Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (29-7-2007) **Μαθηματικά**

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται $\vec{a} = \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

a. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{c}$ που είναι κάθετο στα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τέτοιο ώστε $\vec{c}\cdot\hat{k} > 0$ και $|\vec{c}| = 10\sqrt{3}$.
b. Να ευρεθεί το εμβαδόν του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$.
c. Δίνεται $\vec{d} = -\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$. Να βρεθούν οι πραγματικοί λ, μ και ν τέτοιοι ώστε $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Λύση

(a) Το ζητούμενο διάνυσμα είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}\times\vec{b}$:

$$\vec{\alpha}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$$

¨Αρα $\vec{c} = \kappa\left(\vec{\alpha}\times\vec{b}\right) = \kappa\hat{i} - 5\kappa\hat{j} - 7\kappa\hat{k}$

$$\vec{c}\hat{k} = -7\kappa > 0 \Rightarrow \kappa < 0$$

και

$$|\vec{c}|^2 = \kappa^2\left(1+25+49\right) = 75\kappa^2 = 300 \Rightarrow \kappa^2 = 4$$

Άρα $\kappa = -2$ και $\vec{c} = -2\hat{i} + 10\hat{j} + 14\hat{k}$

(b) Το εμβαδόν ισούται με :

E=2(E_1+E_2+E_3) όπου

$$E_1 = \left|\vec{\alpha}\times\vec{b}\right|, E_2 = \left|\vec{\alpha}\times\vec{c}\right|, E_3 = \left|\vec{c}\times\vec{b}\right|$$

Έχουμε υπολογίσει από το (α) $\vec{\alpha}\times\vec{b} = -2\hat{i} + 10\hat{j} + 14\hat{k}$, άρα $E_1 = \sqrt{75}$

Ομοίως υπολογίζουμε $E_2 = \left|\vec{\alpha}\times\vec{c}\right| = \sqrt{4200}$

$$E_3 = \left|\vec{c}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1800}$$

Άρα $E_{o\lambda}$=2($\sqrt{75} + \sqrt{4200} + \sqrt{1800}$

(γ′) Από τη σχέση $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ παίρνουμε

$$\lambda(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}) + \mu(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) + \nu(-2\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}) = -\hat{i}+2\hat{j}-$$

από την οποία προκύπτει στο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu - 2\nu &= -1 \\ 3\lambda - \mu + 10\nu &= 2 \\ -2\lambda + \mu + 14\nu &= -3 \end{aligned}$$

για τη λύση του οποίου υπολογίζουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 10 \\ -2 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -150$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 10 \\ -3 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -90$$

$$\Delta_\mu = 130 \qquad \Delta_\nu = 10$$

οπότε

$$\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} = \frac{3}{5}, \qquad \mu = \frac{\Delta_\mu}{\Delta} = -\frac{13}{15}, \qquad \nu = \frac{\Delta_\nu}{\Delta} = -\frac{1}{15}$$

ΘΕΜΑ 2

Α. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $I=\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx$ (β) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(Υπόδειξη: $I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|$

Β. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\ln x + y^2 = 1$

στο σημείο $(x_o, y_o) = (1,1)$

__**Λύση**__

Α.

(α) Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της αντικατάστασης: $x^2+4x-6 = u$. Επομένως $(2x+4)dx = du$ και τελικά $(x+2)dx=(1/2)du$. Το αρχικό ολοκλήρωμα επομένως γίνεται:

$$I = \frac{1}{2}\int \sin u du$$

Το οποίο βέβαια είναι –(1/2) cosu + C

Αντικαθιστώντας το $u = x^2+4x-6$ στην λύση έχουμε τελικά:

$$I = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 4x - 6) + C$$

(β) Κάνουμε απλές αλγεβρικές πράξεις για να φέρουμε το ολοκλήρωμα στην μορφή που θέλουμε:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι εύκολο να βρεθεί με απλή αντικατάσταση $u=x^2+x+1$ και επομένως $du=(2x+1)dx$, επομένως

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+x+1} + C_1$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα δίνεται σημαντική βοήθεια εξ αρχής, αρκεί να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα σε μορφή που μας δίνεται η λύση του στην εκφώνηση. Αυτό είναι εύκολο αν αναγνωρίσουμε ότι $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$. Και πάλι για λόγους ευκολίας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $u = x + \frac{1}{2}$ και $a^2 = \frac{3}{4}$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται $-\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$ του οποίου η λύση είναι. Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα είναι: $-\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C_2 = \ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}| + C_2$

$$I = \sqrt{x^2+x+1} - \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + C = \sqrt{x^2+x+1} - \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$$

Όπου βέβαια $C = C_1 + C_2$.

B. $\left(\ln x + y^2 = 1\right)' \Rightarrow \frac{1}{x} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2xy}$

Η εφαπτομένη είναι της μορφής :

$$y - y_o = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o,y_o)} (x - x_o)$$

με $x_o = 1, y_o = 1$ και $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o,y_o)} = -\frac{1}{2}$ βρίσκουμε

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x$$

ΘΕΜΑ 3

Α. Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b x^3\cdot\cos x\cdot dx$ αν τα όρια ολοκληρώσεως είναι:

(α) α = 0, b = π και (β). α = -π/2, b = π/2

Β. Υπολογίστε την παράγωγο dy/dx της εξίσωσης

$$(x\cdot y)^2+x^2\cdot y^3+x^3\cdot y^2=0$$

Λύση

Α.

Υπολογίζουμε κατ' αρχήν το ολοκλήρωμα :

$$\int_a^b x^3\cdot\cos x\cdot dx=\int_a^b x^3\cdot d\sin x=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b-\int_a^b\sin x\cdot dx^3=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b-\int_a^b\sin x\cdot 3\cdot x^2\cdot dx=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b-3\cdot\int_a^b x^2\cdot\sin x\cdot dx=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\int_a^b x^2\cdot d\cos x=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-3\cdot\int_a^b\cos x\cdot dx^2=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\int_a^b x\cdot\cos x\cdot dx=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\int_a^b x\cdot d\sin x=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\left|x\cdot\sin x\right|_a^b+6\cdot\int_a^b\sin x\cdot dx=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\left|x\cdot\sin x\right|_a^b-6\cdot\left|\cos x\right|_a^b$$

(α). Ο πρώτος και ο τρίτος όρος ισούται με 0 (ή το x=0 ή το sinπ=0). Συνεπώς:

$$=3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_0^\pi-6\cdot\left|\cos x\right|_0^\pi=3\cdot\pi^2\cdot(-1)-6\cdot(-1)+6\cdot 1=12-3\cdot\pi^2$$

(β). Ο δεύτερος και τέταρτος όρος ισούται με 0 (cos(-π/2) = cos(π/2) = 0). Συνεπώς:

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}-6\cdot\left|x\cdot\sin x\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=(\pi/2)^3\cdot\sin\pi/2-(-\pi/2)^3\cdot\sin(-\pi/2)-6\cdot(\pi/2)\cdot\sin\pi/2+6\cdot(-\pi/2)\cdot\sin(-\pi/2)=$$

$$= (\pi/2)^3 \cdot 1 + (\pi/2)^3 \cdot (-1) - 6 \cdot (\pi/2) \cdot 1 + 6 \cdot (-\pi/2) \cdot (-1) = 0$$

Β. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς x. Εχουμε:

$$\frac{d\left((x \cdot y)^2 + x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2\right)}{dx} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{d\left((x \cdot y)^2 + x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2\right)}{dx} = \frac{d\left((x \cdot y)^2\right)}{dx} + \frac{d\left(x^2 \cdot y^3\right)}{dx} + \frac{d\left(x^3 \cdot y^2\right)}{dx} =$$

$$= 2 \cdot (x \cdot y) \cdot \left(x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y \cdot \frac{dx}{dx}\right) + x^2 \cdot \frac{d(y^3)}{dx} + y^3 \cdot \frac{d(x^2)}{dx} + x^3 \cdot \frac{d(y^2)}{dx} + y^2 \cdot \frac{d(x^3)}{dx} =$$

$$= 2 \cdot (x \cdot y) \cdot \left(x \cdot \frac{dy}{dx} + y \right) + x^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 \cdot 2 \cdot x + x^3 \cdot 2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 3 \cdot x^2 =$$

$$= 2 \cdot x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot x \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot x \cdot y^3 + 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 =$$

$$= \left(2 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot x^3 \cdot y\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \left(2 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y^3 + 3 \cdot x^2 y^2}{2 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot x^3 \cdot y} \equiv -\frac{2 \cdot y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x\, y}{2 \cdot x + 3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x^2}}$$