Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. (α) Μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας R έχει μεταβλητή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου που μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\rho = Ar^2$, όπου A σταθερά με κατάλληλες μονάδες. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στη σφαίρα. ($r_1 < R$) και έξω από τη σφαίρα ($r_2 > R$). **(β)** Αν η σφαίρα ήταν αγώγιμη θα άλλαζε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας .

Β. Ένα πρωτόνιο, μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου +e και ένα σωμάτιο α, μάζας 4m και ηλεκτρικού φορτίου +2e, μπαίνουν ταυτόχρονα με ίσες ταχύτητες u_o, από το ίδιο σημείο, σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, μαγνητικής επαγωγής B, κάθετα στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

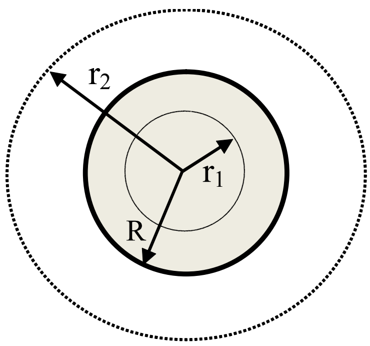
α Να περιγράψετε το είδος της κίνησης την οποία θα εκτελέσουν τα δύο φορτισμένα σωματίδια μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

β. Πιο σωματίδιο και γιατί βγαίνει πρώτο από το μαγνητικό πεδίο;

γ. Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σωματιδίων τη χρονική στιγμή κατά την οποία βγαίνει από το μαγνητικό πεδίο το σωματίδιο α.

Λύση

Α. (α)



Περιοχή $r_1 < R$

Από το νόμο του Gauss έχουμε

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$, όπου q' το φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια. Το διάνυσμα της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου $\vec{E}$ έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το διάνυσμα $d\vec{S}$. Άρα

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E 4\pi r^2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_o}$$

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\int \rho dV\right) \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r A r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\frac{r^5}{5} \Rightarrow \quad E = \frac{Ar^3}{5\varepsilon_0}$$

Περιοχή $r_2 > R$ Από το νόμο του Gauss έχουμε $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, όπου q είναι το συνολικό φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια. Τότε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E\ 4\pi r^2 \Rightarrow E\ 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

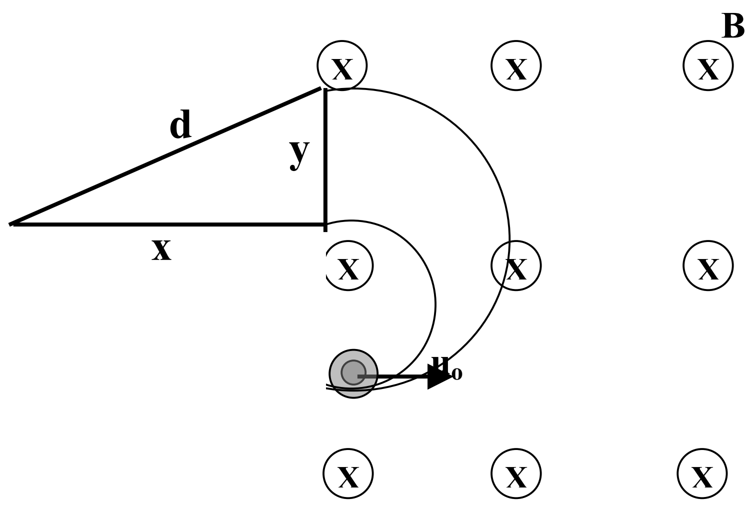
και

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\int \rho dV\right) \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R A r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\frac{r^5}{5} \Rightarrow \quad E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό του αγωγού(r < R) δεν μπορεί να υπάρξει ηλεκτρικό φορτίο. Οπότε από το νόμο του Gauss βρίσκουμε ότι E = 0.

Για r > R με το Νόμο του Gauss, το πεδίο υπολογίζεται ίδιο με εκείνο της περίπτωσης A2 αφού μέσα στην Γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια περιέχεται όλο το ηλεκτρικό φορτίο της σφαίρας. Μόνη διαφορά είναι ότι τώρα (δηλ. στην περίπτωση του αγωγού) όλο το φορτίο είναι συγκεντρωμένο στην επιφάνεια της σφαίρας.

B.



(α) Το πρωτόνιο και το σωμάτιο α φέρουν ηλεκτρικά φορτία. Επομένως καθώς εισέρχονται στο μαγνητικό πεδίο, εξασκείται επάνω τους δύναμη Laplace η οποία δρα ως κεντρομόλος. Άρα θα εκτελέσουν κυκλική κίνηση.
Μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς καθώς και την περίοδο της κυκλικής κίνησης καθενός σωματιδίου.

Έχουμε: $qu_oB = \frac{mu_o^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mu_o}{qB}$

$$qu_oB = \frac{mu_o^2}{R} \Rightarrow u_o = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega \cdot R = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Τώρα για το πρωτόνιο έχουμε: $T_\pi = \frac{2\pi m}{eB}$ και $R_\pi = \frac{mu_o}{eB}$

Για το σωματίδιο α έχουμε αντίστοιχα: $T_\alpha = \frac{4\pi m}{eB}$ και $R_\alpha = \frac{2mu_o}{eB}$

(β) Επομένως μικρότερη περίοδο έχει το πρωτόνιο το οποίο θα εξέλθει πρώτο από το μαγνητικό πεδίο. Επίσης η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του πρωτονίου είναι η μισή από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου α.

(γ) Μέχρι να εξέλθει το σωμάτιο α από το μαγνητικό πεδίο, το πρωτόνιο κινείται εκτός μαγνητικού πεδίου για χρονικό διάστημα:

$t_\pi = \frac{T_\alpha}{2} - \frac{T_\pi}{2} = \frac{\pi m}{eB}$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα το πρωτόνιο διατρέχει απόσταση x η οποία ισούται με: $x = u_o \cdot t_\pi \Rightarrow x = u_o \cdot \frac{\pi m}{eB}$

Επίσης έχουμε: $y = 2R_\alpha - 2R_\pi = \frac{2mu_o}{eB}$

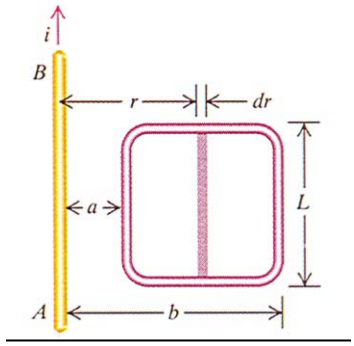
Επομένως η απόσταση d μεταξύ τους την στιγμή που εγκαταλείπει το μαγνητικό πεδίο το σωματίδιο α είναι:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2 u_o^2}{e^2B^2} + \frac{4m^2u_o^2}{e^2B^2}} = \frac{mu_o}{eB} \cdot \sqrt{\pi^2 + 4}$$

ΘΕΜΑ 2

Το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα AB που εκτείνεται στο άπειρο (σχήμα) έχει φορά προς τα πάνω και αυξάνει με σταθερό ρυθμό dI/dt. a) Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του πεδίου B σε απόσταση r από το σύρμα όταν το ρεύμα που το διαρρέει είναι I. b) Πόση ροή $d\Phi_B$ διαπερνά τη στενή σκιασμένη λωρίδα; c) Πόση είναι η ολική ροή που διαπερνά τον βρόχο; d) Βρείτε την επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο. e) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ αν α = 0,100 m, b = 0,300 m, L = 0,200 m και di/dt = 1,20 A/s. Δίνεται η μαγνητική διαπερατότητα του κενού $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ kg m/A^2 s^2

<u>Λύση</u>



a) Για να βρούμε το B χρησιμοποιούμε το νόμο του Ampere:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Άρα, στη δεξιά πλευρά του σύρματος, σε απόσταση r από αυτό, το μαγνητικό πεδίο B είναι $B = (\mu_0/2\pi r) I$

με φορά προς τη σελίδα του βιβλίου

b) Η σκιασμένη λωρίδα έχει επιφάνεια $dS = Ldr$
άρα

$$d\Phi_B = \vec{B}(r) \cdot d\vec{S} = B(r)Ldr = \frac{\mu_o I}{2\pi} L \frac{dr}{r}$$

Από τη σκιασμένη λωρίδα περνάει ροή

$$d\Phi_B = \frac{\mu_o I}{2\pi} L \frac{dr}{r}$$

c) Για να βρούμε την ολική ροή που διαπερνά το βρόχο ολοκληρώνουμε τη $d\Phi_B$ από r=a ως r=b:

$$\Phi_B = \oint B(r)Ldr = \frac{\mu_o I}{2\pi} L \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o IL}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$$

Άρα η ολική ροή που διαπερνά το βρόχο είναι

$$\Phi_B = \frac{\mu_o IL}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$$

d) Επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο:

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln(\frac{b}{a}) \frac{dI}{dt}$$

ε) Για α = 0.100m, b = 0.300m, L =0.200m και dI/dt =1.20A/s βρίσκουμε
E =………= $-5.27\ 10^{-8}$ V
Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τον κανόνα του Lentz για τη φορά της E και του επαγόμενου ρεύματος αριστερόστροφα, ώστε να αναιρεθεί η αύξηση της μαγνητικής ροής μέσα από αυτό λόγω της αύξησης του I στο σύρμα AB.