Λύσεις 1^{ης} Εργασίας

1. Γράψτε και σχεδιάστε ποιοτικά στο ίδιο διάγραμμα καθένα από τα επόμενα διανύσματα στη μορφή $x\vec{i} + y\vec{j}$:

(α) Το διάνυσμα που συνδέει την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με το σημείο P(2,-3).

(β) Το διάνυσμα που συνδέει τα σημεία $P_1(2,3)$ και $P_2(4,2)$ με πέρας το P_2.

(γ) το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $3\vec{i} + 4\vec{j}$.

(δ) το διάνυσμα που έχει μέτρο 6 και κατεύθυνση 60^0 (εντός του πρώτου τεταρτημορίου στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων).

(Μονάδες: 4)

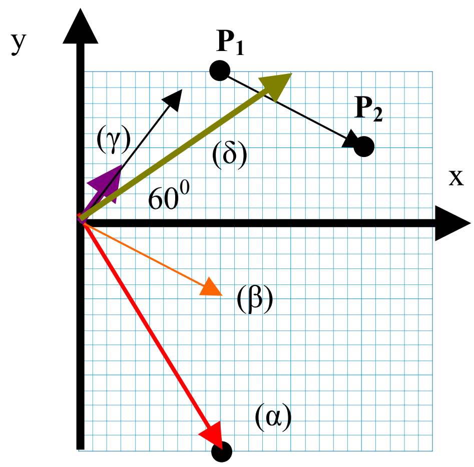
Λύση

(α) $2\vec{i} - 3\vec{j}$

(β) $(4-2)\vec{i} + (2-3)\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$

(γ) $\hat{n} = \dfrac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3/5\vec{i} + 4/5\vec{j}$

(δ) $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 36 \\ \tan 60^0 &= \frac{y}{x} = \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6,-4)$ και $\vec{\beta} = (-2,2)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες: 6)

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{p}$, όπου $\vec{p} \perp \vec{\alpha}$. Το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}^2 + \vec{p} \cdot \vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2$$

$$6(-2)+(-4)\cdot 2=\lambda\cdot 52$$
$$-20=52\lambda$$
$$\lambda=-\frac{5}{13}$$

Επομένως $\vec{\beta}=-\frac{5}{13}\vec{\alpha}+\vec{p}$

$$\vec{p}=\vec{\beta}+\frac{5}{13}\vec{\alpha}=(-2,2)+\frac{5}{13}(6,-4)=\left(\frac{4}{13},\frac{6}{13}\right)$$

Τελικά $\vec{\beta}=-\frac{5}{13}\vec{\alpha}+\left(\frac{4}{13},\frac{6}{13}\right)$.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(α). Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$$\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0.$$

Πότε ισχύει το "=";

(β) Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες: 8)

<u>Λύση</u>

(α) Η σχέση $\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0$ γράφεται ισοδύναμα ως $(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})^2\geq 0$, που είναι προφανές ότι ισχύει.

Το "=" ισχύει, αν και μόνο αν $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ ή, ισοδύναμα, $\lambda\vec{\alpha}=-\mu\vec{\beta}$.

Αν $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\frac{-\mu}{\lambda}\vec{\beta}$, οπότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$, που δεν ισχύει γιατί τα διανύσματα είναι μη συγγραμμικά.

Επομένως $\lambda=0$, οπότε $\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ και άρα $\mu=0$.

Άρα το "=" ισχύει, αν και μόνο αν $\lambda=\mu=0$.

(β) Αν ω είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το $\vec{u}$ σχηματίζει με το $\vec{\alpha}$ γωνία ϕ_1 και με το $\vec{\beta}$ γωνία ϕ_2, τότε έχουμε:

$$\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\alpha}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$
$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|\,\text{συν}\phi_1=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\omega$$
$$|\vec{u}|\cdot\text{συν}\phi_1=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,(1+\text{συν}\omega)$$
$$\text{συν}\phi_1=\frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\text{συν}\omega). \qquad (1)$$

Ομοίως έχουμε: $\vec{u} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{u} = |\vec{\beta}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + |\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}^2$$

$$|\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|\,\text{συν}\phi_2 = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\omega + |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|^2$$

$$|\vec{u}|\cdot\text{συν}\phi_2 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,(1+\text{συν}\omega)$$

$$\text{συν}\phi_2 = \frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\text{συν}\omega). \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\text{συν}\phi_1 = \text{συν}\phi_2$, άρα $\phi_1 = \phi_2$.

4. (α) Υπολογίστε το μήκος των διαγωνίων και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ και $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

(β) Αν $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ και $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ δείξτε ότι $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$. Σχεδιάστε ποιοτικά το διάνυσμα $\vec{d} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

(Μονάδες: 8)

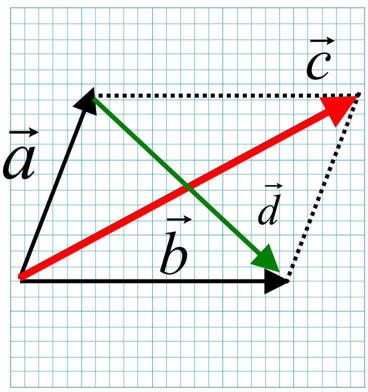
Λύση

(α)

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ Άρα το μήκος της διαγωνίου είναι $|\vec{c}| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$.

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ Άρα το μήκος της διαγωνίου είναι $|\vec{d}| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$

Εμβαδόν $= |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{6}$



(β)

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) =$

$$= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\times\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\times\left[(b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}\right]$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3-b_3c_2) & (b_3c_1-b_1c_3) & (b_1c_2-b_2c_1) \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+\vec{j}b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+\vec{k}b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)$$

$$-\vec{i}c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+\vec{j}c_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+\vec{k}c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$=\vec{b}(a\cdot c)-\vec{c}(a\cdot b)$$

Θέτω

$(\vec{a}\cdot\vec{c})=\lambda$

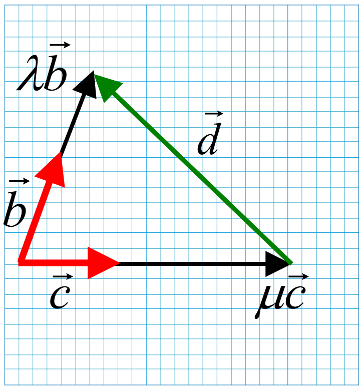
και

$(\vec{a}\cdot\vec{b})=\mu$

Άρα

$\vec{d}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda\vec{b}-\mu\vec{c}$

όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί



5. Δίνονται τα σημεία P(3,1,-2) και Q(-1,3,4).

(α) Προσδιορίστε το διάνυσμα PQ και υπολογίστε το μέτρο του.

(β) Αν O είναι η αρχή των αξόνων, προσδιορίστε τα μέσα των πλευρών του τριγώνου OPQ.

(γ) Προσδιορίστε τα διανύσματα των διαμέσων του τριγώνου

(δ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

(Μονάδες: 6)

<u>Λύση</u>

(α) $\vec{PQ}=-4\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}, |\vec{PQ}|=\sqrt{56}$

(β) A(3/2, ½, -1), B(-1/2, 3/2, 2) και

επειδή

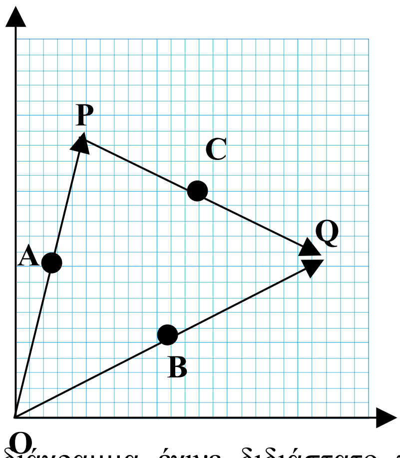
$$\vec{OC}=\frac{\vec{OP}+\vec{OQ}}{2}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

(γ) $\vec{OC} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ (προηγούμενο ερώτημα)

$$\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = (-1/2, 3/2, 2) - (3, 1, -2)$$
$$= (-7/2, 1/2, 4)$$

$$\vec{QA} = \vec{OA} - \vec{OQ} = (-3/2, 1/2, -1) - (-1, 3, 4)$$
$$= (-1/2, -5/2, -5)$$

(δ)Εμβαδόν $= \frac{1}{2}\left|\vec{OP} \times \vec{OQ}\right| = 5\sqrt{3}$



Το διάγραμμα έγινε διδιάστατο για λόγους απλότητας

6. Δείξτε κατά πόσο οι παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς ή ψευδείς για 2 επι 2 πίνακες.

(α). $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(β). $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(γ). $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(δ). $\det(A^T) = \det(A)$

(Μονάδες: 7

Λύση

a. Αληθές

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
\det(A) &= ad - bc \qquad \det(B) = eh - fg \\
\det(A)\det(B) &= adeh - adfg - bceh + bcfg \\
AB &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \\
\det(AB) &= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \\
&= acef + adeh + bcfg + bdgh - acef - adfg - bceh - bdgh \\
&= adeh + bcfg - adfg - bceh
\end{aligned}$$

b. Αληθές

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \qquad ad - bc \neq 0 \text{ αφού υπάρχει ο } A^{-1}$$

c. Ψευδές. Φαίνεται από το παρακάτω αντιπαράδειγμα.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -1 \qquad \det(B) = 2 \qquad \det(A+B) = 2 \qquad -1 + 2 \neq 2$$

d. Αληθές

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - cb \qquad \det(A^T) = ad - bc$$

Αυτοί είναι ίσοι αφού $cb = bc$.

7. Λύστε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

με χρήση του κανόνα του Cramer.

(Μονάδες: 6)

<u>Λύση</u>

Πρώτα υπολογίζουμε την $\det A$:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{R2+R3}}}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

Τώρα αντικαθιστούμε

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

για την στήλη 1 και υπολογίζουμε

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} \underset{\substack{\uparrow \\ -\mathrm{C2+C3}}}{=} \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Όμοια,

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{-4} \underset{\substack{\uparrow \\ -4\mathrm{C3+C2}}}{=} \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}{-4} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{R2+R3} \\ \mathrm{R1+R2}}}{=} \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Με αντικατάσταση μπορούμε να κάνουμε επαλήθευση.

8. Βρείτε όλες τις τιμές των a,b,c, για τις οποίες ο A είναι συμμετρικός:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

(Μονάδες: 6)

Λύση

Έστω ότι ο A είναι συμμετρικός. Τότε οι ισότητες:
$a_{12} = a_{21}$,
$a_{13} = a_{31}$,
$a_{23} = a_{32}$ δίνουν:
$a - 2b + 2c = 3$
$2a + b + c = 0$
$a + c = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{A_2-2A_1\to A_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{A_3-A_1\to A_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{A_2-2A_3\to A_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{A_3-2A_2\to A_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array}\right]$$

Έτσι το σύνολο των λύσεων είναι: {(11, -9, -13)}.

9. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} x & a_1 & 0 & 0 & \dots & \\ x & x & a_2 & 0 & \dots & \\ x & x & x & a_3 & \dots & \\ . & . & . & . & . & . \\ x & x & x & x & \dots & a_{n-1} \\ x & x & x & x & \dots & x \end{bmatrix}.$$

(Υπόδειξη: Δοκιμάστε αρχικά έναν πίνακα 3x3 και γενικεύστε την διαδικασία)

(Μονάδες: 8)

Λύση

Αρχίζοντας από την τελευταία σειρά αφαιρούμε κάθε σειρά από την επόμενη σειρά:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} x & a_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & x-a_1 & a_2 & \dots & & \\ 0 & 0 & x-a_2 & \dots & & \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Έτσι καταλήγουμε στην ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα και επομένως: detA = x(x - a1)(x - a2) ... (x - an-1)

10. (α). Πόσα στοιχεία είναι δυνατον να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα συμμετρικό πίνακα τάξης n για τον οποίο ισχύει $\{a_{ij} = a_{ji}\}$;

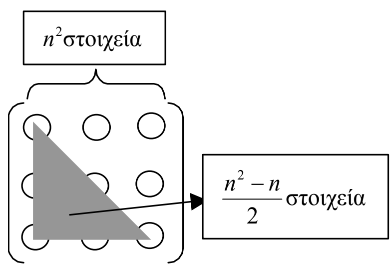
(β) Πόσα στοιχεία είναι δυνατον να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα αντισυμμετρικό πίνακα τάξης n για τον οποίο ισχύει $\{a_{ij} = -a_{ji}\}$;

(Υπόδειξη: Βρείτε το αριθμό των μη τετριμμένων σχέσεων μεταξύ των στοιχείων των πινάκων και αφαιρέστε τον απο τον συνολικό αριθμό των στοιχείων των πινάκων)

(Μονάδες: 5)

Λύση

$$(\alpha.)\, n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\beta.)\, n^2 - \frac{n^2-n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$$



Στην (β) αφαιρούμε τα n στοιχεία της διαγωνίου γιατί

είναι μηδενικά

11. (1.) Πιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ και

(β) $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

(2.) Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2\lambda x + 3} \ldots \mu\varepsilon \ldots \lambda \in \Re$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\Re$.

(Μονάδες: 6)

<u>Λύση</u>

1.) Α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Το τριώνυμο όμως $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς **1** και **2**. Ετσι η ανίσωση $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ αληθεύει όταν και μόνο όταν

$x \leq 1$ και $x \geq 2$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο **$A=(-\infty,1] \cup [2,+\infty)$**.

Β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$1 - \ln x \geq 0$

Είναι όμως $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leq e$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο **$A=(0,e]$**.

2.) Για να είναι το πεδίο ορισμού της f όλο το $\Re$ πρέπει:

$x^2 + 2\lambda x + 3 \neq 0$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει: **Δ < 0.** Οπότε:

$4\lambda^2 - 12 < 0 \Rightarrow 4\lambda^2 < 12 \Rightarrow \lambda^2 < 3 \Rightarrow$

$-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$

12. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $-x^2+(2\mu-1)x+3\mu^2+5=0$ έχει δύο άνισες ρίζες, για κάθε $\mu \in \Re$

(Μονάδες: 8)

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=(2\mu-1)^2+4(3\mu^2+5)=16\mu^2-4\mu+21$. Η διακρίνουσα αυτή είναι ένα τριώνυμο, που ανάλογα με το πρόσημό του μπορούμε να δώσουμε απάντηση στο πρόβλημα που μας τέθηκε.

Γι'αυτό βρίσκουμε τη διακρίνουσα του νέου τριωνύμου.

$\Delta' = 16-4\cdot 16\cdot 21=-1328<0$. Αυτό σημαίνει πως το τριώνυμο αυτό είναι ομόσημο με το συντελεστή του μ^2, δηλαδή με το 16 που είναι θετικό για κάθε $\mu \in \Re$. Επομένως η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι θετική για κάθε $\mu \in \Re$. Οπότε και η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε $\mu \in \Re$.

13. Αν $f(x)=(2+\alpha^2)x+a+2\beta$ για κάθε $x \in \Re$, τότε να προσδιορίσετε τα α,β ώστε για κάθε $x \in \Re$ να ισχύει $(fof)(x)=9x+19$

(Μονάδες: 8)

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τη σύνθετη συνάρτηση

$$g(x)=(fof)(x) \Rightarrow g(x)=(2+\alpha^2)\left[(2+\alpha^2)x+a+2\beta\right]+\alpha+2\beta \Rightarrow$$
$$g(x)=(2+\alpha^2)^2x+(\alpha+2\beta)(\alpha^2+3)\cdots\cdots(1)$$

Εχουμε: $g(x)=9x+19$ και από την (1)

$(2+a^2)^2=9$ $\quad$ $2+a^2=\pm 3$ ή ρίζα –3 απορρίπτεται γιατί το $2+a^2$ είναι πάντα θετικό για κάθε τιμή του α.

$(a+2\beta)(a^2+3)=19$

$2+a^2=3 \quad \Rightarrow a^2=1$

Για $a = 1$ έχουμε: $4(1+2\beta) = 19 \Rightarrow 2\beta = \frac{15}{4} \Rightarrow \beta = \frac{15}{8}$

Για $a = -1$ έχουμε: $4(2\beta -) = 19 \Rightarrow 2\beta = \frac{23}{4} \Rightarrow \beta = \frac{23}{8}$

Οπότε οι λύσεις είναι: (1,15/8) και (-1,23/8).

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι1-1 .

(β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}της f .

(Μονάδες: 6)

<u>Λύση</u>

i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [1,+\infty))$(αφού $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1)$ Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε:

$\sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1}$ οπότε $(\sqrt{x_1 - 1})^2 = (\sqrt{x_2 - 1})^2$. Δηλαδή

$x_1 - 1 = x_2 - 1$, οπότε $x_1 = x_2$

Αρα η f είναι 1-1 (ένα προς ένα).

ii) Επειδή (από το (i) η f είναι 1-1, ορίζεται η αντίστροφή της $f^{-1} : f(A) \to \mathrm{R}$

Για να βρούμε το σύνολο $f(A)$, θεωρούμε την εξίσωση

$y = f(x)$ (1)

και βρίσκουμε εκείνα τα y για τα οποία η (1) έχει λύση, ως προς x , στο A.

Από την (1) ισοδύναμα έχουμε:

$y = \sqrt{x-1}$ (2)

Για $y < 0$ η (2) είναι αδύνατη.

Για $y \geq 0$ η (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^2 = (\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + y^2$$

οπότε $x = 1 + y^2 \in A = [1,+\infty),)$συνεπώς $f(A) = [0,+\infty)$.

Για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει επομένως $x \in A$ τέτοιο, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = 1 + y^2 \tag{3}$$

Επίσης είναι

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^1(y) \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$f^{-1}(y) = 1 + y^2$$

Επειδή όμως συνηθίζουμε να ονομάζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης με το γράμμα x, γράφουμε τον τύπο της f^{-1} ως εξής:

$f^{-1}(x) = 1 + x^2$ με $x \in [0,+\infty) = f(A)$.

Το σύνολο $f(A)$ είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $A = [1,+\infty)$.

15. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ είναι 1-1, τότε η εξίσωση $f(x^3 - x^2) = f(-x)$:

I) έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

II) είναι αδύνατη στο $\Re$.

III) έχει τουλάχιστον δύο ρίζες άνισες στο $\Re$.

Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

(Μονάδες: 8)

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1, για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$, οπότε η εξίσωση $f(x^3 - x^2) = f(-x)$ ισοδύναμα γράφεται:

$x^3 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) = 0$ δηλαδή:

$x = 0$ ή $x^2 - x + 1 = 0$. Η τελευταία όμως εξίσωση είναι αδύνατη στο $\Re$ αφού $\Delta = -3 < 0$.

Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα, οπότε σωστή είναι η απάντηση Α.