ΘΕΜΑ 1

Α. Μονωτικός σφαιρικός φλοιός είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο $Q_2 = 1.5$ μC. Η εσωτερική του ακτίνα είναι $R_1 = 15.0$cm και η εξωτερική του $R_2 = 25.0$cm. Αν στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού υπάρχει σημειακό φορτίο $Q_1 = 0.5$ μC, υπολογίστε: Α) την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στον χώρο. Β) Την ένταση για $R = 2 \cdot R_2$.

Β. Σωμάτιο με θετικό φορτίο q και μάζα $m = 1{,}50 \mathrm{x} 10^{-15}$ kg κινείται μέσα σε μια περιοχή όπου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -0.22\hat{k}\ (T)$. Σε κάποια στιγμή η ταχύτητα του σωματίου είναι $\vec{u} = (1{,}00\ 10^6\ \mathrm{m/s})\left(4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}\right)$ και η δύναμη F που ασκείται πάνω στο σωμάτιο έχει μέτρο 2,00 N.

a) Προσδιορίστε το φορτίο q.
b) Υπολογίστε την επιτάχυνση α του σωματίου.
c) Εξηγήστε γιατί η τροχιά του σωματίου είναι ελικοειδής και βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας R της κυκλικής συνιστώσας της ελικοειδούς τροχιάς.

Υποθέστε ότι το βαρυτικό πεδίο δεν επηρεάζει την κίνηση του σωματίου.

Λύση

Α. Λόγω συμμετρίας, για να προσδιορίσουμε την ένταση παντού στο χώρο αρκεί να μελετήσουμε την ένταση σε μία τυχαία διεύθυνση, έστω την r. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_o}$, χωρίζοντας των χώρο σε τρείς περιοχές:

$r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ και $r > R_2$.

Επειδή λόγω συμμετρίας, πάνω σε κάθε σφαίρα Gauss ακτίνας r με κέντρο το κέντρο του σφαιρικού φλοιού, το **E** είναι σταθερό μεν κατά μέτρο έχει δε την διεύθυνση και φορά της ακτίνος r (και συνεπώς θα είναι παράλληλο και ομόρροπο με το διάνυσμα d**A**), θα έχουμε τελικά κατα μέτρο ότι $E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = Q_{in} / \varepsilon_0$ όπου Q_{in} το φορτίο που θα περικλείεται στην σφαίρα Gauss και τελικά: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{Q_{in}}}{\mathbf{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_o}}$

α) $r < R_1$:

Στην περιοχή αυτή το $Q_{in} = Q_1$, συνεπώς $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{Q_1}}{\mathbf{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_o}}$

β) $R_1 < r < R_2$

Για να υπολογίσουμε το Q_{in} θεωρούμε ένα λεπτό φλοιό πάχους dr με εσωτερική ακτίνα r. Αυτός θα έχει όγκο $dV = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$ και φορτίο $dQ = \rho \cdot dV$, όπου ρ η πυκνότητα φορτίου του φλοιού η οποία ισούται με $\rho = \frac{Q_2}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}$

Συνεπώς το φορτίο που θα περικλείεται σε σφαίρα Gauss ακτίνας r, όπου $R_1 < r < R_2$, θα ισούται με

$$\mathbf{Q_{in}} = \mathbf{Q_1} + 4\cdot\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\pi}\cdot\int_{R_1}^{r}\mathbf{r^2}\cdot\mathbf{dr} = \mathbf{Q_1} + \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\pi}\cdot\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\cdot(\mathbf{r^3} - \mathbf{R_1^3}) = \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2}\cdot\frac{(\mathbf{r^3} - \mathbf{R_1^3})}{(\mathbf{R_2^3} - \mathbf{R_1^3})}$$

γ) $r > R_2$

Στην περιοχή αυτή το $Q_{in} = Q_1 + Q_2$, συνεπώς $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2}}{\mathbf{4}\cdot\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{r^2}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_o}$

Β.

α) Η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο είναι η $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{B}}$.

Αν αντικαταστήσουμε τις **u** και **B** στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\mathbf{F} = q(-0,220)\left(1,00\times10^6\right)\left(4\mathbf{i}\times\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\times\mathbf{k} + 2\mathbf{k}\times\mathbf{k}\right)\rightarrow$$

$$\mathbf{F} = q\left(2,20\times10^5\right)\left(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\right)$$

$$F = q\left(2,20\times10^5\right)\sqrt{3^2+4^2} = 5q\left(2,20\times10^5\right)\rightarrow q = \frac{F}{5\left(2,20\times10^5\right)} = 1,82\times10^{-6}\,\mathrm{C}$$

b) Η επιτάχυνση του σωματίου είναι

$\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{F}}{m}$ αλλά $\mathbf{F} = q\left(2,20\times10^5\right)\left(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\right)$. Άρα $\mathbf{F} = 0,400\left(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\right)\mathrm{N}$ και

$\boldsymbol{\alpha} = 2,67\times10^{14}\left(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\right)\mathrm{m/s}$

c) Η δύναμη ***F*** έχει μόνο συνιστώσες F_x και F_y, άρα βρίσκεται στο επίπεδο xy**.** Έτσι στην διεύθυνση z το σωμάτιο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_z = 12,0\times10^6\,\mathrm{m/s}$**.**

Στο επίπεδο xy η δύναμη ***F*** προκαλεί στο σωμάτιο επιτάχυνση σταθερού μέτρου. Η προβολή της ταχύτητας του σωματίου στο επίπεδο xy είναι (τη στιγμή που ισχύει η έκφραση της εκφώνησης)

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} = (1,00x10^6\,\mathrm{m/s})\left(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\right).$$

Τελικά το σωμάτιο θα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στο επίπεδο xy, ενώ ταυτόχρονα μετατοπίζεται κατά τον άξονα z. Η συνισταμένη των δύο αυτών κινήσεων θα είναι **ελικοειδής κίνηση**.

Υπολογισμός ακτίνας *R* κυκλικής τροχιάς:

$\alpha = \dfrac{u_{xy}^2}{R}\rightarrow R = \dfrac{u_{xy}^2}{\alpha}$. Αλλά $u_{xy}^2 = u_x^2 + u_y^2 = 2,50\times10^{13}\,\mathrm{m^2/s^2}$ και

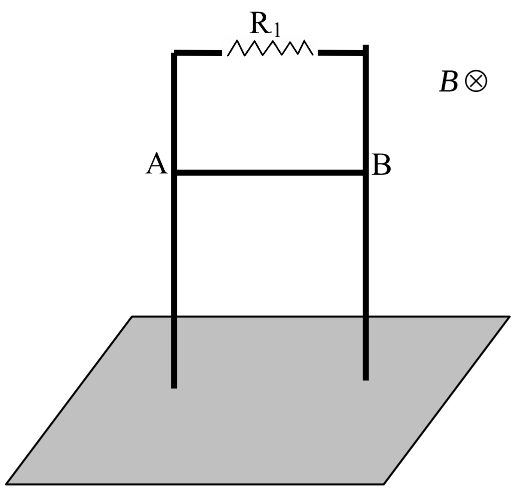
$a = \left(2,67\times10^{14}\right)\sqrt{3^2+4^2} = 1,34\times10^{15}\,\mathrm{m/s^2}$. Άρα $R = 1,88\times10^{-2}\,\mathrm{m}$

ΘΕΜΑ 2

Α. Καλώδιο μεγάλου μήκους αποτελείται από δύο ομοαξονικούς αγωγούς ακτίνας R_1 και R_2. Αν ο πρώτος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι ενώ η επιστροφή γίνεται από τον δεύτερο (θεωρείστε ότι ένα πολύ λεπτό μονωτικό στρώμα χωρίζει τα

δύο ρεύματα). Υπολογίστε την ένταση του μαγνητικού πεδίου για αποστάσεις $\alpha_1 = 0.5 \cdot R_1$ και $\alpha_2 = 2.0 \cdot R_2$ από το κέντρο του αγωγού.
Δίνεται ότι $R_1 = 0.05m$, $R_2 = 0.25m$, $I = 1.0$ A

Β.Μία ηλεκτρική αντίσταση R_1=5Ω συνδέεται με δύο μεταλλικούς αγωγούς αμελητέας αντίστασης πολύ μεγάλου μήκους, Μεταλλική ράβδος ΑΒ μάζας m = 0.5 kg , μήκους l =0.5 m και αντίστασης R_2 =5 Ω τοποθετείται κάθετα στους μεταλλικούς αγωγούς όπως δείχνει το σχήμα και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές. Αν το επίπεδο των αγωγών είναι κάθετο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β = 1 Τ και αφήσουμε τη ράβδο ελεύθερη (ευρισκόμενη πάντα σε επαφή με τους μεταλλικούς αγωγούς), περιγράψτε την κίνηση της ράβδου και υπολογίστε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει.



Λύση

Α.
Λόγω συμμετρίας και αφού ο αγωγός είναι απείρου μήκους, η ένταση του μαγνητικού πεδίου βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον αγωγό και κάθετο στην ακτίνα r, την απόσταση από τον αγωγό. Το μέτρο υπολογίζεται από τον νόμο του Ampere
$\oint B \cdot dl = \mu_o \cdot I$ όπου βάσει των παραπάνω το B είναι το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου και dl το μέτρο της στοιχειώδους μετατόπισης πάνω στην περιφέρεια ακτίνας r, η οποία βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον αγωγό και το Ι το ρεύμα το οποίο περικλείεται από αυτήν την περιφέρεια.

Από αυτή την σχέση και επειδή το B έχει σταθερό μέτρο σε σταθερή απόσταση r η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_o \cdot I_{in}$ και τελικά $B = \dfrac{\mu_o \cdot I_{in}}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Εφαρμόζομε τα παραπάνω για $r = \alpha_1 = 0.5 \cdot R_1$ και για $r = \alpha_2 = 2.0 \cdot R_2$

α) Για $r = \alpha_1 = 0.5 \cdot R_1$

Για να υπολογίσουμε το I_{in}: Επειδή η πυκνότητα του ρευματος είναι σταθερή ισχύει η σχέση:

$\dfrac{I}{\pi \cdot R_1^2} = \dfrac{I_{in}}{\pi \cdot r^2}$ από το οποίο προκύπτει ότι $I_{in} = I \cdot \dfrac{r^2}{R_1^2}$ και τελικά έχουμε

$$B = \frac{\mu_o \cdot \mathrm{I}_{in}}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\mu_o \cdot I \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot R_1^2} = \frac{\mu_o \cdot I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot R_1^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} Wb/(A \cdot m) \cdot 1.0A \cdot 0.5 \cdot 0.05m}{2 \cdot \pi \cdot 0.05^2 \cdot m^2} = 2 \cdot 10^{-6} T$$

β) Για $r = \alpha_2 = 2.0 \cdot R_2$ επειδή βρισκόμαστε έξω από τον αγωγό το $I_{in}=I_1-I_2=0$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου ισούται με μηδέν.

Β) Όταν η ράβδος αφεθεί ελεύθερη, θα επιταχυνθεί προς τα κάτω λόγω του βάρους της mg και θα αποκτήσει ταχύτητα υ. Εφόσον κινείται με ταχύτητα υ μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης Β, θα αναπτυχθεί ΗΕΔ εξ΄ επαγωγής με μέτρο (αυξανόμενο λόγω της επιταχυνόμενης κίνησης):

$E_{\varepsilon\pi} = B\,\upsilon\, l$

και πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα.

Τώρα το κύκλωμα που αποτελείται από τη ράβδο, τους δύο αγωγούς και την αντίσταση αρχίζει και διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης

$$\mathrm{I} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_2} = \frac{B\upsilon l}{R_1 + R_2}$$

Άρα η ράβδος που διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι και βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο θα δέχεται δύναμη Laplace που αντιτίθεται στην κίνησή της (φορά προς τα πάνω)

$\vec{F}_L = \mathrm{I}\vec{l}x\vec{B}$ ή επειδή l, B κάθετα $F_L = BIl = B\frac{B\upsilon l}{R_1 + R_2}l = \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2}\upsilon$

Άρα η συνολική επιτάχυνση της ράβδου θα είναι

$\alpha = \frac{mg - F_L}{m}$ κι αφού η υ αυξάνεται , θα αυξάνεται συνεχώς η $\vec{F}_L$ οπότε σε κάποια στιγμή θα γίνει F_L=mg οπότε η ράβδος θα κινείται ομαλά $(\Sigma\vec{F} = 0)$ με ταχύτητα υ_{max} οπότε

$$\frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2}\upsilon_{max} = mg \Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{mg(R_1 + R_2)}{B^2 l^2}$$

και με αριθμητική αντικατάσταση

$$\upsilon_{max} = \frac{0.5kg\ 10ms^{-2}\ 10\Omega}{1^2 T^2\ 0.5^2 m^2} = 200ms^{-1}$$