26/11/2004

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2004-05

2^{η} ΕΡΓΑΣΙΑ

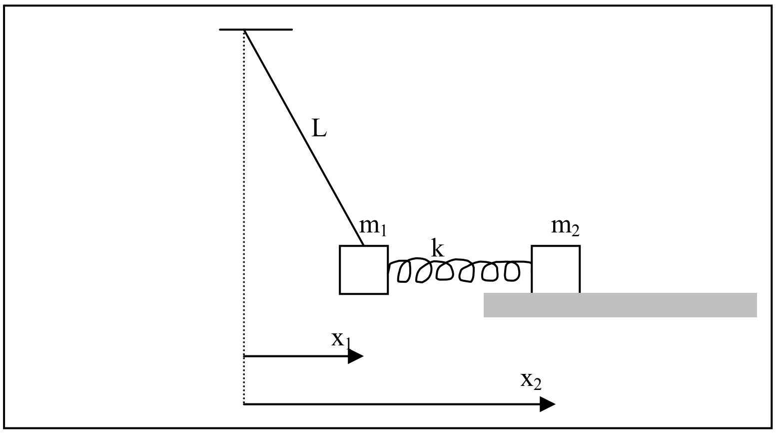
Προθεσμία παράδοσης 20/12/2004

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εκκρεμές μήκους L και μάζας m_1 εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας, έχοντας συνδεθεί μέσω ελατηρίου σταθεράς k με σώμα μάζας m_2 που μπορεί να κινείται ελευθέρα και χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο (βλέπε Σχήμα 1). Η αρχική απόσταση μεταξύ των μαζών ισούται με το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Θεωρήστε ότι η κίνηση του συστήματος γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο που περιλαμβάνει το εκκρεμές και το σώμα m_2. Έστω ότι κάποια στιγμή, η απόσταση του m_2 από τη κατακόρυφη θέση του εκκρεμούς είναι x_2, ενώ η απομάκρυνση του εκκρεμούς από την κατακόρυφη θέση είναι x_1, την ίδια στιγμή. Δίνεται ότι $m_1=m_2=m$ και ότι $k=mg/L$

α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης

β) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης

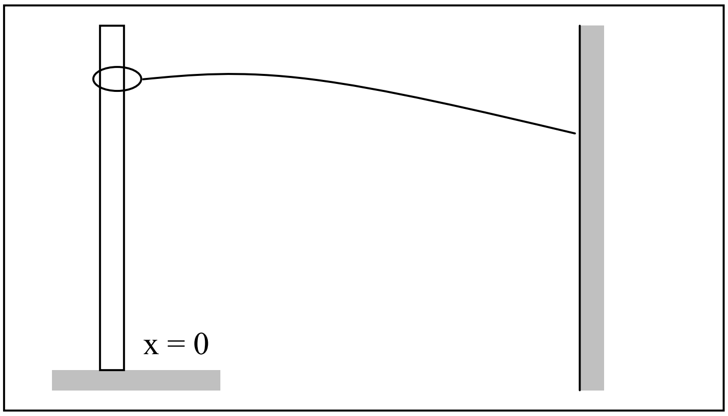


Σχήμα 1.

2) Μια ιδανική χορδή γραμμικής πυκνότητας μ είναι τεντωμένη με δύναμη T_o, έχει σταθερό άκρο x = L ενώ το άκρο στο x = 0 είναι ελεύθερο να ολισθαίνει χωρίς τριβή κατά μήκος του στυλίσκου (βλέπε Σχήμα 2).

α) Βρείτε τις συχνότητες ω_n των κανονικών τρόπων ταλάντωσης

β) Όταν ταλαντώνεται μόνο με τη συχνότητα ω_n, πόση είναι ολική ενέργεια E_n;



Σχήμα 2.

3) α) Να δείξετε ότι η εξίσωση Klein – Gordon $\nabla^2\psi(\vec{x},t) - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = m^2\psi(\vec{x},t)$,

όπου υ, m πραγματικές σταθερές, επιδέχεται σα λύσεις τις $\psi(\vec{x},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \varphi)$ αν $\omega^2 = \omega_o^2 + \upsilon^2\vec{k}^2 > \omega_o^2$

και $\psi(\vec{x},t) = Ae^{\vec{k}\cdot\vec{x}}\cos(\omega t + \varphi)$ αν $\omega^2 = \omega_o^2 - \upsilon^2\vec{k}^2 < \omega_o^2$

Δίνεται ότι A και φ είναι σταθερές και $\omega_o = m\upsilon$

4) α) Ο ασθενέστερος ήχος που μπορεί να ακουστεί έχει πλάτος πίεσης περίπου $2x10^{-5}\,Nm^{-2}$ και ο ισχυρότερος, που μπορεί να ακουστεί χωρίς πόνο, έχει πλάτος πίεσης περίπου $28Nm^{-2}$. Προσδιορίστε σε κάθε περίπτωση την ένταση του ήχου σε Wm^{-2} και σε db και το πλάτος των ταλαντώσεων, αν η συχνότητα είναι 500Hz. Υποθέστε μια πυκνότητα του αέρα ίση με $1{,}29kgm^{-3}$ και μια ταχύτητα του ήχου $345ms^{-1}$.

β) Δύο ηχητικά κύματα έχουν ακουστότητες που διαφέρουν κατά (β.1) 10db και (β.2) 20db. Βρείτε τους λόγους των εντάσεών τους και των πλατών πιέσεών τους.

γ) Εκφράστε σε db τη διαφορά ακουστότητας στις περιπτώσεις όπου αφενός η ένταση του ενός κύματος είναι διπλάσια του άλλου και αφετέρου το πλάτος της πίεσης του ενός είναι διπλάσιο από το πλάτος της πίεσης του άλλου.

5) Θεωρήστε ένα κανάλι ορθογώνιας διατομής, με βάθος 4m. Προσδιορίστε την ταχύτητα διάδοσης σε αυτό, κυμάτων με μήκη κύματος α) 1cm, β) 1m, γ) 10m, δ) 100m. Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήστε τον τύπο που ανταποκρίνεται καλύτερα στην τάξη μεγέθους των παραπάνω ποσοτήτων. Το νερό στο κανάλι έχει επιφανειακή τάση $7x10^{-2}Nm^{-1}$.

6) α)Μια ηχητική πηγή έχει συχνότητα 10^3Hz και κινείται με σχετική ταχύτητα $30ms^{-1}$ ως προς τον αέρα. Υποθέτοντας ότι η ταχύτητα του ήχου σχετικά με τον ακίνητο αέρα είναι $340ms^{-1}$, βρείτε το ενεργό μήκος κύματος και τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής ακίνητος σχετικά με τον αέρα που βλέπει την πηγή αφενός να απομακρύνεται και αφετέρου να πλησιάζει σε αυτόν.

β) Καταλήξαμε στην εξίσωση $\nu' = (1-\frac{\upsilon_o - \upsilon_s}{\upsilon})\nu = (1-\frac{\upsilon_{os}}{\upsilon})\nu$ (όπου $\upsilon_{os}=\upsilon_o-\upsilon_s$) για το φαινόμενο Doppler, υποθέτοντας ότι το μέσο με το οποίο διαδίδονται τα κύματα παραμένει ακίνητο. Δείξτε ότι αν το μέσο έχει ταχύτητα υ_m κατά μήκος της γραμμής που ενώνει την πηγή και τον παρατηρητή, η εξίσωση γίνεται $\nu' = \nu (\upsilon - \upsilon_o + \upsilon_m)/(\upsilon - \upsilon_s + \upsilon_m)$.

7) α) Δύο διαμήκη κύματα ίσου πλάτους, ταχύτητας και συχνότητας αλλά με διαφορά φάσης π/4 διαδίδονται κατά την ίδια φορά σε ένα ελατήριο. Προσθέστε τα δυο κύματα και δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι ένα τρέχον κύμα της ίδιας ταχύτητας και συχνότητας.

β) Δυο κύματα του ίδιου πλάτους και ταχύτητας αλλά διαφορετικών συχνοτήτων, ίσων με 1000Hz και 1010Hz αντίστοιχα, διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα 10m/s. Γράψτε εξισώσεις για κάθε κύμα χωριστά και για το άθροισμα τους. Σχεδιάστε τη μορφή του συνιστάμενου κύματος.

8) α) Μπορεί να δειχθεί ότι ένα σφαιρικό ισοτροπικό κύμα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial r^2}$. Επαληθεύστε ότι η λύση αυτής της εξίσωσης είναι $\xi=(1/r)f(r\pm\upsilon t)$.

β) Υποθέτουμε ένα πεδίο ξ, που έχει εξίσωση διάδοσης $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4}$, όπου α είναι μια ορισμένη σταθερά.

β.1) Επιδέχεται μια έκφραση της μορφής $\xi=\xi_o \sin k(x\pm \upsilon t)$ σα λύση; Αν ναι ποια είναι η τιμή της υ;

β.2) Επιδέχεται μια έκφραση της μορφής $\xi=f(x\pm \upsilon t)$ σα λύση;

β.3) Από τα προηγούμενα αποτελέσματα συμπεραίνετε ότι αυτό το πεδίο διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση;

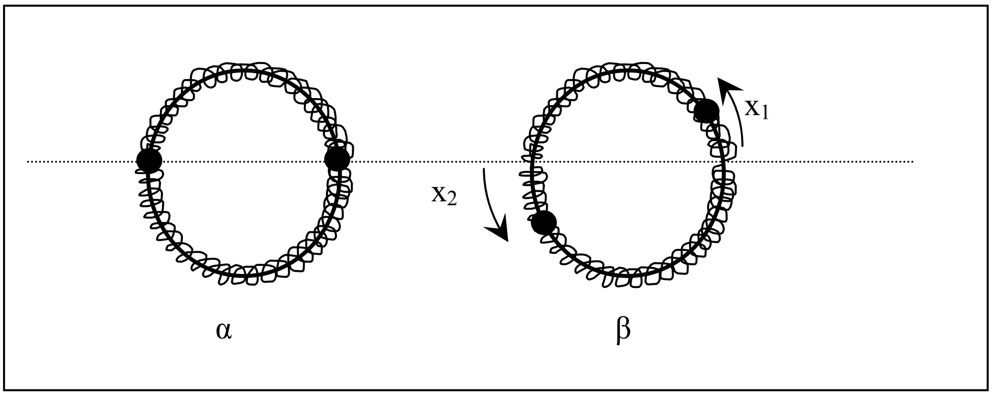
9) Δείξτε ότι, όταν το πλάτος είναι μεγάλο, η εξίσωση για εγκάρσια κύματα σε ένα ελατήριο γίνεται $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{T}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right\}$. Παρατηρήστε ότι αυτή η εξίσωση είναι μη γραμμική και μεταπίπτει στην $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{T}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ όταν το $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$ είναι αμελητέο. (Υπόδειξη: $\sin a=\tan a/\sqrt{1+\tan^2 a} = \tan a - \frac{1}{2}\tan^3 a + ...$)

10) Δυο ελατήρια σταθεράς k είναι περασμένα σε στεφάνι και συνδέονται με δυο δακτυλίδια μάζας $m_1 = m_2 = m$ έκαστο τα οποία είναι επίσης περασμένα στο στεφάνι όπως στο Σχήμα 3. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

α) Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος.

β) Σε χρόνο t=0 οι μάζες μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας (βλέπε Σχήμα 3β) κατά $x_1(0)=2m$, $x_2(0)=1m$ και αφήνονται ελεύθερες. Να υπολογιστεί συναρτήσει του χρόνου η θέση και η ταχύτητα της κάθε μάζας. Να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση των παραπάνω μεγεθών (μια για τις θέσεις των δυο σωμάτων και μια για τις ταχύτητες).

γ) Στο προηγούμενο ερώτημα εξετάστε αν υπάρχει χρονική στιγμή για την οποία κάποια από τις δυο μάζες περνάει από το αρχικό σημείο ισορροπίας της $x_1=0$, $x_2=0$.



Σχήμα 3.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Όταν δυο κύματα συμβάλουν, μπορεί το πλάτος που προκύπτει να είναι μεγαλύτερο από το πλάτος και των δυο αρχικών κυμάτων και κάτω από ποιες συνθήκες;

2) α) Τι ονομάζεται σειρά Fourier και σε τι χρησιμεύει το αντίστοιχο θεώρημα;

β) Γιατί η συνάρτηση $y = e^{x}e^{-\upsilon t^2}$ δεν αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης;

3) α) Ένα ηχητικό κύμα διαδίδεται στον αέρα και έχει συχνότητα 500Hz. Ένα μέρος του κύματος προσπίπτει και κατόπιν διαδίδεται στο νερό. Μεταβάλλεται η συχνότητα του; Το μήκος κύματος του; Αιτιολογήστε.

β) Πόσο μεταβάλλεται η συχνότητα και πόσο η ταχύτητα ενός ηχητικού κύματος όταν μειώσουμε στο μισό το μήκος κύματός του;

γ) Πως μπορεί να κινηθεί μια πηγή ήχου ως προς έναν παρατηρητή, ώστε ο παρατηρητής να μην ανιχνεύσει μεταβολή στη συχνότητα;

4) α) Σε ένα ελατήριο όπου διαδίδεται ένα διαμήκες κύμα, οι σπείρες κινούνται πίσω μπρος κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Εξαρτάται η ταχύτητα διάδοσης του κύματος από τη μέγιστη ταχύτητα των σπειρών;

β) Τι είδους κύματα διαδίδονται στα υγρά και γιατί.

5) Τι είδους κύμα προκύπτει σε μια χορδή όταν συντεθούν δυο κύματα ίσου πλάτους και είναι

α) παράλληλα γραμμικά πολωμένα με διαφορά φάσεως 0, 90, 180 μοίρες

β) κάθετα γραμμικά πολωμένα με διαφορά φάσης 0, 90, 180 μοίρες

γ) κυκλικά πολωμένα με αντίθετης φοράς διαφορά φάσης 0, 90, 180 μοίρες