

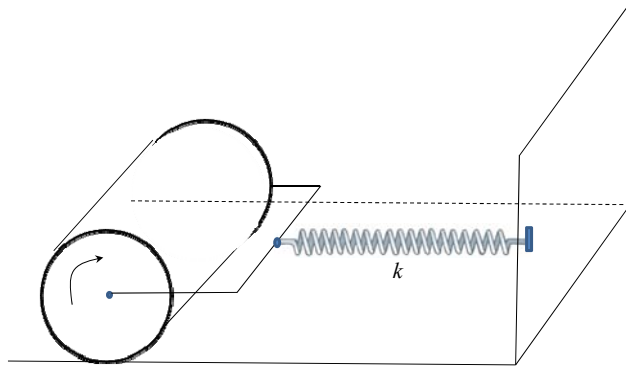
**ΦΥΕ 14**  
**5<sup>η</sup> ΕΡΓΑΣΙΑ**  
**Παράδοση 19-05-08**  
**( Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες)**

**Άσκηση 1 :**

Συμπαγής κύλινδρος μάζας  $M$  συνδεδεμένος σε ελατήριο σταθεράς  $k = 3.0 \text{ N/m}$  και αμελητέας μάζας, κυλιέται, χωρίς να σύρεται, κατά μήκος μιας οριζόντιας επιφάνειας όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

A) Δείξτε ότι αν ο κύλινδρος μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας εκτελεί απλή αρμονική κίνηση και υπολογίστε την περίοδο

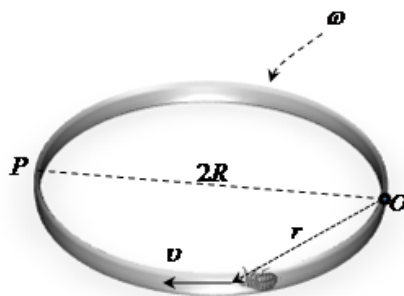
B) Αν το σύστημα αφηθεί σε κατάσταση ηρεμίας από μία θέση που απέχει  $0.25 \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας, υπολογίστε την μεταφορική κινητική ενέργεια και την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου καθώς αυτός διέρχεται από τη θέση ισορροπίας.



**Άσκηση 2 :**

Θεωρείστε κυκλική στεφάνη ακτίνας  $R$  και μάζας  $M$  σε ηρεμία πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η στεφάνη μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν νοητό άξονα που διέρχεται από το σημείο  $O$  της περιφέρειας της και είναι κάθετος στο επίπεδο. Σκαθάρι μάζας  $m$  το οποίο αρχικά βρίσκεται ακίνητο στο σημείο  $O$  αρχίζει να κινείται στην περιφέρεια της στεφάνης με ταχύτητα σταθερού μέτρου  $v$  ως προς τη στεφάνη όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  της στεφάνης τη στιγμή που το σκαθάρι διέρχεται το αντιδιαμετρικό σημείο του  $O$ .

( Η ροπή αδρανείας κυκλικής στεφάνης ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο της είναι  $I_{CM} = MR^2$  )



### Άσκηση 3 :

Μικρό σωματίο μάζας  $m$  είναι δεμένο στην άκρη ενός αβαρούς νήματος το οποίο περνάει μέσα από έναν σωλήνα και υποχρεώνεται να κινείται κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα  $v_0$  σε ακτίνα  $r_0$ . Τραβώντας το νήμα από την άλλη άκρη του σωλήνα το σωματίο υποχρεώνεται να κινηθεί σε τροχιά μικρότερης ακτίνας  $r_f$ .

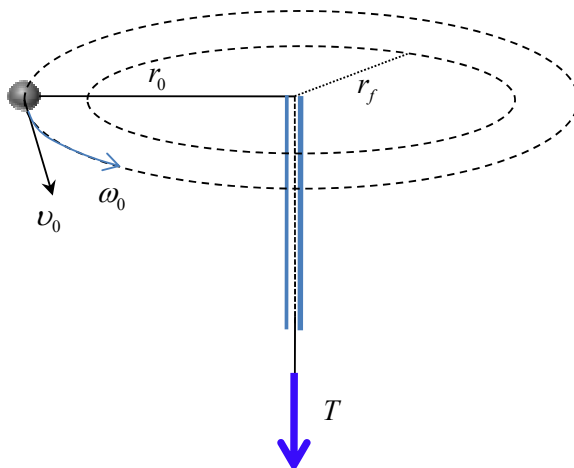
α) Βρείτε την ταχύτητα του σωματίου στη νέα θέση

β) Υπολογίστε την τάση του νήματος  $T$  στη νέα θέση

γ) Αν  $m = 0.25 \text{ kg}$ ,  $r_0 = 80 \text{ cm}$ ,  $v_0 = 400 \text{ cm/s}$  και το νήμα σπάει όταν  $T = 30 \text{ N}$  υπολογίστε την ακτίνα  $r_f$  τη στιγμή που σπάει το νήμα.

δ) Υπολογίστε το έργο που καταναλίσκει η  $T$  προκειμένου να μετατοπιστεί το σωματίο από την αρχική στην νέα θέση και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου

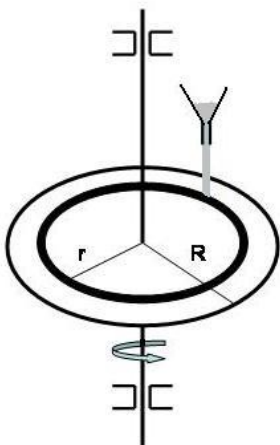
(Θεωρείστε ότι οι μεταβολές γίνονται κατά τέτοιο τρόπο που η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική)



#### Άσκηση 4:

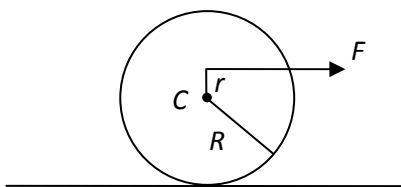
**A:**

Ο δίσκος του σχήματος έχει μάζα  $m_0$ , ακτίνα  $R$ , σε ακτίνα  $r < R$  φέρει κυκλικό αυλάκι μικρού εύρους και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  ρίχνουμε με ένα χωνί άμμο στο αυλάκι του δίσκου με σταθερό ρυθμό  $\lambda = dm/dt$ . Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου σαν συνάρτηση του χρόνου.



**B:**

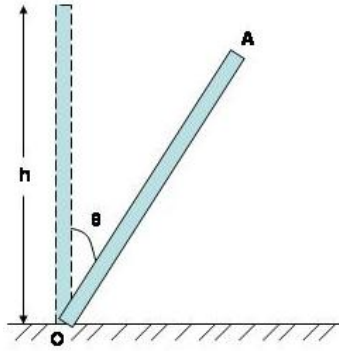
Ομογενής κύλινδρος μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στον κύλινδρο εφαρμόζεται οριζόντια δύναμη  $F$  προς τα δεξιά και σε απόσταση  $r$  πάνω από το κέντρο μάζας του  $C$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε τη δύναμη της τριβής για να κυλίσει ο κύλινδρος χωρίς ολίσθηση πάνω στην επιφάνεια. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο μάζας του είναι  $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ .



#### Άσκηση 5:

Μια ψηλή καμινάδα ύψους  $h$  σπάει κοντά στη βάση της και πέφτει όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκφράστε:

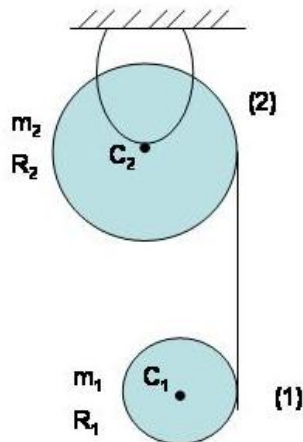
α) την ακτινική και β) την εφαπτομενική γραμμική επιτάχυνση της κορυφής της καμινάδας συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει η καμινάδα με την κατακόρυφο. Με τι ταχύτητα φτάνει το πάνω μέρος της καμινάδας στο οριζόντιο έδαφος; Μπορεί η προκύπτουσα επιτάχυνση να υπερβεί την επιτάχυνση της βαρύτητας;



### Άσκηση 6:

Οι δύο τροχαλίες του σχήματος έχουν ακτίνες  $R_1$ ,  $R_2$  και μάζες  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα. Ένα σχοινί είναι τυλιγμένο γύρω από τις δύο τροχαλίες και καθώς αυτό ξετυλίγεται ταυτόχρονα από αυτές, η τροχαλία που βρίσκεται χαμηλότερα πέφτει. Να υπολογιστούν:

- η τάση του σχοινιού και
- η γωνιακή επιτάχυνση κάθε τροχαλίας γύρω από το κέντρο μάζας της.



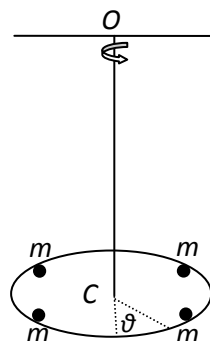
### Άσκηση 7:

**A:**

Ένα στροφικό εκκρεμές αποτελείται από σύρμα με συντελεστή στρέψης  $D$ . Το ένα άκρο του έχει στερεωθεί σε ακλόνητο σημείο  $O$  και το άλλο συγκρατεί ομογενή δίσκο μάζας  $M$  και 4 σημειακές μάζες  $m$  που είναι τοποθετημένες συμμετρικά στη περιφέρεια του δίσκου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο δίσκος εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του στρεφόμενος κατά γωνία  $\theta$ , υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης του συστήματος.

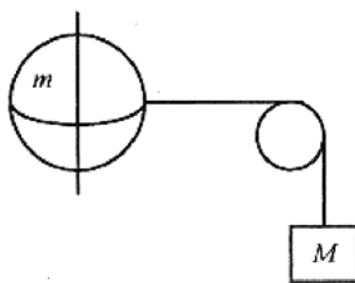
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι  $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ .

*Υπόδειξη:* Όταν το σύστημα περιστραφεί κατά γωνία  $\theta$ , τότε το σύρμα ασκεί στο δίσκο ροπή στρέψης:  $\tau = -D\theta$ , όπου  $D$  είναι μία θετική σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες του σύρματος και λέγεται συντελεστής στρέψης του σύρματος. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η ροπή έχει αντίθετη φορά από τη γωνιακή απομάκρυνση  $\theta$ .



**B:**

Συμπαγής σφαίρα μάζας  $m=2.0 \text{ kg}$  περιορίζεται στο να περιστρέφεται ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Ένα νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον “ισημερινό” της σφαίρας, περνάει από μια τροχαλία αμελητέας μάζας και στην ελεύθερη άκρη του είναι τοποθετημένο ένα σώμα μάζας  $M=0.8 \text{ kg}$  το οποίο μπορεί να εκτελέσει ελεύθερη πτώση με την επίδραση της βαρύτητας. Να γραφεί η ενέργεια του συστήματος σε συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας. Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι  $r=0.3 \text{ m}$  και το διάστημα της ελεύθερης πτώσης είναι  $h=1.5 \text{ m}$ , να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος  $M$  και η στροφορμή της σφαίρας.



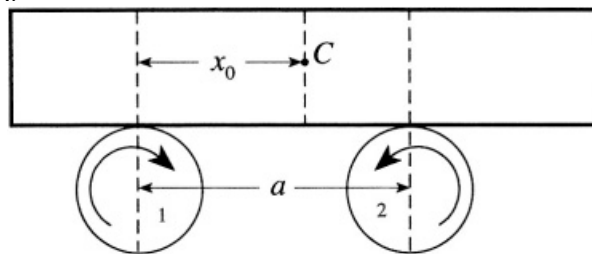
**Άσκηση 8:**

Σημειακή μάζα  $m$  κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο τραπέζι προσδεμένη με αβαρές ελατήριο σταθεράς  $k$  και μηδενικού φυσικού μήκους (δηλ. το φυσικό μήκος είναι τόσο μικρό σε σχέση με τις επιμηκύνσεις που μπορεί να παραλειφθεί), του οποίου το άλλο άκρο έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο (αρχή των αξόνων). Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σώμα βρίσκεται στη θέση  $(0, y_0)$  και έχει ταχύτητα  $(v_0, 0)$ .

- α) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  
 β) Να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς.

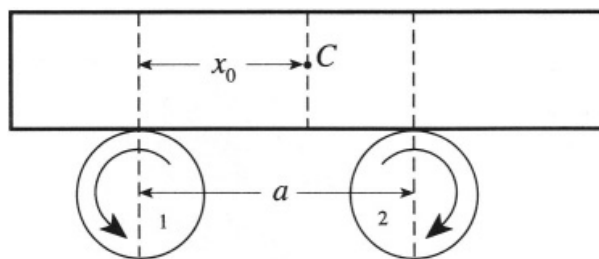
**Άσκηση 9:**

Μια ομοιόμορφη λεπτή άκαμπτη ράβδος μάζας  $M$  υποστηρίζεται από δύο περιστρεφόμενους κυλίνδρους των οποίων οι άξονες απέχουν σταθερή απόσταση  $a$ . Η ράβδος αρχικά τοποθετείται ασύμμετρα ως προς τους δύο κυλίνδρους και σε ηρεμία και όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1.

A) Υποθέστε ότι οι κύλινδροι περιστρέφονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ της ράβδου και των κυλίνδρων είναι  $\mu$ . Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της ράβδου και η λύση της για τη μετατόπιση  $x(t)$  του κέντρου της ράβδου  $C$  από τον κύλινδρο 1, υποθέτοντας ότι  $x(0) = x_0$  και  $\dot{x}(0) = 0$ .



Σχήμα 2.

B) Εξετάστε την περίπτωση στην οποία οι κατευθύνσεις της περιστροφής των κυλίνδρων αντιστρέφεται, όπως φαίνεται στον σχήμα 2. Υπολογίστε τη μετατόπιση  $x(t)$ , υποθέτοντας ότι  $x(0) = x_0$  και  $\dot{x}(0) = 0$ .

**Άσκηση 10:**

Ένα παιδί μάζας  $m$  βρίσκεται σε μια κούνια μήκους  $l$  και έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλει το μήκος  $l$ . Αρχικά ξεκινά από το σημείο 0 (δες σχήμα) όπου το μήκος είναι  $l+b$  και η γωνία  $\varphi_0$ . Καθώς κουνιέται προς τα δεξιά και διέρχεται από το σημείο της κατακόρυφης θέσης (σημείο 1) μειώνει το μήκος της κούνιας σε  $l-b$ . Υπολογίστε το πλάτος της γωνίας  $\varphi$  όταν το παιδί φτάσει στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς (σημείο 3).

Υπόδειξη: Για μικρές γωνίες  $\varphi_0$  ισχύει  $(1 - \cos \varphi_0) = \frac{\varphi_0^2}{2}$ . Θεωρείστε ότι για  $b/l \ll 1$  ισχύει

$$\left(1 + \frac{b}{l}\right)^3 \approx \left(1 + 3\frac{b}{l}\right).$$

