5^{η} Εργασία
Παράδοση 20/5/2007
Οι ασκήσεις είναι ισοδύναμες

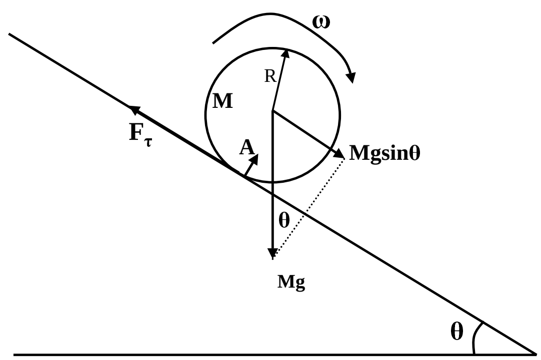
1

Για ένα συμμετρικό σώμα (για παράδειγμα, θεωρείστε ένα κυλινδρικό σώμα) που κυλά προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, να δείξετε ότι:

$$\mu \geq \frac{\tan\theta}{1 + MR^2/I_c},$$

όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής του κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. Τα R, I_c είναι η ακτίνα και η ροπή αδρανείας ως προς το κέντρου μάζας του συμμετρικού σώματος.

Λύση:



Σχήμα 1:

Η εξίσωση κίνησης του συμμετρικού σώματος είναι:

$$Mg\sin\theta - F_\tau = Ma, \tag{1}$$

όπου a είναι η μεταφορική επιτάχυνση του σώματος, F_τ είναι η δύναμης τριβής.
Επιπλέον η ροπή που οφείλεται στην δύναμη τριβής F_τ είναι:

$$N = F_\tau R = I_c \alpha, \tag{2}$$

όπου $\alpha R = a$ είναι η σχέση μεταξύ της μεταφορικής και γωνιακής επιτάχυνσης, εφ' όσον το σημείο επαφής του σώματος με το κεκλιμένο επίπεδο είναι σε ηρεμία. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα περιστρέφεται χωρίς να ολισθαίνει. Κατά τη στιγμή που θα υπάρχει ολίσθηση θα έχουμε:

$$F_\tau = \mu A = \mu M g \cos\theta, \tag{3}$$

όπου A είναι η αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου που δρα πάνω στο σώμα. Επομένως η εξίσωση (1) θα γίνει:

$$Mg\sin\theta - \mu M g\cos\theta = Ma, \tag{4}$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (2), και (3) έπεται:

$$\mu M g\cos\theta = I_c a/R^2,$$

αφού ισχύει $\alpha R = a$. Επομένως η σχέση (4) θα γίνει:

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + I_c/(MR^2)}.$$

Η εξίσωση κίνησης θα είναι:

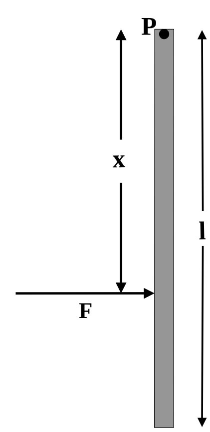
$$\begin{aligned} Mg\sin\theta - \frac{Mg\sin\theta}{1+I_c/(MR^2)} &= \mu M g\cos\theta \\ \Rightarrow \quad \tan\theta\left(1 - \frac{1}{1+I_c/(MR^2)}\right) &= \mu \\ \Rightarrow \quad \tan\theta\frac{I_c/(MR^2)}{1+I_c/(MR^2)} &= \mu \\ \Rightarrow \quad \mu = \frac{\tan\theta}{MR^2/I_c+1}&, \end{aligned}$$

και επομένως ο συντελεστής τριβής του επιπέδου μπορεί να είναι μεγαλύτερος της ποσότητας $\tan\theta/(MR^2/I_c + 1)$, δηλαδή:

$$\mu \geq \frac{\tan\theta}{MR^2/I_c+1}.$$

2

Θεωρούμε μια στερεά ράβδο με μήκος l, που την κρεμάμε από το ένα της άκρο με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο σημείο P. Μια δύναμη F πρόκειται να εφαρμοστεί για λίγο χρόνο, ώστε με την ώθηση που θα δώσει να θέσει τη ράβδο σε κίνηση εκκρεμούς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διάταξη στήριξης στο P είναι πολύ εύθραυστη και η δύναμη F πρέπει να εφαρμοστεί σε απόσταση x, τέτοια, που να μην εκδηλώνεται δύναμη αντίδρασης στο P. Να βρεθεί η απόσταση x που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση. Η αντίστοιχη θέση ονομάζεται κέντρο κρούσης για το σημείο εξάρτησης P.
(*Υπόδειξη: Η δύναμη F θα επιταχύνει το κέντρο μάζας, και θα δώσει γωνιακή επιτάχυνση ως προς το σημείο P εξαιτίας της ροπής ως προς το ίδιο το σημείο. Η συνθήκη για να είναι συμβιβαστές αυτές οι επιταχύνσεις, μαζί με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει δύναμη αντίδρασης στο P, θα καθορίσουν την τιμή του x ως συνάρτηση του l*).



<u>Λύση:</u>

Θέλουμε το άθροισμα των δυνάμεων στο σημείο P να είναι μηδέν. Από τον δεύτερο νόμο του Newton έχουμε την ώθηση $\Omega \int F dt$ της δύναμης:

$$F = \frac{d(Mv)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \int F dt = \Delta(Mv),$$

όπου $\Delta(Mv)$ είναι η μεταβολή της ορμής. Επιπλέον, η ταχύτητα του κέντρου μάζας εφ' όσον το σημείο P είναι σε ισορροπία, θα είναι:

$$v_{CM} = \omega \frac{l}{2},$$

και η ώθηση της δύναμης είναι:

$$\int F dt = \Delta(Mv) = Mv_{\text{τελική}} - Mv_{\text{αρχική}} = Mv_{CM} - 0 = M\omega \frac{l}{2}. \tag{5}$$

Ομοίως, για την ροπή της δύναμης θα έχουμε:

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \int N dt = \Delta(I\omega), \tag{6}$$

όπου η ροπή της δύναμης είναι $N = Fx$, και η ροπή αδρανείας της ράβδου μήκους l είναι $I = Ml^2/3$. Εξίσωση (6) θα γραφτεί ως εξής:

$$\int N dt = \Delta(I\omega)$$

$$\Rightarrow \quad x \int F dt = I\omega_{\text{τελική}} - I\omega_{\text{αρχική}}$$

$$\Rightarrow \quad x \int F dt = I\omega_{\text{τελική}} - 0 = \frac{1}{3} M l^2 \omega. \tag{7}$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (5) και (7) θα έχουμε:

$$x = \frac{2}{3} l.$$

3

Η γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνει από την τιμή λ_0 στο στο ένα άκρο της $(x = 0)$ σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της $x = L$ σύμφωνα με τη σχέση:

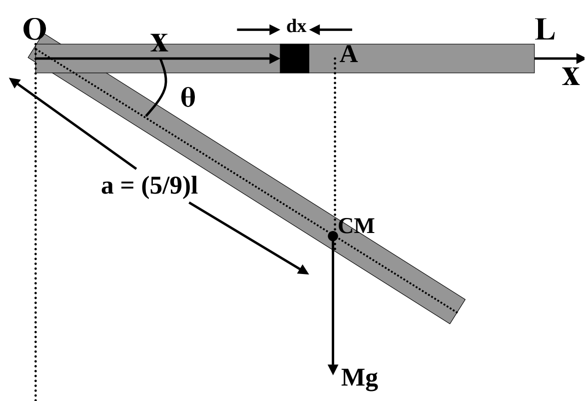
$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right).$$

(α) Δείξατε ότι η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα y που περνά από το ελαφρό άκρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι:

$$I = \frac{7}{18} M L^2,$$

όπου M είναι η μάζα της ράβδου.
(β) Η ράβδος ξεκινά από ηρεμία όταν είναι οριζόντια και περιστρέφεται χωρίς τριβές, υπό την επίδραση του βάρους της, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το ελαφρό άκρο της O. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια αρχική θέση.

Λύση:



Σχήμα 3:

(α)

Για να βρούμε την ολική μάζα της ράβδου θεωρούμε ένα στοιχειώδες μήκος dx πάνω στο άξονα των x, τότε η μάζα που αντιστοιχεί σε αυτό το μήκος είναι:

$$dm = \lambda dx$$

$$\Rightarrow \quad M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \lambda_0 \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{3}{2}\lambda_0 L.$$

Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι:

$$R_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{x\lambda dx}{M}$$

$$\Rightarrow \quad R_{CM} = \frac{\lambda_0}{M}\int_0^L x\left(1+\frac{x}{L}\right)dx,$$

όπου η ολική μάζα της ράβδου είναι $M = 3/2\lambda_0 L$. Συνεπώς το κέντρο μάζας είναι:

$$R_{CM} = \frac{\lambda_0}{\frac{3}{2}\lambda_0 L}\left(\int_0^L x\, dx + \frac{1}{L}\int_0^L x^2\, dx\right) = \frac{5}{9}L.$$

Η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα y που περνά από το ελαφρό άκρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι:

$$I = \int_0^L dmx^2,$$

όπου η στοιχειώδης μάζα, dm είναι:

$$dm = \lambda dx = \lambda_0\left(1+\frac{x}{L}\right)dx.$$

Άρα η ροπή αδρανείας της ράβδου μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$I = \int_0^L \lambda_0\left(1+\frac{x}{L}\right)x^2 dx = \frac{7}{12}\lambda_0 L^3.$$

Άλλα η ολική μάζα μας δίνει:

$$M = \frac{3}{2}\lambda_0 L$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{2}{3L}M,$$

και επομένως η ροπή αδρανείας της ράβδου θα είναι:

$$I = \frac{7}{12}\lambda_0 L^3 = \frac{7}{12}\frac{2}{3L}ML^3 = \frac{7}{18}ML^2.$$

(β)

Η δύναμη του βάρους δημιουργεί μια ροπή, N ως προς το σημείο O είναι:

$$N = Mg(OA) = Mga\cos\theta = Mg\frac{5}{9}L\cos\theta,$$

και η εξίσωση κίνησης για την περιστροφή της ράβδου είναι:

$$\frac{dJ}{dt} = N$$

$$\Rightarrow \quad I\frac{d\omega}{dt} = Mg\frac{5}{9}L\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{18}ML^2\frac{d\omega}{dt} = Mg\frac{5}{9}L\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{10}{7}\frac{g}{L}\cos\theta. \tag{8}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega,$$

και επομένως η εξίσωση (8) θα γραφτεί ως εξής:

$$\frac{d\omega}{d\theta}\omega = \frac{10}{7}\frac{g}{L}\cos\theta$$

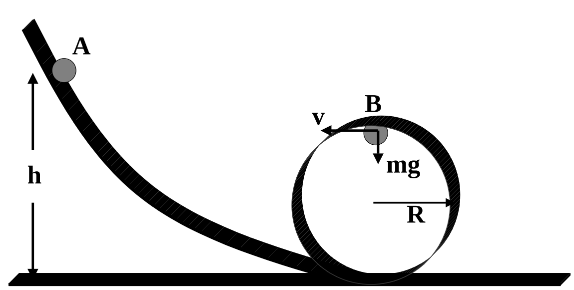
$$\Rightarrow \int_0^{\omega}\omega d\omega = \frac{10}{7}\frac{g}{L}\int_0^{\theta}\cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{10}{7}\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{20}{7}\frac{g}{L}\sin\theta}.$$

4

Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο A, πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h συναρτήσει του R, από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R.



Σχήμα 4:

Λύση:

Στο σημείο A η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K_A = 0$ και η δυναμική ενέργεια είναι $U_A = mgh$. Στο σημείο B δυναμική ενέργεια της σφαίρας είναι $U_B = mg(2R - r) \simeq mg2R$ (διότι $R \gg r$) και η κινητική ενέργεια είναι:

$$K_B = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

διότι οφείλεται στην γραμμική και περιστροφική κίνηση της σφαίρας. I είναι η ροπή αδρανείας της σφαίρας $I = (2/5)mr^2$.
Από το θεώρημα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\Rightarrow \quad mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

με την γωνιακή και γραμμική ταχύτητα να συνδέονται από την σχέση $v = r\omega$. Άρα η διατήρησης της μηχανικής ενέργειας γράφεται ως εξής:

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad gh = 2gR + v^2\frac{7}{10}. \tag{9}$$

Για να πετύχουμε ανακύκλωση της σφαίρας, θα πρέπει στο σημείο B η κεντρομόλος επιτάχυνση να είναι ίση με το βάρος της σφαίρας $mv^2/R = mg \Rightarrow v^2 = gR$. Συνεπώς η εξίσωση (9) θα είναι:

$$gh = 2gR + v^2\frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow \quad gh = gR\left(\frac{7}{10} + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{27}{10}R.$$

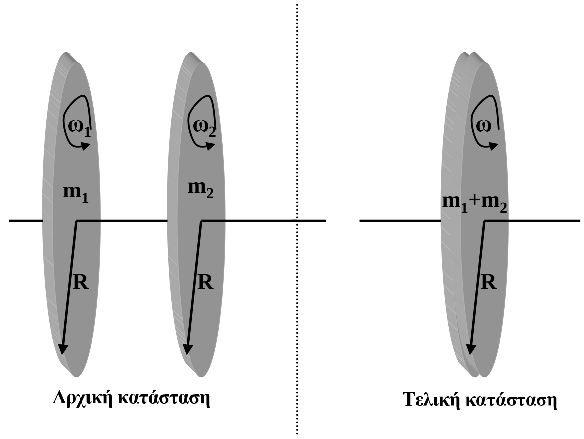
5

Δυο συμπαγείς δίσκοι με μάζες m_1 και m_2 περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 και στροφορμές L_1 και L_2 αντιστοίχως (Ο άξονας περιστροφής των δίσκων είναι κοινός, γι' αυτό μιλάμε μόνο για μέτρα των στροφορμών). Οι δίσκοι έρχονται σε επαφή (βλέπε σχήμα), θα υπάρξει ολίσθηση μεταξύ τους μέχρι να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω, τότε η στροφορμή τους είναι L. Να βρεθούν τα L, ω καθώς και η απώλεια ενέργειας του συστήματος.

Λύση:

Από την διατήρηση της στροφορμής θα έχουμε για την αρχική και τελική κατάσταση:

$$L_{\text{αρχική}} = L_{\text{τελική}}$$



Σχήμα 5:

$$\Rightarrow \quad L_1 + L_2 = L,$$

όπου L είναι η τελική στροφορμή που θα αποκτήσουν οι δυο δίσκοι όταν έλθουν σε επαφή.
Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή είναι το γινόμενο της ροπής αδρανείας και της γωνιακής ταχύτητας. Επομένως η διατήρηση της στροφορμής θα γραφτεί ως εξής:

$$I\omega = I_1\omega_1 + I_2\omega_2, \tag{10}$$

όπου οι ροπές αδρανείας των δίσκων είναι:

$$I = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2,$$

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R^2.$$

Επομένως η εξίσωση (10) γράφεται:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\omega = \frac{1}{2}m_1R^2\omega_1 + \frac{1}{2}m_2R^2\omega_2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{m_1 + m_2}.$$

Η απώλεια ενέργειας, ΔE του συστήματος είναι:

$$\Delta E = E_1 + E_2 - E,$$

όπου $E_1,\ E_2$ είναι οι ενέργειες των δυο δίσκων πριν έλθουν σε επαφή και E η ενέργεια της τελικής κατάστασης. Η ενέργεια λόγω περιστροφής είναι $E = I\omega^2/2$, επομένως θα έχουμε:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1R^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_2R^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\left(\frac{m_1\omega_1+m_2\omega_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

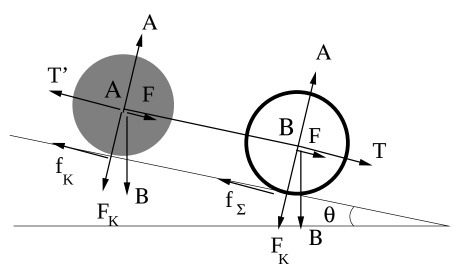
$$\Rightarrow \quad \Delta E = \frac{R^2}{4}\frac{m_1^2\omega_1^2 + m_1m_2\omega_1^2 + m_1m_2\omega_2^2 + m_2^2\omega_2^2 - m_1^2\omega_1^2 - m_2^2\omega_2^2 - 2m_1m_2\omega_1\omega_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E = \frac{R^2}{4}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\omega_1-\omega_2)^2.$$

6

Ένας στερεός κύλινδρος και μία λεπτή στεφάνη με το ίδιο βάρος B και την ίδια ακτίνα R συνδέονται με μία αβαρή ράβδο AB και κυλάνε χωρίς ολίσθηση πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο πού έχει κλίση θ, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κατεβαίνει το σύστημα και τη δύναμη που ασκείται από τη ράβδο στη στεφάνη. Δίνονται: $I_K = mR^2/2$, $I_\Sigma = mR^2$.

Λύση:



Σχήμα 6:

Στην γενική περίπτωση που αφήνουμε ένα σώμα να κυλήσει από ένα ύψος h από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{11}$$

εφόσον δεν έχουμε ολίσθηση $v = \omega R$ και από την (11) έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = \text{σταθ.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = \text{σταθ.} \tag{12}$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όσο αυξάνεται το I τόσο ελαττώνεται η ταχύτητα v και αντίστροφα. Άρα στο πρόβλημα μας ο κύλινδρος που έχει τη μικρότερη ροπή αδρανείας τείνει να κατέβει με μεγαλύτερη ταχύτητα από τη στεφάνη άρα τη σπρώχνει με μία δύναμη $\boldsymbol{T}$. Η αντίδραση στη δύναμη αυτή πάνω στον

κύλινδρο είναι η $\boldsymbol{T}'$ που είναι ίση και αντίθετη στην $\boldsymbol{T}$. Τα δύο σώματα θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση. Αν θεωρήσουμε τους στιγμιαίους άξονες περιστροφής που περνάνε από τα σημεία O και O', που είναι τα σημεία επαφής του κυλίνδρου και της στεφάνης αντίστοιχα, τότε οι εξισώσεις κίνησης για τα δύο σώματα είναι:
Κύλινδρος:

$$F - T' - f_K = ma, \tag{13}$$

$$(F - T')R = I_O \dot{\omega}, \tag{14}$$

Στεφάνη:

$$F + T - f_\Sigma = ma, \tag{15}$$

$$(F + T)R = I_{O'} \dot{\omega}, \tag{16}$$

έχοντας:

$$I_O = I_K + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}, \tag{17}$$

$$I_{O'} = I_\Sigma + mR^2 = 2mR^2. \tag{18}$$

Επίσης επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση έχουμε:

$$a = a_e = \dot{\omega}R$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{a}{R}, \tag{19}$$

από τις (14) και (16) βρίσκουμε:

$$\frac{F - T'}{F + T} = \frac{I_O}{I_{O'}} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mg\sin\theta - T}{mg\sin\theta + T} = \frac{\frac{3mR^2}{2}}{2mR^2} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{mg\sin\theta}{7}. \tag{22}$$

Επίσης από την (16)έχουμε:

$$\dot{\omega} = \frac{(F + T)R}{I_{O'}}, \tag{23}$$

και αντικαθιστώντας στην (19) βρίσκουμε:

$$\frac{a}{R} = \frac{(mg\sin\theta + \frac{mg\sin\theta}{7})R}{2mR^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{4g\sin\theta}{7}. \tag{24}$$

7

Ένα σωματίδιο είναι ελεύθερο να κινηθεί στο επίπεδο (x, y) υπό την επίδραση μιας δύναμης που κατευθύνεται προς την αρχή των συντεταγμένων και εκφράζεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{F} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}) = -C\boldsymbol{r}.$$

Αν M είναι η μάζα του σωματιδίου, να καταστρώσετε και να λύσετε τις εξισώσεις της κίνησης ως προς x και ως προς y.
(α) Ποιες είναι οι συνθήκες για να γίνεται η κίνηση πάνω σε κύκλο, και ποια είναι η περίοδος;
(β) Ποιες είναι οι συνθήκες για να γίνεται η κίνηση κατά μήκος ευθείας που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα των x, και ποια είναι η περίοδος;

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι:

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})$$

$$\Rightarrow \quad M\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\boldsymbol{x}} + M\frac{d^2y}{dt^2}\hat{\boldsymbol{y}} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}),$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{M}x = 0,$$

και

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -Cy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{C}{M}y = 0.$$

Ορίζουμε την παράμετρο $\omega^2 = C/M$ που είναι η γωνιακή ταχύτητα της αρμονικής κίνησης στις δυο διαστάσεις των x και y. Η λύση των δυο διαφορικών εξισώσεων είναι της μορφής:

$$x = A\sin(\omega t + \phi_1),$$

$$y = B\sin(\omega t + \phi_2),$$

όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης A, B, ϕ θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

(α)

Για να έχουμε μια κίνηση πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας R, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2\sin^2(\omega t + \phi_1) + B^2\sin^2(\omega t + \phi_2) = R^2.$$

Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να έχουμε:

$$A = B = R,$$

$$\phi_1 = 0,$$

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

και η περίοδος, T της αρμονικής κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{C}}.$$

(β)

Για να γίνεται η κίνηση κατά μήκος ευθείας που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα των x, θα πρέπει να ισχύει $y = x$ ή

$$B\sin(\omega t + \phi_2) = A\sin(\omega t + \phi_1)$$

$$\Rightarrow \quad A = B, \qquad \phi_1 = \phi_2 = 0,$$

όπου θα έχουμε αρμονικές κινήσεις σε x, y:

$$x = A\sin(\omega t),$$

$$y = A\sin(\omega t),$$

$$\omega^2 = \frac{C}{M},$$

με περίοδο, T:

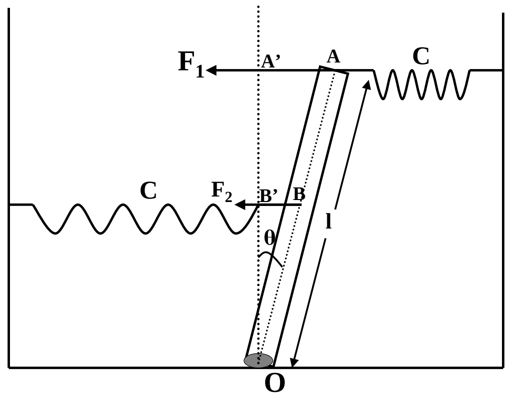
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{C}}.$$

8

Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l κρατιέται από δυο ελατήρια A, B με την ίδια σταθερά ελατηρίου C με τέτοιο τρόπο ώστε οι αποστάσεις $OB = AB = l/2$. Αποδείξετε ότι για μικρές αποκλίσεις της γωνίας θ η ράβδος θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση με περίοδο:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{m}{15C}}.$$

Θεωρείστε ότι το βάρος της ράβδου είναι αμελητέο ως προς τις άλλες δυνάμεις.



Σχήμα 8:

Λύση:

Στην ράβδο εξασκούνται δυο δυνάμεις, F_1, F_2 (δυνάμεις $Hooke$) που οφείλονται στα δυο ελατήρια:

$$F_1 = -C(AA') = -Cl\sin\theta \simeq -Cl\theta,$$

και

$$F_2 = -C(BB') = -C\frac{l}{2}\sin\theta \simeq -C\frac{l}{2}\theta.$$

Οι δυνάμεις δημιουργούν ροπές, N_1, N_2 ως προς το σημείο O:

$$N_1 = F_1(OA') \simeq -Cl\theta l = -Cl^2\theta,$$

και

$$N_2 = F_2(OB') \simeq -C\frac{l}{2}\theta\frac{l}{2} = -C\left(\frac{l}{2}\right)^2\theta.$$

Η στροφορμή L ως προς το σημείο O είναι $L = I\omega = I\dot{\theta}$. Η εξίσωση κίνηση είναι:

$$\frac{dL}{dt} = N = N_1 + N_2$$

$$\Rightarrow \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\left(l^2 + \frac{1}{4}l^2\right)\theta$$

$$\Rightarrow \quad I\ddot{\theta} + \frac{5}{4}Cl^2\theta = 0,$$

όπου η ροπή αδρανείας, I της ράβδου ως προς ένα κάθετο άξονα κάθετο στο σημείο O είναι $I = ml^2/3$. Άρα η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{5}{4}Cl^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{15C}{4m}\theta = 0,$$

επομένως η ράβδος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{15C}{4m}$$

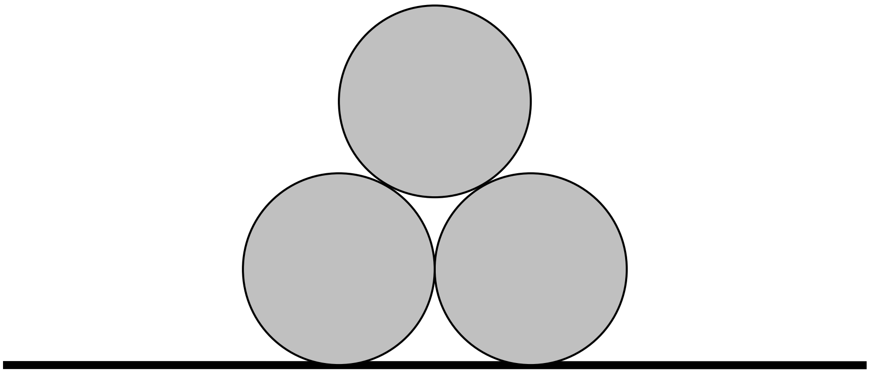
$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{15C}{4m}},$$

και η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{15C}}.$$

9

Τρεις ομογενείς κύλινδροι έχουν ίσα μήκη, διαμέτρους και μάζες. Δύο από αυτούς τοποθετούνται ο ένας δίπλα στον άλλο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, ενώ ο τρίτος κύλινδρος τοποθετείται πάνω στους άλλους δύο, έτσι ώστε ο άξονας του να είναι παράλληλος με τους άξονες των δύο άλλων κυλίνδρων. Στο Σχήμα δείχνεται μια εγκάρσια διατομή των τριών κυλίνδρων. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των κυλίνδρων και του δαπέδου, και μεταξύ των κυλίνδρων, έτσι ώστε το σύστημα να ευσταθή.



ΛΥΣΗ

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα τρία σώματα. Όπου:

$\vec{B}$ η δύναμη του βάρους του κάθε σώματος.

$\vec{T}_1, \vec{N}_1$ οι δυνάμεις που ασκούνται από το δάπεδο στο κάτω δεξιά σώμα.

$\vec{T}_2, \vec{N}_2$ οι δυνάμεις που ασκούνται από το πάνω στο κάτω δεξιά σώμα.

$\vec{T}_3, \vec{N}_3$ οι δυνάμεις που ασκούνται από το αριστερό στο κάτω δεξιά σώμα.

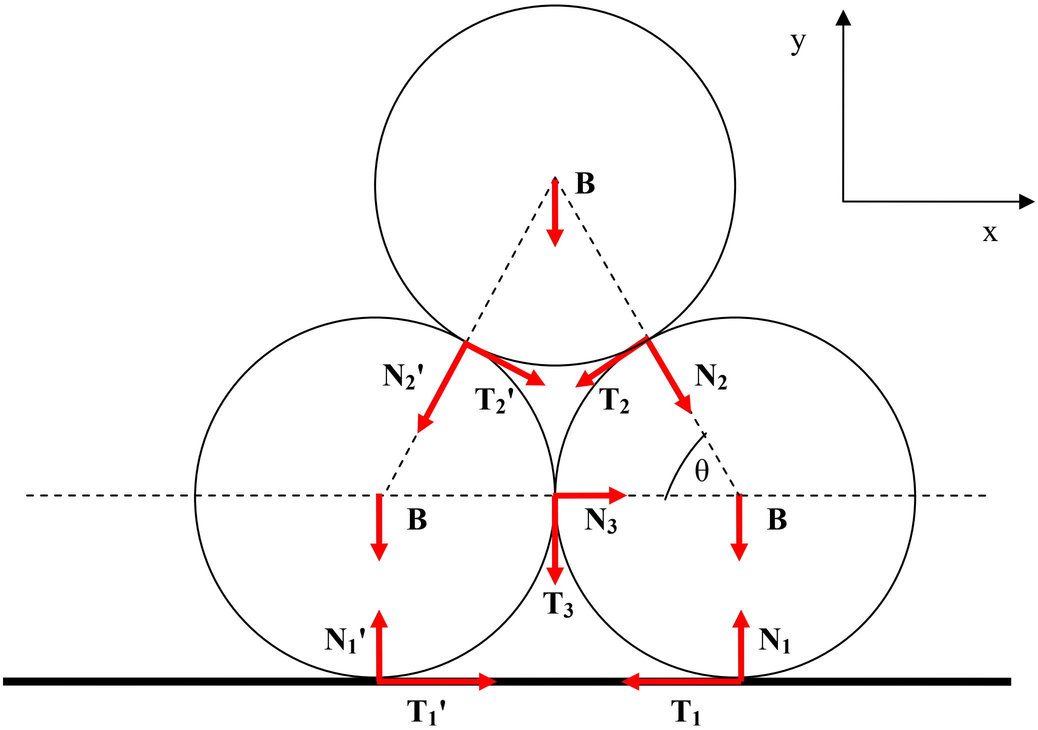
$-\vec{T}_3, -\vec{N}_3$ οι δυνάμεις που ασκούνται από το δεξιό στο κάτω αριστερά σώμα.

$\vec{T}'_1, \vec{N}'_1$ οι δυνάμεις που ασκούνται από το δάπεδο στο κάτω αριστερά σώμα.

$\vec{T}'_2, \vec{N}'_2$ οι δυνάμεις που ασκούνται από το πάνω στο κάτω αριστερά σώμα.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο πάνω σώμα είναι ίσες και αντίθετες με τις $\vec{T}_2, \vec{N}_2, \vec{T}'_2, \vec{N}'_2$.

Η γωνία $\theta = 60^o$, λόγω του ισόπλευρου τριγώνου που σχηματίζουν τα κέντρα των κυλίνδρων.



Ο κάθε κύλινδρος πρέπει να ισορροπεί, οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται σε αυτόν πρέπει να είναι ίση με μηδέν:

Συνθήκες ισορροπίας πάνω κυλίνδρου

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow R(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_2') = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_2' = \mathrm{T}_2 \qquad (1)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow -\vec{\mathrm{T}}_2 - \vec{\mathrm{N}}_2 - \vec{\mathrm{T}}_2' - \vec{\mathrm{N}}_2' + \vec{\mathrm{B}} = 0$$

x άξονας:
$$\mathrm{T}_{2x} + \mathrm{N}_{2x} + \mathrm{T}_{2x}' + \mathrm{N}_{2x}' = 0 \Rightarrow$$
$$-\mathrm{T}_2 \sin\theta + \mathrm{N}_2 \cos\theta + \mathrm{T}_2' \sin\theta - \mathrm{N}_2' \cos\theta = 0 \Rightarrow$$
$$\mathrm{N}_2' = \mathrm{N}_2 \qquad (2)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (1).

y άξονας:
$$\mathrm{T}_{2y} + \mathrm{N}_{2y} + \mathrm{T}_{2y}' + \mathrm{N}_{2y}' = \mathrm{B} \Rightarrow$$
$$\mathrm{T}_2 \cos\theta + \mathrm{N}_2 \sin\theta + \mathrm{T}_2' \cos\theta + \mathrm{N}_2' \sin\theta = \mathrm{B} \Rightarrow$$
$$\mathrm{T}_2 \cos\theta + \mathrm{N}_2 \sin\theta + \mathrm{T}_2 \cos\theta + \mathrm{N}_2 \sin\theta = \mathrm{B} \Rightarrow$$
$$\mathrm{N}_2 \sin\theta + \mathrm{T}_2 \cos\theta = \frac{\mathrm{B}}{2} \qquad (3)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (1) και (2).

Συνθήκες ισορροπίας κάτω δεξιά κυλίνδρου

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow R(\mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_1) = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_1 \qquad (4)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{\mathrm{T}}_1 + \vec{\mathrm{N}}_1 + \vec{\mathrm{T}}_2 + \vec{\mathrm{N}}_2 + \vec{\mathrm{T}}_3 + \vec{\mathrm{N}}_3 + \vec{\mathrm{B}} = 0$$

x άξονας: $-\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 \sin\theta + \mathrm{N}_2 \cos\theta + \mathrm{N}_3 = 0$ (5)

y άξονας: $\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2 \sin\theta - \mathrm{T}_2 \cos\theta - \mathrm{T}_3 - \mathrm{B} = 0$ (6)

<u>Συνθήκες ισορροπίας κάτω αριστερά κυλίνδρου</u>

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow R(\mathrm{T}_1' + \mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_2') = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_1' + \mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_2' \Rightarrow \mathrm{T}_1' + \mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_2 \quad (7)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (1)

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{\mathrm{T}}_1' + \vec{\mathrm{N}}_1' + \vec{\mathrm{T}}_2' + \vec{\mathrm{N}}_2' - \vec{\mathrm{T}}_3 - \vec{\mathrm{N}}_3 + \vec{\mathrm{B}} = 0$$

x άξονας: $\mathrm{T}_1' + \mathrm{T}_2' \sin\theta - \mathrm{N}_2' \cos\theta - \mathrm{N}_3 = 0 \Rightarrow$

$\mathrm{T}_1' + \mathrm{T}_2 \sin\theta - \mathrm{N}_2 \cos\theta - \mathrm{N}_3 = 0$ (8)

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (1),(2).

y άξονας: $\mathrm{N}_1' - \mathrm{T}_2' \cos\theta - \mathrm{N}_2' \sin\theta + \mathrm{T}_3 - \mathrm{B} = 0 \Rightarrow$

$\mathrm{N}_1' - \mathrm{T}_2 \cos\theta - \mathrm{N}_2 \sin\theta + \mathrm{T}_3 - \mathrm{B} = 0$ (9)

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (1),(2).

<u>Συνθήκη ισορροπίας όλου του συστήματος</u>

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{\mathrm{T}}_1 + \vec{\mathrm{N}}_1 + \vec{\mathrm{T}}_1' + \vec{\mathrm{N}}_1' + 3\vec{\mathrm{B}} = 0$$

x άξονας: $\mathrm{T}_1' - \mathrm{T}_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_1' = \mathrm{T}_1$ (10)

y άξονας: $\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_1' - 3\mathrm{B} = 0$ (11)

Από τις (4),(7),(10) έχουμε:
$\mathrm{T}_3 = 0, \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1 = \mathrm{T}$

Οι (5),(6),(8) και (9) γίνονται:

$(5) \Rightarrow -\mathrm{T} - \mathrm{T}\sin\theta + \mathrm{N}_2 \cos\theta + \mathrm{N}_3 = 0$ (12)

$(6) \Rightarrow \mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2 \sin\theta - \mathrm{T}\cos\theta - \mathrm{B} = 0$ (13)

$(9) \Rightarrow \mathrm{N}_1' - \mathrm{T}\cos\theta - \mathrm{N}_2 \sin\theta - \mathrm{B} = 0$ (14)

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις και την (11) έχουμε:

$$\mathrm{N}_1' = \mathrm{N}_1 = \frac{3\mathrm{B}}{2} \quad (15)$$

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων (3),(12) ως προς Τ και N_2 :

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}_3 \sin\theta + \frac{\mathrm{B}}{2}\cos\theta}{1 + \sin\theta}$$

$$\mathrm{N}_2 = \frac{\mathrm{B}}{2} - \mathrm{N}_3 \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} \quad (16)$$

Ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μ_2 μεταξύ των κυλίνδρων είναι ίσος με:

$$\mu_2 = \frac{T_2}{N_2} = \frac{T}{N_2} = \frac{\frac{B}{2}\cos\theta + N_3 \sin\theta}{\frac{B}{2}(1+\sin\theta) - N_3\cos\theta} \quad (17)$$

Ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μ_1 μεταξύ των κυλίνδρων και του δαπέδου είναι ίσος με:

$$\mu_1 = \frac{T_1}{N_1} = \frac{T}{N_1} = \frac{\frac{B}{2}\cos\theta + N_3 \sin\theta}{\frac{3B}{2}(1+\sin\theta)} \quad (18)$$

Από τις σχέσεις (17) και (18) είναι φανερό ότι οι ελάχιστες τιμές των συντελεστών στατικής τριβής, έτσι ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία, εξαρτώνται από την κάθετη αντίδραση N_3 μεταξύ των δύο κυλίνδρων που ακουμπούν στο δάπεδο. Οι ελάχιστες τιμές που μπορούν να πάρουν οι συντελεστές στατικής τριβής αντιστοιχούν στην περίπτωση όπου αυτή η κάθετη αντίδραση είναι ίση με μηδέν (οι δύο κύλινδροι βρίσκονται απειροελάχιστα κοντά αλλά δεν εφάπτονται). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\mu_2 = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

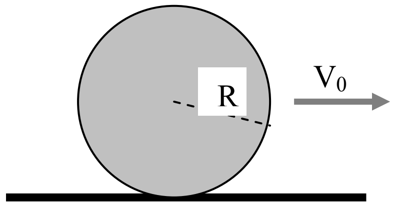
$$\mu_1 = \frac{\cos\theta}{3(1+\sin\theta)} = \frac{1}{3(2+\sqrt{3})}$$

10

Μια μπάλα, μάζας m και ακτίνας R, αρχικά ολισθαίνει χωρίς να περιστρέφεται σε οριζόντια επιφάνεια με τριβή. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας είναι V_0, και η ροπή αδράνειας της ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της (το οποίο είναι και κέντρο μάζας της) είναι $I=kmR^2$, όπου k αδιάστατη σταθερά.

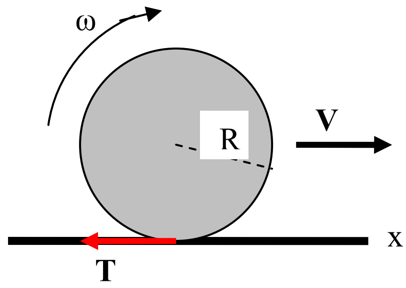
Α) Χωρίς να γνωρίζετε τίποτα για την φύση των δυνάμεων τριβής, να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας όταν αυτή αρχίζει να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Επίσης να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα, λόγω των τριβών, ενώ η μπάλα ολίσθαινε.

Β) Σας δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, μ, μεταξύ μπάλας και δαπέδου. Ποια χρονική στιγμή και σε ποια απόσταση η μπάλα άρχισε να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει; Υπολογίστε το έργο της δύναμης της τριβής και επιβεβαιώστε ότι ισούται με την απώλεια της κινητικής ενέργειας που βρήκατε στο ερώτημα (Α).



Λύση

Α)Ορίζουμε τα γραμμικά μεγέθη να είναι θετικά όταν δείχνουν προς τα δεξιά και τα γωνιακά μεγέθη να είναι θετικά όταν η περιστροφή γίνεται όπως οι δείκτες του ρολογιού, όπως δείχνεται στο Σχήμα. Οπότε η δύναμη της τριβής, Τ, είναι αρνητική, και η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά η μπάλα, ω, θετική. Συμβολίζουμε με α την μεταφορική επιτάχυνση και με α_γ την γωνιακή επιτάχυνση.



Η δύναμη της τριβής επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση, ενώ επιταχύνει την περιστροφική κίνηση της μπάλας. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται ως εξής:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$$

$$T = m \cdot a \qquad (1)$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow$$

$$-TR = Ia_\gamma \qquad (2)$$

όπου υπολογίσαμε την ροπή ως προς το κέντρο μάζας. Λαμβάνουμε υπόψη την ροπή αδράνειας που μας δίνεται στην εκφώνηση

$$I = kmR^2 \qquad (3)$$

και αντικαθιστώντας τις (1) και (3) στην (2) βρίσκουμε

$$-maR = kmR^2 a_\gamma \Rightarrow$$

$$a = -kRa_\gamma \qquad (4)$$

Ολοκληρώνουμε την (4) από την αρχή της κίνησης και μέχρι την στιγμή όπου το σώμα αρχίζει να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει:

$$a = -kRa_\gamma \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -kR\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{dV}{dt}dt = -kR\int_0^t \frac{d\omega}{dt}dt \Rightarrow$$

$$V_f - V_0 = -kR(\omega_f - \omega_0) \qquad (5)$$

όπου V_f, V_0 η τελική και αρχική ταχύτητα του σώματος και ω_f, ω_0 η αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα του σώματος αντίστοιχα. Το σώμα αρχικά δεν περιστρέφεται, ενώ τελικά κυλάει χωρίς να ολισθαίνει, οπότε

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= 0 \\ \omega_f &= V_f / R \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5) και (6) βρίσκουμε την τελική ταχύτητα του σώματος:

$$V_f = \frac{V_0}{1+k} \qquad (7)$$

Η ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα ισούται με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος:

$$Q=-\Delta E_{\kappa\iota\nu}=\frac{1}{2}mV_0^2-\left(\frac{1}{2}mV_f^2+\frac{1}{2}I\omega_f^2\right)=$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2-\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{1+k}\right)^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{R}\frac{V_0}{1+k}\right)^2\right)=$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2\left(1-\frac{1}{(1+k)^2}-\frac{k}{(1+k)^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2\frac{k}{1+k}\quad ,$$

Οπότε το ποσοστό της ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι

$$Q/E_{\kappa\iota\nu,\alpha\rho\chi}=\left(\frac{1}{2}mV_0^2\frac{k}{1+k}\right)/\left(\frac{1}{2}mV_0^2\right)=$$

$$\boxed{\frac{k}{1+k}}$$

Β)Η δύναμη της τριβής είναι $T=-\mu mg$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$-\mu mg=ma\Rightarrow$$

$$a=-\mu g \quad , \qquad (8)$$

οπότε

$$\Delta V=at\Rightarrow$$

$$(V_f-V_0)=-\mu gt\Rightarrow$$

$$t=-\frac{V_f-V_0}{\mu g}$$

και αντικαθιστώντας από την εξίσωση (7) βρίσκουμε

$$\boxed{t=\frac{k}{1+k}\frac{V_0}{\mu g}} \qquad (9)$$

Η μπάλα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε η απόσταση που διανύει σαν συνάρτηση του χρόνου είναι

$$d=V_0t+\frac{1}{2}at^2$$

Αντικαθιστούμε από τις (8),(9) και βρίσκουμε την απόσταση που διένυσε η μπάλα

$$\boxed{D=\frac{k(2+k)}{(1+k)^2}\frac{V_0^2}{2\mu g}} \qquad (10)$$

Το έργο της τριβής ισούται με

$$W_T=\int_0^t T\frac{ds}{dt}dt=-\mu mg\int_0^t\frac{ds}{dt}dt\ , \qquad (11)$$

όπου αντικαταστήσαμε την δύναμη της τριβής. Το μέγεθος $\dfrac{ds}{dt}$ ισούται με την ταχύτητα του σημείου της μπάλας που εφάπτεται στο δάπεδο, ως προς ακίνητο παρατηρητή. Επειδή η μπάλα έχει και μεταφορική και περιστροφική κίνηση η ταχύτητα αυτή ισούται με

$$\frac{ds}{dt}=V(t)-R\omega(t)\ . \qquad (12)$$

Ο όρος V(t) είναι η συνεισφορά της μεταφορικής κίνησης, ενώ ο όρος –Rω(t) είναι η συνεισφορά της περιστροφική κίνησης της μπάλας.

$$V(t) = V_0 + at = V_0 - \mu g t$$
$$\omega(t) = a_\gamma t = -(a / kR)t = (\mu g / kR)t \quad , \qquad (13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις (4) και (8).
Αντικαθιστούμε την (13) στην (12) :

$$\frac{ds}{dt} = V_0 - \frac{1+k}{k} \mu g t$$

και ολοκληρώνοντας από την (11) βρίσκουμε

$$W_T = -\mu m g \int_0^t (V_0 - \frac{1+k}{k} \mu g t) dt =$$
$$-\mu m g (V_0 t - \frac{1+k}{2k} \mu g t^2)$$

Αντικαθιστούμε τον χρόνο από την (9) και βρίσκουμε

$$W_T = -\frac{1}{2} m V_0^2 \frac{k}{1+k}$$