοναδιαία διανύσματα και  $c$  η ταχύτητα του φωτός. Δείξτε ότι όταν δεν υπάρχουν πηγές ( $\rho = 0, \vec{J} = 0$ ) οι εξισώσεις του Maxwell οδηγούν στις συσχετίσεις  $f = ch$  και  $g = -cp$ , δηλαδή, ότι μόνο δύο συναρτήσεις από τις τέσσερις είναι ανεξάρτητες.

### Άσκηση 3

Οι εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση απουσίας πηγών δίνονται σε διαφορική μορφή από

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Δίνονται τα πεδία

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

(α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) συνεπάγονται  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ , ότι δηλαδή τα  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  είναι κάθετα στο  $\vec{k}$ .

(β) Δείξτε ότι  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  και  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{k} \times \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  και ότι οι (3) και (4) συνεπάγονται  $\vec{k} \times \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega \vec{E}$  και  $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$  αντίστοιχα.

(γ) Βρείτε το σχετικό προσανατολισμό των διανυσμάτων  $\vec{k}, \vec{E}$  και  $\vec{B}$ .

### Άσκηση 4

Στα πλαίσια μιας πρότασης για την κατασκευή ενός ηλιακού ιστιοφόρου προτείνεται αυτό να χρησιμοποιεί ένα μεγάλο πλήρως ανακλαστικό, μικρής μάζας πανί και ως προωθητικό μέσο την ορμή της ηλιακής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η μέση ολική ηλεκτρομαγνητική ισχύς που εκπέμπεται από τον ήλιο είναι  $P = 3.9 \times 10^{26} W$ . Αν το πανί είναι προσανατολισμένο κάθετα στις ακτίνες του ηλίου, τι εμβαδόν πρέπει να έχει για να προωθεί διαστημόπλοιο μάζας  $m = 1,0 \times 10^4 kg$  αντίθετα προς την βαρυτική έλξη του ηλίου; Πώς εξαρτάται η απάντηση από την απόσταση

του διαστημοπλοίου από τον ήλιο; (Μάζα ηλίου =  $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ , σταθερά παγκόσμιας έλξης =  $6,68 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{Kg}^2$ )

### Άσκηση 5

α) Η ένταση της ακτινοβολίας από επιταχυνόμενο φορτίο κινούμενο με ταχύτητα  $u \ll c$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  (ως προς τη διεύθυνση της ταχύτητας) δίνεται από τη σχέση

$$I(\theta) = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$$

Να εξαχθεί από αυτήν η σχέση

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}$$

με ολοκλήρωση σε όλες τις γωνίες.

β) Δείξτε ότι η μέση τιμή του διανύσματος Poynting ενός επιπέδου αρμονικού κύματος είναι  $\frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$  ή  $\frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$ . Συγκρίνετε με την εξίσωση (19.17) του βιβλίου.

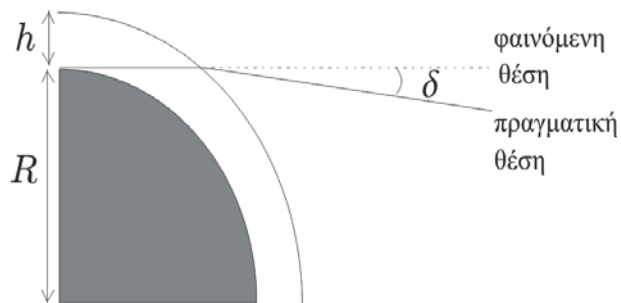
### Άσκηση 6

α) Ένα χάλκινο σύρμα ακτίνας 1mm συνδέεται με ένα άλλο χάλκινο σύρμα ακτίνας 0.8 mm. Βρείτε τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης στο σημείο επαφής για εγκάρσια μηχανικά κύματα τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του συστήματος από το πρώτο προς το δεύτερο σύρμα.

β) Δείξτε ότι η ένταση του διερχόμενου κύματος συν την ένταση του ανακλώμενου κύματος ισούται με την ένταση του προσπίπτοντος κύματος. Ποια η φυσική σημασία αυτού του αποτελέσματος;

### Άσκηση 7

Όταν ο ήλιος ανατέλλει ή δύει και φαίνεται να βρίσκεται στον ορίζοντα είναι στην πραγματικότητα κάτω από τον ορίζοντα. Η εξήγηση αυτού του φαινομένου βρίσκεται στο γεγονός ότι το φως του ηλίου κάμπτεται ελαφρά όταν μπαίνει στην ατμόσφαιρα, όπως



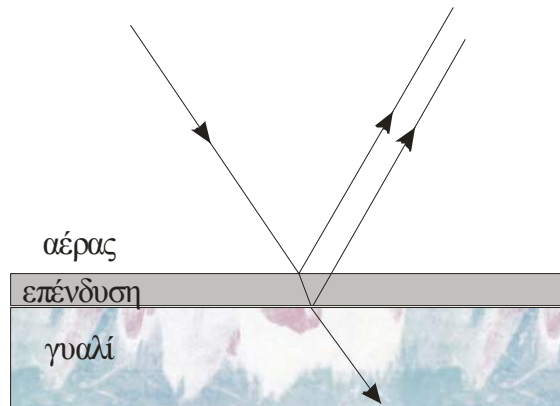
φαίνεται στο σχήμα. Καθώς η αντίληψή μας βασίζεται στην ιδέα ότι το φως διαδίδεται ευθύγραμμα, νομίζουμε ότι το φως προέρχεται από ένα σημείο το οποίο βρίσκεται σε γωνία  $\delta$  πάνω από την πραγματική θέση του ηλίου. Υποθέτοντας ότι η ατμόσφαιρα έχει ομοιόμορφη πυκνότητα, και κατά συνέπεια ενιαίο συντελεστή ανάκλασης  $n$  και ότι αυτή εκτείνεται σε ύψος  $h$  από την επιφάνεια της γης, δείξτε ότι

$$\delta = \arcsin\left(\frac{nR}{R+h}\right) - \arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

όπου  $R = 6378\text{km}$  η ακτίνα της γης. Υπολογίστε την  $\delta$  χρησιμοποιώντας  $n = 1.0003$  και  $h = 20\text{km}$ .

### Άσκηση 8

Μια γυάλινη πλάκα με δείκτη διάθλασης  $n_g$  επιχρίζεται με ένα λεπτό πλαστικό φιλμ με δείκτη διάθλασης  $n_c$ . Συμβολίζοντας το δείκτη διάθλασης του αέρα με  $n_a$ , δείξτε, ότι για κάθετη πρόσπτωση, οι συντελεστές ανάκλασης στο σύνορο μεταξύ αέρα και επιχρίσματος και μεταξύ επιχρίσματος και γυαλιού είναι ίσοι, αν  $n_c = \sqrt{n_g n_a}$ . Βρείτε το λόγο των συντελεστών ανάκλασης, όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι  $10^\circ$  και  $n_g = 1.52$



### Άσκηση 9

Μονοχρωματική ακτίνα γραμμικά πολωμένης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας πέφτει από ένα μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_1$ , πάνω σε άλλο με δείκτη διάθλασης  $n_2$  υπό γωνία  $\theta_i$  ως προς την κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Αν  $\theta_r$  είναι η γωνία διάθλασης τότε ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους  $R_r$  για τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης είναι

$$R_{\sigma} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}$$

Υπάρχει γωνία πρόσπτωσης  $\theta_i$  για την οποία η ανακλώμενη δέσμη είναι γραμμικά πολωμένη εξ ολοκλήρου παράλληλα προς το επίπεδο πρόσπτωσης;

### Άσκηση 10

α) Αν ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι γραμμικώς πολωμένο και το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία  $a_i$  με το επίπεδο πρόσπτωσης, δείξτε ότι η γωνίες ( $a_r$  και  $a_r'$ ) που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο με το ίδιο επίπεδο στο διαθλώμενο και ανακλώμενο κύμα αντίστοιχα, είναι

$$\tan a_r = \frac{T_{\sigma}}{T_{\pi}} \tan a_i$$

και

$$\tan a_r' = \frac{R_{\sigma}}{R_{\pi}} \tan a_i$$

αντίστοιχα. (Η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_i$  υπεισέρχεται μέσω των εκφράσεων  $T_{\sigma}$  και  $T_{\pi}$  .

β) Ένα επίπεδο φωτεινό κύμα γραμμικά πολωμένο στον αέρα ( $n=1$ ) προσπίπτει σε μια επιφάνεια νερού ( $n=1.33$ ) . Προσδιορίστε τα πλάτη και τις φάσεις των διαθλωμένων και ανακλωμένων κυμάτων σχετικά με αυτά του προσπίπτοντος κύματος για τις παρακάτω περιπτώσεις:

Γωνία πρόσπτωσης $\theta_i$	Γωνία μεταξύ επιπέδου πρόσπτωσης και ηλεκτρικού πεδίου
$20^{\circ}$	$0^{\circ}$
$20^{\circ}$	$90^{\circ}$
$75^{\circ}$	$0^{\circ}$
$75^{\circ}$	$90^{\circ}$

## Ερωτήσεις

1) Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα καθαρά “ηλεκτρικό κύμα” το οποίο να διαδίδεται σε κενό χώρο (δηλαδή ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που έχει μόνο ηλεκτρικό αλλά όχι μαγνητικό πεδίο); Θα μπορούσαμε επίσης να κατασκευάσουμε ένα καθαρά “μαγνητικό κύμα”;

2)(α) Ένας ψαράς κάθεται στην άκρη μιας λίμνης και σημαδεύει με μια φαρέτρα ένα ψάρι το οποίο βλέπει μέσα στο νερό. Πού πρέπει να σημαδέψει για να πετύχει το ψάρι, πιο πάνω ή πιο κάτω ή ακριβώς στο σημείο που το βλέπει; Τί πρέπει να κάνει αν αντί για φαρέτρα χρησιμοποιήσει ένα όπλο το οποίο κτυπάει το ψάρι με μια δέσμη laser;

(β) Κατά ποια γωνία πάνω από τον ορίζοντα πρέπει να βρίσκεται ο ήλιος έτσι ώστε το ηλιακό φως που ανακλάται από την επιφάνεια μιας λίμνης να είναι ολικά πολωμένο; Ποιό είναι το επίπεδο του πεδίου  $\vec{E}$  στο ανακλώμενο φως;

3) Δέσμη φωτός αφού περάσει μέσα από πρίσμα Nicol  $N_1$  διασχίζει ένα στοιχείο που περιέχει σκεδαστικό μέσο. Το στοιχείο παρατηρείται κάθετα από ένα άλλο πρίσμα Nicol,  $N_2$ . Αρχικά, τα πρίσματα Nicol είναι προσανατολισμένα ώστε η φωτεινότητα του πεδίου που βλέπει ο παρατηρητής να είναι μέγιστη. (α) Το πρίσμα  $N_2$  στρέφεται κατά  $90^\circ$ . Υπάρχει απόσβεση; (β) Το πρίσμα  $N_1$  στρέφεται τώρα κατά  $90^\circ$ . Το πεδίο μέσα από το  $N_2$  είναι φωτεινό ή σκοτεινό; (γ) Το πρίσμα  $N_2$  επαναφέρεται στην αρχική του θέση. Το πεδίο μέσα από το  $N_2$  είναι φωτεινό ή σκοτεινό;

4) Βρείτε το πάχος πλακιδίου ασβεστίτη που χρειάζεται για να προκαλέσει διαφορά φάσης ίση με (α)  $\lambda/4$ , (β)  $\lambda/2$ , (γ)  $\lambda$  μεταξύ της τακτικής και της έκτακτης ακτίνας για μήκος κύματος  $6 \times 10^{-7} \text{ m}$

5) Πόσο βαθιά εισχωρεί ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο χαλκό (την απόσταση δηλαδή στην οποία το πλάτος του ελαττώνεται στο  $1/e$  της τιμής στην επιφάνεια), αν η συχνότητα είναι (α) στην περιοχή των μικροκυμάτων  $6 \times 10^9 \text{ Hz}$  (β) στην ορατή περιοχή  $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$  και (γ) στην περιοχή των ακτίνων X  $6 \times 10^{18} \text{ Hz}$ ; Υποθέστε  $\mu \approx \mu_0$ .