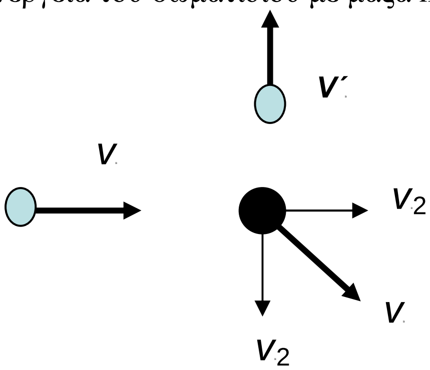
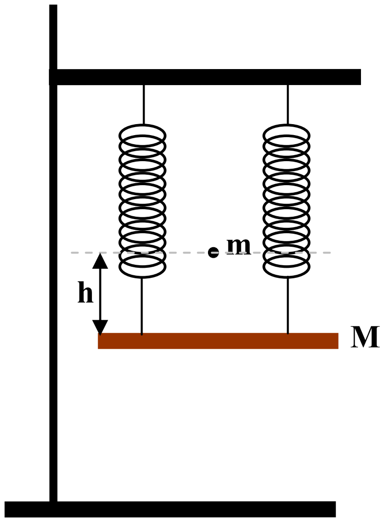
ΘΕΜΑ 1

Α. Ένα σωματίδιο μάζας m_1 προσπίπτει σε σωματίδιο μάζας m_2 το οποίο είναι ακίνητο και συγκρούεται ελαστικά μαζί του. Τα σωματίδια κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς την επίδραση της βαρύτητας. Ποιο είναι το κλάσμα *η* της κινητικής ενέργειας που χάνει (κινητική ενέργεια που χάνει δια της αρχικής κινητικής ενέργειας του) κατά την κρούση το προσπίπτον σωματίδιο, εάν ανακρούεται σε διεύθυνση κάθετη προς την αρχική του διεύθυνση (βλέπε σχήμα); Τι γίνεται η υπόλοιπη κινητική ενέργεια του σωματιδίου με μάζα m_1;



(50% των μονάδων του θέματος)

Β. Ξύλινος ομογενής δίσκος μάζας Μ κρέμεται από δύο όμοια ελατήρια το καθένα με σταθερά D και ηρεμεί. Σώμα σημειακής μάζας m πέφτει από ύψος h από το κέντρο του δίσκου και σφηνώνεται σ’αυτόν (βλ. σχήμα). Βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος. (οι τριβές αμελούνται). Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



(50% των μονάδων του θέματος)

<u>Λύση</u>

<u>Α.</u>

Διατήρηση της ορμής,

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_{2x} + m_2\vec{v}_{2y} \Rightarrow m_1\vec{v}_1' = -m_2\vec{v}_{2y}, m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_{2x} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{2x} = \frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1, \vec{v}_{2y} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1' \Rightarrow \vec{v}_{2x}^2 + \vec{v}_{2y}^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \vec{v}_1^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \vec{v}_1'^2 \quad (1)$$

Ελαστική κρούση→διατήρηση της κινητικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_{2x}^2 + \vec{v}_{2y}^2) \Rightarrow$$

$$m_1\vec{v}_1^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + m_2(\vec{v}_{2x}^2 + \vec{v}_{2y}^2) = m_1\vec{v}_1'^2 + m_2(\vec{v}_{2x}^2 + \vec{v}_{2y}^2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$m_1\vec{v}_1^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\vec{v}_1^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\vec{v}_1'^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2}\vec{v}_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}\vec{v}_1'^2 \Rightarrow$$

$$m_1\vec{v}_1^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2}\vec{v}_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}\vec{v}_1'^2 \Rightarrow m_1\vec{v}_1^2 - \frac{m_1^2}{m_2}\vec{v}_1^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2}\vec{v}_1'^2 \Rightarrow$$

$$\vec{v}_1^2\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_2}\right) = \vec{v}_1'^2\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) \Rightarrow \frac{\vec{v}_1'^2}{\vec{v}_1^2} = \frac{m_1 - \frac{m_1^2}{m_2}}{m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Συνεπώς:

$$\eta_1 = \frac{\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 - \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2} = 1 - \frac{\vec{v}_1'^2}{\vec{v}_1^2} = 1 - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1}{m_2 + m_1}$$

Η κινητική ενέργεια που χάνεται από το σώμα μάζας m_1 γίνεται κινητική ενέργεια του σώματος m_2.

<u>Β.</u>

Η ισοδύναμη σταθερά των δύο ελατηρίων είναι $D_{ολ} = D + D = 2D$ ενώ η περίοδος $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{2D}}$. Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = \sqrt{\frac{2D}{m+M}}$

Αρκεί να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος και να χρησιμοποιηθεί η σχέση $A = \frac{v_{\max}}{\omega}$

Η ταχύτητα του σωματιδίου m πριν την κρούση είναι $u = \sqrt{2gh}$ (1)

Η ταχύτητα του συσσωματώματος βρίσκεται από την αρχή διατήρησης της ορμής

$$mu = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{mu}{m+M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$$

Το νέο σημείο ισορροπίας βρίσκεται από τη σχέση $X_0 = \frac{(M+m)g}{2D}$ και επομένως το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει απομάκρυνση $X_0 - x_0 = \frac{(M+m)g}{2D} - \frac{Mg}{2D} = \frac{mg}{2D}$ και επομένως συνολική μηχανική ενέργεια $E_{μηχ} = \frac{1}{2}(2D)\left(\frac{mg}{2D}\right)^2 + \frac{1}{2}(M+m)v^2$. Το συσσωμάτωμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του όταν όλη η μηχανική του ενέργεια γίνει κινητική. Οπότε:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}(2D)\left(\frac{mg}{2D}\right)^2 + \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{(M+m)^2}2gh \Rightarrow$$

$$v_{\max}^2 = \frac{(mg)^2}{2(M+m)D} + \frac{2m^2gh}{(M+m)^2} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{(mg)^2(m+M)+4m^2Dgh}{2D(m+M)^2}}$$

Οπότε τελικά έχουμε:

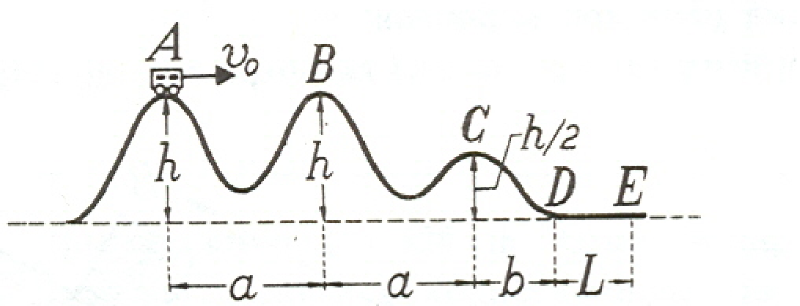
$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{\sqrt{\dfrac{(mg)^2(m+M)+4m^2Dgh}{2D(m+M)^2}}}{\sqrt{\dfrac{2D}{m+M}}} = \sqrt{\frac{(mg)^2(m+M)+4m^2Dgh}{4D^2(m+M)}}$$

ΘΕΜΑ 2

A. Τραινάκι μάζας m ξεκινάει από το σημείο A με οριζόντια ταχύτητα υ_0 για να διανύσει τη λεία (χωρίς τριβές) διαδρομή του σχήματος. Θεωρείστε ότι το τραινάκι συμπεριφέρεται ως υλικό σωμάτιο και ότι ποτέ δεν φεύγει από τις ράγες.

(α) Ποια ταχύτητα θα έχει το τραινάκι στα σημεία B και C?

(β) Ποια σταθερή επιβράδυνση απαιτείται για να σταματήσει στο σημείο E αν αρχίσει το φρενάρισμα στο σημείο D?



Δίνονται τα h,α,b,L και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

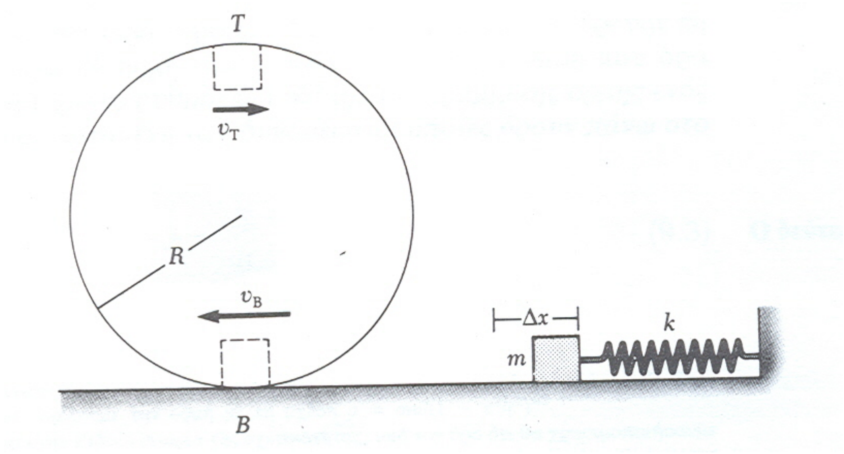
(30% των μονάδων του θέματος)

B. Σώμα μάζας m = 0.5kg ωθείται προς οριζόντιο ελατήριο και το συσπειρώνει κατά Δx. Η σταθερά του ελατηρίου είναι κ=450 N/m. Όταν το σώμα αφεθεί ελεύθερο κινείται κατά μήκος οριζόντιας λείας επιφάνειας μέχρι το σημείο B που είναι το χαμηλότερο σημείο μιας κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς ακτίνας R = 1m και συνεχίζει να κινείται επί της κυκλικής τροχιάς που δεν είναι λεία. Η ταχύτητα στο B είναι υ_B = 12m/s και το σώμα υφίσταται μέση δύναμη τριβής 7N καθώς ολισθαίνει προς τα πάνω στην κυκλική τροχιά.

(α) Ποια ήταν η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου?

(β) Θα φτάσει το σώμα στην κορυφή της τροχιάς ή θα πέσει πριν φτάσει στην κορυφή? Αιτιολογείστε.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=10m/s^2.



(70% των μονάδων του θέματος)

Λύση

Α.

Σημείο Β:

Αφού δεν υπάρχουν τριβές η ολική Μηχανική ενέργεια είναι σταθερή:

$E_{\mathrm{M}\eta\chi,A}=E_{\mathrm{M}\eta\chi,B}=E_{\mathrm{M}\eta\chi,C}$

άρα

$$E_{\mathrm{M}\eta\chi,A}=E_{\mathrm{M}\eta\chi,B} \quad\Rightarrow\quad E_{K,A}+E_{\Delta,A}=E_{K,B}+E_{\Delta,B} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\ 2}+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_B^{\ 2}+mgh \quad\Rightarrow\quad \upsilon_B=\upsilon_o \qquad (1)$$

Σημείο C:

$$E_{\mathrm{M}\eta\chi,A}=E_{\mathrm{M}\eta\chi,C} \quad\Rightarrow\quad E_{K,A}+E_{\Delta,A}=E_{K,C}+E_{\Delta,C} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\ 2}+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_C^{\ 2}+mg\frac{h}{2} \quad\Rightarrow\quad \upsilon_C=\sqrt{\upsilon_o^2+gh} \qquad (2)$$

(β) Σημείο D:

$$E_{\mathrm{M}\eta\chi,A}=E_{\mathrm{M}\eta\chi,C} \quad\Rightarrow\quad E_{K,A}+E_{\Delta,A}=E_{K,D}+E_{\Delta,D} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\ 2}+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_D^{\ 2}+0 \quad\Rightarrow\quad \upsilon_D=\sqrt{\upsilon_o^2+2gh} \qquad (3)$$

Για το σημείο Ε πρέπει η Ενέργεια που έχει στο D να καταναλωθεί ως έργο της δύναμης επιβράδυνσης:

Επομένως αν F η δύναμη της επιβράδυνσης θα πρέπει

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\ 2}+mgh=FL \Rightarrow F=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\ 2}+mgh}{L} \Rightarrow a=\frac{F}{m}=\frac{\frac{1}{2}\upsilon_o^{\ 2}+gh}{L}$$

B.
(α)

$$E_{\Delta\upsilon\nu,\varepsilon\lambda\alpha\tau} = E_{K\iota\nu,B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$\frac{1}{2}(450\,N/m)(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}(0.5kg)(12\,m/s)^2 \Rightarrow \cdots \Delta x = 0.4m$$

(β)
Αφού στην κυκλική τροχιά υπάρχει τριβή θα ισχύει:

$$W_{\tau\rho\iota\beta} = \Delta E \quad \Rightarrow \quad -fs = (E_{\Delta,T} + E_{K,T}) - (E_{\Delta,B} + E_{K,B}) \quad \Rightarrow$$

$$-f(\pi r) = \left[mg(2R) + \frac{1}{2}m\upsilon_T^{\,2} \right] - \left[mg \cdot 0 + \frac{1}{2}m\upsilon_B^{\,2} \right] \Rightarrow$$

$$-(7Nt)(\pi \cdot 1m) = 0.5kg \cdot (9.81 m/s^2)(2m) + \frac{1}{2}(0.5kg)\upsilon_T^{\,2} - \frac{1}{2}(0.5kg)(12\,m/s)^2$$

$$0.25\upsilon_T^{\,2} = 4.21 \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_T = 4.1m/s$$

Στο σημείο Τ πρέπει:

$$\sum F_T = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \quad \Rightarrow \quad mg + N = \frac{m\upsilon^2}{R} = ma_c$$

Στην οριακή επαφή θα είναι

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = ma_c \quad \Rightarrow \quad a_c = g$$

Άρα το σώμα μένει στην τροχιά για

$$a_c \geq g$$

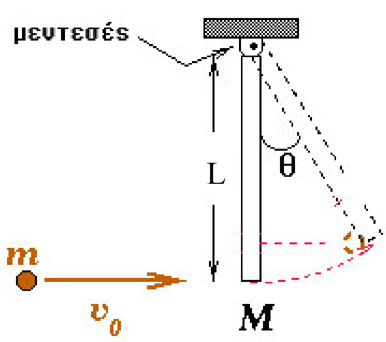
και αφού

$$a_c = \frac{\upsilon_T^{\,2}}{R} = \frac{(4.1m/s)^2}{1m} = 16.8\,m/s^2 \quad > g$$

συνεπάγεται ότι πράγματι το σώμα μένει στην τροχιά.

ΘΕΜΑ 3

Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L κρέμεται από το ταβάνι και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβή από ειδικό «μεντεσέ» (βλέπε σχήμα). Ένα μικρό σώμα μάζας m και αρχικής ταχύτητας υ_0 συγκρούεται με την ράβδο στο κατώτερο άκρο της και κολλάει σε αυτή (ενσωματώνεται). Να βρεθούν:
α) η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-σώμα αμέσως μετά την κρούση και
β) η μέγιστη γωνία θ που διαγράφει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδρανείας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το άκρο της $I=(1/3)ML^2$.



Λύση

Η στροφορμή του συστήματος ράβδου-σώματος ως προς τον μεντεσέ διατηρείται:

$$dL/dt = 0 \quad (1)$$

Η αρχική στροφορμή $L_{αρχ.} = L_m + L_M = mυ_0L + 0$. Μετά την συσσωμάτωση $L_{τελ.} = I_{mM}ω$, όπου βεβαίως I_{mM} είναι η ροπή αδρανείας του συσσωματώματος ράβδου-σώματος και ω η ζητούμενη γωνιακή ταχύτητα. Από το βιβλίο (σελ. 196, Τόμος Β) είναι σαφές ότι η ροπή αδρανείας του συσσωματώματος είναι:

$$I_{mM} = (1/3)ML^2 + mL^2 = (M + 3m)L^2/3 \quad (2)$$

Από την διατήρηση της στροφορμής έχουμε $L_{αρχ.} = L_{τελ.}$:

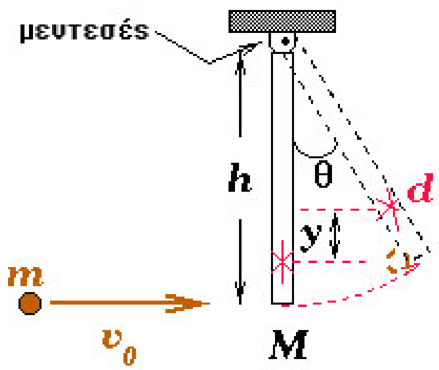
$mυ_0L = (M + 3m)L^2ω/3$, από το οποίο προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \frac{3m\upsilon_0}{(M+3m)L} \quad (3)$$

Η ενέργεια διατηρείται και επομένως μπορούμε να βρούμε το ύψος στο οποίο θα ανέλθει το κέντρο μάζας του συσσωματώματος. Το κέντρο μάζας βρίσκεται εύκολα ως:

$$d = \frac{(M+2m)L}{2(M+m)} \quad (4)$$

όπου d είναι βεβαίως η απόσταση του κέντρου μάζας από τον μεντεσέ (βλέπε σχήμα).



Στην μέγιστη γωνία θ το κέντρο μάζας ανέρχεται κατά απόσταση y. Επομένως

$$(M + m)gy = (1/2)I_{mM}\omega^2 \tag{5}$$

στην οποία αντικαθιστώντας το ω με την εξίσωση (3) που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να υπολογίσουμε το y:

$$y = \frac{3m^2\upsilon_0^2}{2(M+m)\left(M+3m\right)g} \tag{6}$$

Από το σχήμα 2 είναι σαφές ότι cosθ = (d-y)/d και αντικαθιστώντας την τιμή του d και y που υπολογίσαμε πιο πριν έχουμε:

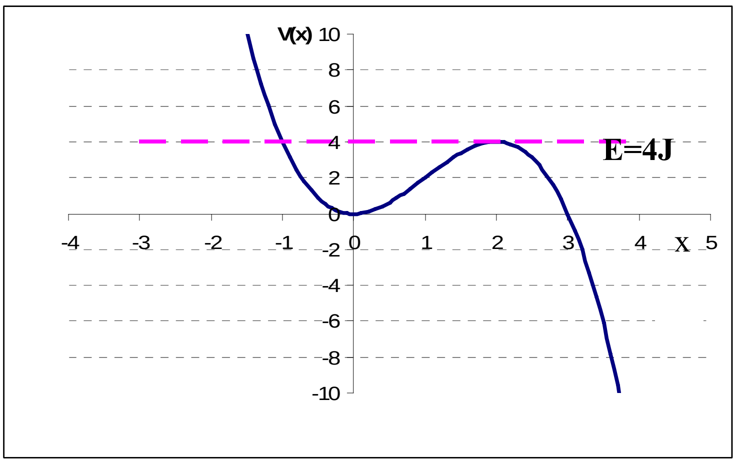
$$\cos\theta = \frac{d-y}{d} = 1 - \frac{3m^2\upsilon_0^2}{\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)gL} \tag{7}$$

ΘΕΜΑ 4

Α) Ένα μη αρμονικό ελατήριο υπακούει στο νόμο $F= -Dx^3$ όπου D θετική σταθερά. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια συναρτήσει της θέσης x, όταν U (0)=0 και πόσο έργο πρέπει να καταβληθεί στο ελατήριο για να τεντωθεί σιγά από τη θέση x = 0 έως τη θέση x_1;

(30% των μονάδων του θέματος)

Β) Ένα σωματίδιο αποκτά δυναμική ενέργεια από τη δράση μιας δύναμης. Η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση $U(x) = 3x^2 - x^3$ (U σε Joule, x σε m) ως συνάρτηση της θέσης και παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



α) Προσδιορίστε τη φορά της δύναμης για x<0, 0<x<2, x>2 β) Ποια είναι η κίνηση του σωματιδίου για τιμή της συνολικής ενέργειας E=4J αν το σώμα βρίσκεται τη χρονική στιγμή t=0 στη θέση x=0; Σε ποια θέση έχει μόνο κινητική ενέργεια ή μόνο δυναμική ενέργεια;

γ) Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας σε κάθε περίπτωση.

(70% των μονάδων του θέματος)

Λύση

A) $F=-\dfrac{dU}{dx}\Rightarrow U(x)=-\displaystyle\int_0^x F dx=-\int_0^x -Dx^3=\frac{1}{4}Dx^4$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου για μία συγκεκριμένη αύξηση του μήκους του ισούται με το έργο που του έχουμε προσφέρει μέχρι εκείνη τη στιγμή , άρα W=U (x_1)

B)

α) είναι

$F=-\dfrac{dU}{dx}=-6x+3x^2$ και $\vec{F}=-(6x-3x^2)\hat{x}=-3x(2-x)\hat{x}$

Από αυτή προκύπτει ότι η F είναι αρνητική στο διάστημα $0<x<2$ και θετική οπουδήποτε αλλού.

β) Από την καμπύλη προκύπτει ότι εφόσον η συνολική ενέργεια E=4J , το σωματίδιο έχει περιορισμένη κίνηση μέσα στο διάστημα $-1<x<2$, όπου συμβαίνει μετατροπή της δυναμικής σε κινητική ενέργεια και αντίστροφα. Για x=0 έχει μόνο κινητική ενέργεια και για x=-1, x=2 (U=4J) μόνο δυναμική.

γ) Οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται για F=0. Επομένως υπάρχουν δύο θέσεις ισορροπίας για x=0 και x=2.

Είναι $U(x)=3x^2-x^3$.

$\dfrac{dU}{dx}=6x-3x^2=3x(2-x)$. Είναι $\dfrac{dU}{dx}$=0 για x=0 και x=2.

$\dfrac{d^2U}{dx^2}=6-6x=6(1-x)$.Για x=0 Είναι $\dfrac{d^2U}{dx^2}>0$ άρα x=0 αντιστοιχεί σε ελάχιστο.

Για x=2 $\dfrac{d^2U}{dx^2}<0$ άρα αντιστοιχεί σε μέγιστο.

Η πρώτη είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας επειδή όπως φαίνεται από το σχήμα αντιστοιχεί σε ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας. Η δεύτερη θέση είναι θέση ασταθούς ισορροπίας επειδή αντιστοιχεί σε μέγιστο της δυναμικής ενέργειας.

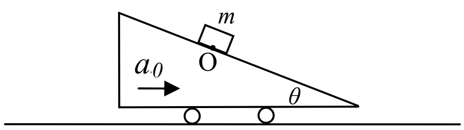
ΘΕΜΑ 5

A) Τρία υλικά σημεία με μάζες 5kg, 2kg και 3kg αποτελούν κλειστό σύστημα και βρίσκονται αρχικά σε θέσεις που καθορίζονται αντίστοιχα με τις συντεταγμένες (σε μέτρα) (0,0), (1.5, 2), (3,2). Υποθέστε ότι οι μάζες κινούνται με την επίδραση εσωτερικών δυνάμεων μόνο και ότι οι μάζες των 2 kg και 3kg συγκρούονται στο σημείο (4,3). Ζητείται η θέση της μάζας των 5 kg τη στιγμή εκείνη.

(30% των μονάδων του θέματος)

Β

Μία ορθογώνια σφήνα επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση μέτρου a_0. Μάζα m κινείται προς τα κάτω χωρίς τριβή στην κεκλιμένη πλευρά που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά η μάζα βρίσκεται στο σημείο Ο και είναι ακίνητη ως προς το κεκλιμένο επίπεδο. Ζητείται η εξίσωση κίνησης της μάζας ως προς παρατηρητή που βρίσκεται στο σημείο Ο του κεκλιμένου επιπέδου.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



(70% των μονάδων του θέματος)

Λύση

Α) Πάνω στο σύστημα των τριών μαζών δεν επιδρά εξωτερική δύναμη. Άρα το κ.μ τους μένει ακίνητο. Οι συντεταγμένες της θέσης του κ.μ είναι:

$$x_{\kappa.\mu} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{5\cdot 0 + 2\cdot 1.5 + 3\cdot 3}{10} = 1.2$$

$$y_{\kappa.\mu} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{5\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2}{10} = 1$$

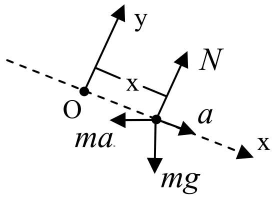
Τη στιγμή της σύγκρουσης η θέση της μάζας των 5kg βρίσκεται με συντεταγμένες x, y που δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\kappa.\mu} = 1.2 = \frac{5\cdot x + 5\cdot 4}{10} \ \text{ή} \ x = -\frac{8}{5}$$

$$y_{\kappa.\mu} = 1 = \frac{5\cdot y + 5\cdot 3}{10} \ \text{ή} \ y = -1$$

Άρα η μάζα των 5kg βρίσκεται στο σημείο $(-\frac{8}{5}, -1)$

Β) Στη μάζα ασκούνται οι πραγματικές δυνάμεις (το βάρος της mg και η κάθετη δύναμη N) και η αδρανειακή δύναμη ma_0 με φορά προς τα αριστερά διότι ο παρατηρητής επιταχύνεται με επιτάχυνση a_0 προς τα δεξιά. Επομένως:



$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow mg\sin\theta - ma_0\cos\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta - a_0\cos\theta \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta - ma_0\sin\theta = 0 \Rightarrow N = m(g\cos\theta + a_0\sin\theta)$$

Με ολοκλήρωση της (1), όπου g, a_0, θ σταθερές, προκύπτει:

$$u(t) = (g\sin\theta - a_0\cos\theta)t + c_1 \tag{2}$$

όπου c_1=0 αφού για t=0 είναι $u(0)$=0. Ολοκληρώνοντας την (2) βρίσκουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta - a_0\cos\theta)t^2 + c_2$$

όπου c_2=0 αφού για t=0 είναι $x(0)$=0. Άρα τελικά:

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta - a_0\cos\theta)t^2$$