ΕΡΓΑΣΙΑ 2

(παράδοση 30/1/2005)

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

1. (a) Αποδείξτε ότι

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$$

   (b) Αποδείξτε ότι

$$S_n = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x$$

2. (a) Να δείξετε ότι

$$\frac{(\cos x - \cos 3x)(\sin 8x + \sin 2x)}{(\sin 5x - \sin x)(\cos 4x - \cos 6x)} = 1$$

   Υπο ποίες συνθήκες ισχύει ο παραπάνω τύπος;

   (b) Να δείξετε ότι

$$\frac{\sin x - \sin 5x + \sin 9x - \sin 13x}{\cos x - \cos 5x - \cos 9x + \cos 13x} = \cot 4x$$

   Υπο ποίες συνθήκες ισχύει ο παραπάνω τύπος;

3. Σύμφωνα με τον κανόνα του L' Hospital όταν για δύο συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ έχουμε ότι $\lim_{x->x_0} f(x) = 0 = \lim_{x->x_0} g(x)$ ή $\lim_{x->x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x->x_0} g(x)$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$$

   Στα παραπάνω το σημείο x_0 μπορεί να είναι ένα από τα σημεία $\pm\infty$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital (όπου είναι εφαρμόσιμος) να βρείτε τα όρια των παρακάτω παραστάσεων:

   (a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2 - 4x + 5}{9x^2 + 6x - 8}$$

   (b)

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+3}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$$

4. (a) Για την $f(x)=-\sin x\cos 3x$, υπολογίστε την $f'(\pi/3),\ f''(\pi/3),\ f'''(\pi/3)$.

   (b) Να μελετηθεί η συνάρτηση

   $$y=f(x)=4\sin x-3\cos x$$

   στο διάστημα $[0,2\pi]$.

5. Βρείτε την παράγωγο $(dy/dx=y')$ των παρακάτω συναρτήσεων (μπορείτε να εκφράσετε το αποτέλεσμα συναρτήσει του x και y, δηλ. $y'(x)=F(x,y(x))$).

   (a)

   $$xy^3-3x^2=xy+6$$

   (b)

   $$\mathrm{e}^{xy}+y\,\ln x=\cos 2x$$

   (c)

   $$y=\frac{(1-\mathrm{e}^{-x/t})}{\sqrt{x}}$$

   (d) Βρείτε την δεύτερη παράγωγο (y'') της συνάρτησης του προηγουμένου υποερωτήματος.

6. Ενα σωματίδιο κινείται στο χώρο σε τροχιά που περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}=\vec{r}(t)$, όπου t είναι ο χρόνος μετρούμενος από κάποια αρχική χρονική στιγμή. Αν $v=|d\vec{r}/dt|=ds/dt$ είναι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου, (s είναι το μήκος τόξου κατά μήκους της τροχιάς του, μετρούμενο από κάποια αρχική θέση), να δείξετε ότι η επιτάχυνσή του, $\vec{a}$, (δηλαδή η πρώτη παράγωγος της ταχύτητάς του) δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{T}+\frac{v^2}{\rho}\hat{N},$$

όπου $\hat{T}$ και $\hat{N}$ είναι το εφαπτόμενο στην τροχιά και το κάθετο μοναδιαία διανύσματα, αντιστοίχως. Επίσης, το ρ είναι:

$$\rho = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-1/2}.$$

7. Βρείτε τα ολοκληρώματα:

   (a)
   $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$
   (υπόδ.: εφαρμόστε το μετασχηματισμό $x = 2\tan z$)

   (b)
   $$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

   (c)
   $$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$$

   (d) Να δείξετε ότι:
   $$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

8. Να βρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται

   (a) από την παραβολή $y = f(x) = x^2 - 7x + 6$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 6$

   (b) από την καμπύλη $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ και τον άξονα των x

   (c) από τις παραβολές $y = f(x) = 6x - x^2$ και $y = g(x) = x^2 - 2x$

9. (a) Να βρεθεί η εξίσωση της οικογένειας των ευθειών που περνούν από τα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, b)$ έτσι ώστε $a + b = 6$ (υποδ.: η εξίσωση θα έχει παράμετρο λ.χ. το a). Να βρεθεί η ευθεία της οικογένειας που είναι παράλληλη στην $\epsilon : 3x - y + 2 = 0$.

   (b) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\epsilon_1 : 2x - 3y + 5 = 0$ και $\epsilon_2 : 4x - 6y + 9 = 0$.

10. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μιας έλλειψης από μια εφαπτομένη της είναι σταθερό (υποδ.: Να χρησιμοποιήσετε αφού αποδείξετε τον τύπο που δίνει την απόσταση σημείου από ευθεία, βλ. σελ. 174 του βιβλίου).