ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Β. 1 Γενικές έννοιες

Κάθε εξίσωση, η οποία περιλαμβάνει παραγώγους, είναι διαφορική εξίσωση. Έτσι οι εξισώσεις

$$\frac{dx}{dt} = x + t \quad (\text{Β.1.1}) \qquad \frac{dx}{dt}e^t = \cos x \quad (\text{Β.1.2})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5 \quad (\text{Β.1.3}) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 5x + \frac{2dx}{dt} \quad (\text{Β.1.4})$$

είναι όλες διαφορικές εξισώσεις. Στις εξισώσεις αυτές το x εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή, την t, γι' αυτό και καλούνται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Υπάρχουν και οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, στις οποίες το x εξαρτάται από περισσότερες μεταβλητές. Στο 6ο Κεφάλαιο επιλύουμε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

Τάξη της διαφορικής εξίσωσης είναι η μέγιστη τάξη της παραγώγου που περιέχει. Επομένως οι εξισώσεις (Β.1.1) και (Β.1.2) είναι πρώτης τάξης και οι εξισώσεις (Β.1.3) και (Β.1.4) είναι δεύτερης τάξης.

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι σχέση, η οποία δεν περιέχει παραγώγους. Για παράδειγμα η λύση της εξίσωσης

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 5\upsilon \qquad (\text{Β.1.5})$$

είναι

$$\upsilon = Ce^{5t} \qquad (\text{Β.1.6})$$

όπως εύκολα επαληθεύεται. Η σταθερά C είναι αυθαίρετη και η (Β.1.6) αποτελεί την γενική λύση της (Β.1.5). Στη Φυσική μας ενδιαφέρει η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης, η οποία εξαρτάται από τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες. Αν π.χ., γνωρίζουμε ότι ισχύει $\upsilon = 2$ για $t = 2$, η (Β.1.6) δίδει $2 = Ce^{10}$ οπότε $C = 2e^{-10}$. Επομένως η μερική λύση της (Β.1.5), η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες που αναφέραμε είναι

$$x = 2e^{5t-10}.$$

Η ελεύθερη πτώση σώματος στο κενό είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Αν y είναι η θέση του κινητού ως προς το σημείο από όπου αφέθηκε ελεύθερο να πέσει, η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι η

$$\ddot{y} = g,$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η γενική λύση της είναι

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + At + C$$

όπου A και C είναι σταθερές, οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Β. 2 Εξισώσεις πρώτης τάξης. Χωριζόμενες μεταβλητές.

Η εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

είναι εξίσωση πρώτης τάξης. Θεωρούμε ότι η $f(x,t)$ είναι δυνατό να γραφτεί ως

$$f(x,t) = \frac{g(t)}{h(x)}.$$

Η διαφορική εξίσωση γράφεται επομένως:

$$h(x)dx = g(t)dt.$$

Κάθε μέλος αυτής της εξίσωσης ολοκληρώνεται ως προς τη μεταβλητή από την οποία εξαρτάται. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\int h(x)dx = \int g(t)dt + C$$

όπου τα ολοκληρώματα είναι αόριστα και η σταθερά C αυθαίρετη.

Παράδειγμα 1:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$x\frac{dx}{dt} = \sin t.$$

Από τη δοθείσα, λαμβάνουμε

$$xdx = \sin t dt$$

οπότε με ολοκλήρωση

$$\int x dx = \int \sin t dt + C.$$

Τελικά $\frac{1}{2}x^2 = -\cos t + C$ είναι η γενική λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 2:

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάσπαση των πυρήνων ενός ραδιενεργού υλικού. Το αρνητικό πρόσημο τίθεται επειδή ο αριθμός των πυρήνων ελαττώνεται λόγω διασπάσεως, οπότε το dN είναι αρνητικό. Ακολουθώντας το παράδειγμα έχουμε

$$\int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt + C$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\ell n N = -\lambda t + C.$$

Έστω N_0 ο αριθμός των πυρήνων του υλικού κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Επομένως

$$\ell n N_0 = C.$$

Η γενική λύση γράφεται συνεπώς:

$$\ell n N = \ell n N_0 + \ell n e^{-\lambda t}$$

ή

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Β. 3 Εξισώσεις πρώτης τάξης. Ολοκληρωτικός παράγοντας.

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, ως εξής. Θεωρούμε ότι $P(x) = \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{d}{dx}\ell n s(x)$, οπότε $s(x) = e^{\int P(x)dx}$. Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{dy}{dx}+\frac{s'(x)}{s(x)}y=Q(x).$$

ή

$$s(x)\frac{dy}{dx}+\frac{ds(x)}{dx}y=Q(x)s(x)$$

ή

$$\frac{d}{dx}[ys(x)]=M(x)$$

όπου $M(x)=Q(x)s(x)$.

Η τελευταία διαφορική εξίσωση ολοκληρώνεται και έχει γενική λύση

$$ys(x)=\int M(x)dx+C.$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'+xy=x.$$

Στην εξίσωση αυτή $P(x)=x$ και $Q(x)=x$. Άρα $s(x)=e^{\int xdx}=e^{x^2/2}$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$ye^{\frac{1}{2}x^2}=\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx+C.$$

Τελικά:

$$ye^{\frac{1}{2}x^2}=C+e^{\frac{1}{2}x^2}$$

οπότε

$$y=1+Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Β. 4 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Ομογενής εξίσωση.

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha_1(x)\frac{dy}{dx}+\alpha_0(x)y=f(x) \qquad \text{(Β.4.1)}$$

είναι δεύτερης τάξης και οι συντελεστές $\alpha_1(x)$ και $\alpha_0(x)$ είναι συναρτήσεις του *x*.

Αν το δεξιό μέλος της (Β.4.1) είναι μηδέν, η εξίσωση καλείται ομογενής. Στην παράγραφο αυτή μας ενδιαφέρει η μελέτη της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Δηλαδή η διαφορική εξίσωση είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha_1 \frac{dy}{dx} + \alpha_0 y = 0 \qquad (B.4.2)$$

όπου α_1 και α_0 είναι σταθεροί αριθμοί. Έστω πως οι λύσεις της (Β.4.2) είναι οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι λύσεις είναι και οι $Ay_1(x)$ και $By_2(x)$ όπου *A* και *B* αυθαίρετες σταθερές. Επίσης λύση είναι και η

$$y = Ay_1(x) + By_2(x). \qquad (B.4.3)$$

Κάθε άθροισμα δύο λύσεων, συνιστά και λύση της (Β.4.2). Η γενική λύση της (Β.4.2) προϋποθέτει την ανεξαρτησία των $y_1(x)$ και $y_2(x)$. Δύο συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάποια περιοχή τιμών της *x*, αν στην περιοχή αυτή η σχέση

$$A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) = 0$$

συνεπάγεται την $A_1 = A_2 = 0$.

Ας θεωρήσουμε ότι η (Β.4.2) έχει λύση την $y = e^{\rho x}$, όπου ρ σταθερά. Αντικαθιστώντας στην (Β.4.2) προκύπτει:

$$\rho^2 + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \qquad (B.4.4)$$

Η εξίσωση (Β.4.4) λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση της (Β.4.2) και έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

α) Αν $\rho_1 \neq \rho_2$, η γενική λύση της (Β.4.2) είναι

$$y = Ae^{\rho_1 x} + Be^{\rho_2 x}$$

β) Αν $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, η γενική λύση της (Β.4.2) είναι

$$y = (A + Bx)e^{\rho x}$$

Παράδειγμα 1:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\rho^2 + 1 = 0$ με ρίζες $\rho = \pm\imath$. Άρα η γενική λύση είναι

$$y = Ae^{\imath x} + Be^{-\imath x}.$$

Αλλά $e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x, e^{-\imath x} = \cos x - \imath \sin x$. Άρα

$$y = (A + B)\cos x + \imath(A - B)\sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

με πραγματική μορφή. Πράγματι: Εύκολα μπορεί να επαληθευτεί ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 2:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\rho^2 - 2\rho + 1 = 0$ και έχει διπλή ρίζα, την $\rho = 1$. Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$y = (A + Bx)e^x$$

Παράδειγμα 3:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

με αρχικές συνθήκες $t = 0: y = 0, y' = 2.$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\rho^2 - 2\rho + 2 = 0$ με ρίζες $\rho_{1,2} = 1 \pm \imath.$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = Ae^{(1+\imath)x} + Be^{(1-\imath)x}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $A+B=0$ και $A(1+\imath)+B(1-\imath)=2$. Συνεπώς $A=\frac{1}{\imath}=-\imath,\ B=\imath$. Η γενική λύση είναι

$$y=-\imath e^{x}\left(e^{\imath x}-e^{-\imath x}\right)=-\imath e^{x}(2\imath\sin x).$$

Τελικά: $y=2e^{x}\sin x$.

Β. 5 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Μη ομογενείς εξισώσεις.

Η διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$y''+\alpha_1 y'+\alpha_2=f(x). \tag{B.5.1}$$

Αποδεικνύεται ότι η λύση της (Β.5.1) είναι το άθροισμα δύο λύσεων. Της ομογενούς, την οποία συμβολίζουμε με y_c, και της μερικής, την οποία συμβολίζουμε με y^*. Η λύση της ομογενούς είναι η

$$y_c=Ay_1(x)+By_2(x).$$

Η μορφή y^* της μερικής λύσης εξαρτάται από το δεξιό μέλος της (Β.5.1). Όταν προσδιορίσουμε τη μορφή της μερικής λύσης, θα την αντικαταστήσουμε στην (Β.5.1) για να προσδιοριστούν οι σταθερές, που υπάρχουν στη μερική λύση. Η γενική λύση είναι η

$$y=y_c+y^*.$$

Οι σταθερές A και B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Στα εγχειρίδια Μαθηματικής Ανάλυσης περιγράφονται μέθοδοι για την ταχεία εύρεση της μερικής λύσης, όταν η $f(x)$ έχει ειδικές μορφές.

Παράδειγμα 1:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y''+y=5e^{-t} \tag{1}$$

με συνθήκες $t=0: y=2, y'=4$.

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι $y=y_c+y^*$. Αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$y^* = (A + Bt)e^{-t}$, οπότε

$y^{*\prime} = (B - A - Bt)e^{-t}$ και

$y^{*\prime\prime} = (-2B + A + Bt)e^{-t}$.

Θέτουμε στην (1) όπου y το y^* και έχουμε $(-2B + A + Bt + A + Bt)e^{-t} = 5e^{-t}$. Τελικά προκύπτει $-2B+2A = 5$ και $2B = 0$.

Άρα $B = 0,\ A = \frac{5}{2}$.

Η μερική λύση είναι $y^* = \frac{5}{2}e^{-t}$.

Η ομογενής είναι η $y'' + y = 0$ με λύση $y_c = C\cos t + D\sin t$. Άρα η γενική λύση της (1) είναι

$$y = y_c + y^* = C\cos t + D\sin t + \frac{5}{2}e^{-t}.$$

Εφαρμόζουμε τις συνθήκες $t = 0: y = 2, y' = 4$ και βρίσκουμε $C = -\frac{1}{2}, D = \frac{13}{2}$. Άρα η γενική λύση της (1) είναι:

$$y = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{13}{2}\sin t + \frac{5}{2}e^{-t}.$$

Παράδειγμα 2:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y'' + 2y' + y = 2x^2 + 1 + \cos x$$

με συνθήκες $x = 0: y = 1,\ y' = -1$.

Η ομογενής έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $(\rho+1)^2 = 0$ με διπλή ρίζα την $\rho = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι:

$$y_c = (A + Bx)e^{-x}.$$

Στην εύρεση της μερικής λύσης θα μας καθοδηγήσει η μορφή του δεξιού μέλους της διαφορικής εξίσωσης. Το δεξιό μέλος είναι άθροισμα πολυωνύμου και τριγωνομετρικής συνάρτησης. Αναζητούμε επομένως ως μερική λύση την

$$y^* = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \delta \cos x + \varepsilon \sin x$$
$$y^{*\prime} = 2\alpha x + \beta - \delta \sin x + \varepsilon \cos x$$
$$y^{*\prime\prime} = 2\alpha - \delta \cos x - \varepsilon \sin x.$$

Αντικαθιστούμε το y^* και τις παραγώγους του με τα ίσα τους στην αρχική διαφορική εξίσωση οπότε λαμβάνουμε

$$2\alpha + 4\alpha x + 2\beta + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2x^2 + 1,$$
$$2\varepsilon \cos x - 2\delta \sin x = \cos x.$$

Άρα $\alpha = 2,\ \beta = -8,\ \gamma = 13,\ \delta = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}.$

Η γενική λύση είναι

$$y = (A + Bx)e^{-x} + 2x^2 - 8x + 13 + \frac{1}{2}\sin x.$$

Σ' αυτήν αν εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες θα προσδιοριστούν οι σταθερές A και B. Από την συνθήκη $x = 0,\ y = 1$ βρίσκουμε $A = -12$. Από την συνθήκη $x = 0,\ y' = -1$ βρίσκουμε $B = -\dfrac{11}{2}$. Άρα η γενική λύση είναι

$$y = -\left(12 + \frac{11}{2}x\right)e^{-x} + 2x^2 - 8x + 13 + \frac{1}{2}\sin x.$$