

# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2008-09

## 4<sup>η</sup> ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 10/3/09

### Άσκηση 1

Σχετικιστικός πύραυλος ο πλησιάζει με ταχύτητα  $v = 0.8c$  μια επίπεδη ανακλαστική επιφάνεια η οποία είναι ακίνητη ως προς τη Γη. Ένας παλμός φωτός που εκπέμπεται από το μπροστινό μέρος του πυραύλου ταξιδεύει προς την επιφάνεια, ανακλάται σε αυτήν και στη συνέχεια συναντά και πάλι τον πύραυλο. Αν επιβάτης, που ταξιδεύει με τον πύραυλο και βρίσκεται ακίνητος στο μπροστινό μέρος του, μετράει ότι η απόστασή του από την επιφάνεια κατά τη στιγμή της εκπομπής είναι 10 Km, να υπολογιστεί ο συνολικός χρόνος ταξιδιού του φωτεινού παλμού:

(A) Στο ΣΑ της Γης

(B) Στο ΣΑ του πυραύλου.

### Άσκηση 2

Δυο διαστημόπλοια το καθένα με ίδιο μήκος  $L = 300.0\text{m}$  κινούνται ως προς τη Γη (παράλληλα προς την ίδια κατεύθυνση) με διαφορετικές ταχύτητες. Ο οδηγός του αργού διαστημοπλοίου μετράει το συνολικό χρόνο που διαρκεί η προσπέραση του (του οδηγού) από το γρήγορο διαστημόπλοιο και τον βρίσκει  $2.00\mu\text{s}$ . Να βρεθούν

A) Η σχετική ταχύτητα των δυο διαστημοπλοίων.

B) Πόσο διαρκεί η προσπέραση του αργού διαστημοπλοίου για τον οδηγό του γρήγορου διαστημοπλοίου;

### Άσκηση 3

Ένας γρήγορος, σχετικιστικός αθλητής μεταφέρει μία δοκό AB μήκους 20 m κατά την διεύθυνση του μήκους της. Στο σύστημα του εργαστηρίου, στο οποίο υπάρχει μια αποθήκη ΓΔ μήκους 10 m, η δοκός φαίνεται να έχει επίσης μήκος 10m. Και κατά συνέπεια η δοκός χωρά στην αποθήκη. Στο κινούμενο σύστημα όμως η δοκός έχει μήκος 20 m και η αποθήκη φαίνεται να έχει μήκος 5m και άρα δεν χωρά. Να διερευνηθεί αν το παραπάνω αποτελεί “παράδοξο”.

A) Να γίνουν τα χωροχρονικά διαγράμματα των AB, ΓΔ στο σύστημα της αποθήκης και στο σύστημα της δοκού και να ερμηνευθεί μέσω αυτών η ασυμφωνία των παρατηρητών.

B) Να υπολογισθούν και παρασταθούν στα διαγράμματα οι χρόνοι (ct) εισόδου και εξόδου της δοκού από την αποθήκη και στα δύο συστήματα αναφοράς.

### Άσκηση 4

Θεωρείστε ότι δύο φωτόνια, το καθένα ενέργειας  $E$ , συγκρούονται υπό γωνία  $\theta$  και δημιουργούν ένα σωματίδιο μάζας  $M$ . Συναρτήσετε των  $E$  και  $\theta$

A) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου.

B) Να υπολογιστεί η μάζα  $M$

Γ) Εξετάστε και σχολιάστε τις ειδικές περιπτώσεις  $\theta = 180^\circ, 90^\circ$  και  $\theta = 0^\circ$ .

### Άσκηση 5

Τραίνου ίδιου μήκους  $L$  κινείται με ταχύτητα  $c/2$  στο ως προς το έδαφος. Μια μπάλα εκτοξεύεται από το μπροστινό άκρο του τραίνου προς το πίσω και με ταχύτητα  $c/3$  ως προς το τρένο. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φτάσει στο πίσω άκρο και τι απόσταση θα διανύσει η μπάλα

A) Στο ΣΑ του τραίνου.

B) Στο ΣΑ του εδάφους.

Γ) Στο ΣΑ της μπάλας.

Δ) Επιβεβαιώστε ότι το αναλλοίωτο διάστημα είναι ίδιο και στις τρεις περιπτώσεις.

### Άσκηση 6

Διαστημόπλοιο  $X$  το οποίο κινείται προς τη Γη κατά μήκος του άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό σήμα συχνότητας  $f_x = 150\text{MHz}$ . Το σήμα ανιχνεύεται από παρατηρητές στη Γη με συχνότητα  $f_r = 450\text{MHz}$  και από ένα άλλο διαστημόπλοιο  $Y$ , το οποίο κινείται επίσης στον άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα και βρίσκεται μεταξύ Γης και  $X$ , με συχνότητα  $f_y = 130\text{MHz}$ . Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο διαστημοπλοίων ως προς τη Γη.

### Άσκηση 7

Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  μετατοπίζεται κατά μήκος ευθείας γραμμής κάτω από την επίδραση δύναμης  $F$ .

A) Υπολογίστε την παράγωγο  $F = \frac{dp}{dt}$  για να δείξετε ότι η επιτάχυνση δίνεται από την έκφραση

$$a = \frac{F}{m} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

B) Αν το σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία υπολογίστε την ταχύτητά του μετά από

χρόνο  $t$ . (Δίνεται ότι  $\int \frac{dz}{(1-z^2)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ )

### Άσκηση 8

Σωματίο, μάζας ηρεμίας  $m_1$ , έχει τετράνυσμα ορμής ίσο με  $p_0^\mu = (5, 1, 2, 2)\text{MeV}/c$  και θετικό φορτίο ίσο με το φορτίο του ηλεκτρονίου  $q = e$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  εισέρχεται σε χώρο όπου υπάρχει σταθερό ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως  $\vec{E} = (0, 0, \frac{8}{3} \cdot 10^4)\text{V/m}$ . Μετά από χρόνο  $t = 10^{-6}\text{s}$  συγκρούεται με ακίνητο σωματίο μάζας ηρεμίας  $m_2 = 2\text{MeV}$  και δημιουργείται συσσωμάτωμα μάζας ηρεμίας  $m_3$ . Να υπολογίσετε

A) Την μάζα ηρεμίας  $m_1$ , την αρχική τετραταχύτητα  $U_0^\mu$  και την αρχική κινητική ενέργεια  $E_{kin}$  του πρώτου σωματίου.

B) Το τετράνυσμα της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και την μάζα ηρεμίας του  $m_3$ .

(Αγνοήστε την ακτινοβολία που εκπέμπει το φορτισμένο σωματίο λόγω επιτάχυνσης)

### Άσκηση 9

Ως σύστημα κέντρου μάζας σωματίων (K) ορίζεται εκείνο ως προς το οποίο η ολική ορμή είναι μηδέν. Στο ΣΑ του εργαστηρίου δύο σωματίια A και B μαζών  $m_A, m_B$  κινούνται στον άξονα x. Δείξτε ότι

A) Η ταχύτητα του K ως προς το εργαστήριο είναι  $v_K = p_{oλ} c^2 / E_{oλ}$ , όπου  $p_{oλ}$  η ολική ορμή,  $E_{oλ}$  η ολική ενέργεια των σωματίων στο ΣΑ του εργαστηρίου, και  $c$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

B) Αν, ως προς το εργαστήριο, το A είναι ακίνητο και το B κινείται με ταχύτητα  $v$ , βρείτε τις ταχύτητές τους ως προς το K.

Γ) Εξετάστε αν εφαρμόζεται ο ορισμός του κέντρου μάζας και ισχύει το αποτέλεσμα (A) στην περίπτωση δύο φωτονίων.

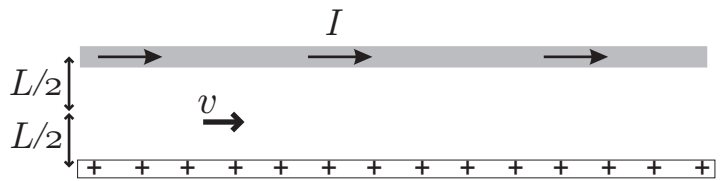
Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μετασχηματισμό του τετρανύσματος της ορμής, το οποίο στη μια διάσταση ορίζεται ως  $P = (E/c, p) = (\gamma mc, \gamma m v)$  και μετασχηματίζεται ως

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix}$$

όπου  $\beta = u/c$  με  $u$  την ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς.

### Άσκηση 10

Ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη, με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ , λεπτή μονωτική ράβδος μεγάλου μήκους τοποθετείται κατά μήκος του άξονα  $z$ . Παράλληλα προς αυτή, στο επίπεδο  $yz$ , και σε απόσταση  $L$  τοποθετείται αγωγίμο σύρμα, επίσης μεγάλου μήκους, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ . Ηλεκτρικά ουδέτερο σωματίιο κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v$ , στο επίπεδο  $yz$  παράλληλα με τον άξονα  $z$ , στο μέσο της απόστασης  $L$ , όπως στο Σχήμα.



A) Να υπολογιστεί η ταχύτητα  $v$  ώστε στο ΣΑ του σωματιδίου να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο.

B) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο στην περίπτωση (A).

Γ) Να διερευνηθεί αν είναι δυνατόν το μαγνητικό πεδίο να μηδενίζεται επίσης στο ΣΑ του (A) για ειδική σχέση των  $\lambda$  και  $I$ .

Υπόδειξη: Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση  $r$  από φορτισμένη ράβδο γραμμικής πυκνότητας  $\lambda$  είναι  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Επίσης το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση  $r$  από

αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$  είναι  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$ .

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Βρείτε την έκφραση για την κινητική ενέργειας ξεκινώντας από το σχετικιστικό τύπο στο όριο  $v \ll c$ . Βρείτε επίσης την πρώτη σχετικιστική διόρθωση.
- 2) Ποιες αναλλοίωτες ποσότητες μπορείτε να σχηματίσετε χρησιμοποιώντας τα τετρανύσματα της θέσης, ταχύτητας και ορμής;
- 3) Ένας χορευτής, με χέρια απλωμένα οριζοντίως, κροταλίζει ταυτόχρονα τα δάχτυλα των δύο χεριών. Σε ποιο μέρος του χωροχρόνου ανήκει ο ένας κροταλισμός ως προς τον άλλο;
- 4) Ένα φωτόνιο συχνότητας  $\nu$  εκτοξεύεται προς τα πάνω σε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση  $g$ . Με χρήση της αρχής διατήρησης ενέργειας να βρεθεί η ποσοστιαία αλλαγή στην συχνότητα του φωτονίου σαν συνάρτηση του ύψους  $z$ ; Για ύψος ίσο με ένα χιλιόμετρο να γίνει σύγκριση στις σχετικές ποσοστιαίες αλλαγές συχνοτήτων στην γη και τον ήλιο.
- 5) Με χρήση της αρχής διατήρησης ενέργειας για ένα φωτόνιο σε βαρυτικό πεδίο να υπολογισθεί η κλασική ακτίνα βαρυτικής κατάρρευσης που μετατρέπει ένα ουράνιο σώμα σε μελανή οπή και να συγκριθεί με την ακτίνα Schwarzschild.