Θέμα 1

A)

I. Να υπολογιστεί το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v}\times\vec{B}$ όπου $\vec{v}=5\hat{i}-8\hat{j}+\hat{k},\ \vec{B}=7\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$.

II. Έστω $\vec{a}=(2,\lambda,1)$ και $\vec{\beta}=(4,-2,-2)$. Να υπολογιστεί το λ ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα.

III. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\hat{i}\,f_1(u)+\hat{j}\,f_2(u)$ έχει σταθερό μέτρο δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\frac{d\vec{\alpha}}{du}$ είναι κάθετα. (50%)

B) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int x^2 e^{-3x}\,dx$, $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} xe^{x^2}\,dx$ (50%)

<u>Λύση</u>

A)

I. $$\vec{v}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 5 & -8 & 1\\ 7 & -1 & 3\end{vmatrix}=\hat{i}(-24+1)-\hat{j}(15-7)+\hat{k}(-5+56)=-23\hat{i}-8\hat{j}+51\hat{k}$$

II. Πρέπει το εσωτερικό γινόμενο να είναι μηδέν. Επομένως
$$\vec{a}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow(2,\lambda,1)\cdot(4,-2,-2)=0\Leftrightarrow 8-2\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=3$$

III. Εφόσον το μέτρο του διανύσματος είναι σταθερό θα είναι σταθερό και το τετράγωνο του μέτρου του δηλαδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=$ σταθερό. Παραγωγίζοντας αυτό το σταθερό αριθμό ως προς u έχουμε:
$\frac{d}{du}(\vec{a}\cdot\vec{a})=0\Leftrightarrow\frac{d\vec{a}}{du}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{du}=0\Leftrightarrow 2\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{du}=0\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{du}=0$. Επομένως αφού το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\frac{d\vec{\alpha}}{du}$ είναι μηδέν προφανώς είναι κάθετα μεταξύ τους.

B) Εφαρμόζω ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int x^2e^{-3x}dx=\int x^2(-\frac{1}{3}e^{-3x})'dx=x^2(-\frac{1}{3}e^{-3x})-\int 2x(-\frac{1}{3}e^{-3x})dx=$$
$$x^2(-\frac{1}{3}e^{-3x})-\int 2x(\frac{1}{9}e^{-3x})'dx=x^2(-\frac{1}{3}e^{-3x})-\left[2x(\frac{1}{9}e^{-3x})-2\int\frac{1}{9}e^{-3x}dx\right]=$$
$$x^2(-\frac{1}{3}e^{-3x})-\left[2x(\frac{1}{9}e^{-3x})-2\int(-\frac{1}{27}e^{-3x})'dx\right]=-\frac{1}{3}e^{-3x}\left[x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right]+C$$

$$\int xe^{x^2}dx\overset{x^2=y}{\underset{2xdx=dy}{=}}\int\frac{1}{2}e^y dy=\frac{1}{2}e^y=\frac{1}{2}e^{x^2}\ \text{Επομένως}\ \int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}}=\frac{1}{2}(2-1)=\frac{1}{2}$$

Θέμα 2

A) Να μελετηθεί πλήρως η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{6}(x^3-6x^2+9x+6)$ (65%)

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}$ με x πραγματικό αριθμό. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (35%)

<u>Λύση</u>

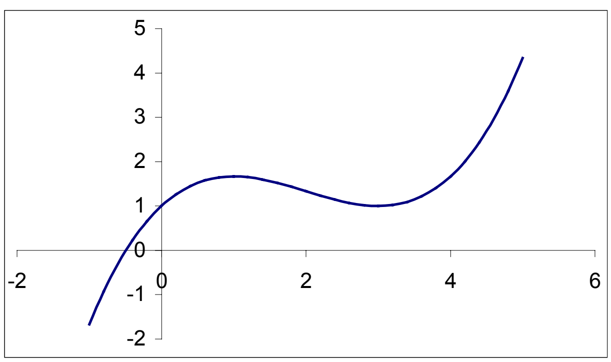
A) Η συνάρτηση είναι πολυωνυμική βαθμού 3 και έχει πεδίο ορισμού όλο το R. Επίσης είναι συνεχής παντού και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Υπολογίζουμε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο.

$$y'=\frac{1}{6}(3x^2-12x+9)=\frac{1}{2}(x^2-4x+3) \qquad y''=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων

x	-1	0	1	2	3	4
y	-5/3	1	5/3	4/3	1	5/3
y΄	+		0	-	0	+
y΄΄		-		0	+	
Συμπέρασμα	Άνοδος, κοίλα προς τα κάτω	Άνοδος κοίλα προς τα κάτω	Τοπικό μέγιστο	Κάθοδος Σημείο Καμπής	Τοπικό ελάχιστο	Άνοδος, κοίλα προς τα πάνω

Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική με βαθμό μεγαλύτερο του 2 δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης βάση του προηγούμενου πίνακα είναι:



B) Το πεδίο ορισμού είναι το R-{-2,0,2}

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

I. x>0 Τότε : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x+2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+2)}{(x-2)}=\dfrac{+2}{-2}=-1$

II. x<0 Τότε : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x-2)}{(x+2)}=\dfrac{-2}{+2}=-1$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$

Θέμα 3

A) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx$ (50%)

B) Βρείτε την y΄΄ αν α) x+xy+y=2, β) x^2-y^2-x=1 (50%)

Λύση

A) Αναλύοντας σε απλά κλάσματα έχουμε :

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{\left(x-1\right)^2} \Leftrightarrow 3x+5 = A\left(x-1\right)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1) \Leftrightarrow$$

$$3x+5 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx + C \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A+B=0 \\ C-2A=3 \\ A-B+C=5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=1/2 \\ B=-1/2 \\ C=4 \end{Bmatrix}$$

Επομένως

$$\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

B) α) Παραγωγίζοντας την έκφραση ως προς x έχουμε

$$\frac{d(x+xy+y)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 1+y+xy'+y' = 0 \Leftrightarrow (x+1)y' = -(1+y) \Leftrightarrow y' = -\frac{1+y}{1+x}$$

Οπότε $y'' = -\left(\frac{y'}{1+x} - \frac{(1+y)}{\left(1+x\right)^2}\right) = -\left(-\frac{(1+y)}{\left(1+x\right)^2} - \frac{(1+y)}{\left(1+x\right)^2}\right) = \frac{2(1+y)}{\left(1+x\right)^2}$

b) Παραγωγίζοντας την έκφραση ως προς x έχουμε

$$\frac{d(x^2-y^2-x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x-2yy'-1 = 0 \Leftrightarrow 2yy' = 2x-1 \Leftrightarrow y' = \frac{2x-1}{2y}$$

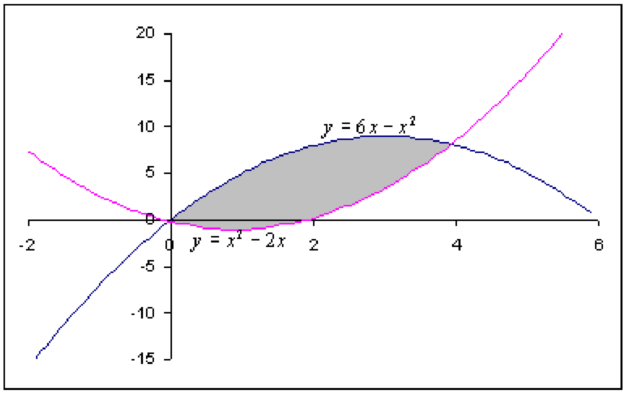
Οπότε

$$y'' = \left(\frac{2x-1}{2y}\right)' = \frac{2}{2y} - \frac{\left(2x-1\right)2y'}{4y^2} = \frac{2}{2y} - \frac{\left(2x-1\right)2\frac{2x-1}{2y}}{4y^2} =$$

$$\frac{2}{2y} - \frac{\left(2x-1\right)^2}{4y^3} = \frac{4y^2}{4y^3} - \frac{\left(2x-1\right)^2}{4y^3} = \frac{4y^2-4x^2+4x-1}{4y^3}$$

Θέμα 4

A) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες
$y = 6x - x^2 \quad y = x^2 - 2x$ (50%)



B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και αν υπάρχει το όριο
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (50%)

__**Λύση**__

A) Οι δύο παραβολές τέμνονται στα σημεία που είναι λύσεις τις εξίσωσης
$6x - x^2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4$.

Το εμβαδόν είναι $\int_0^4 (6x - x^2)dx - \int_0^4 (x^2 - 2x)dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = 4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^4 = \frac{64}{3}$

B) Πρέπει 1+x ≥ 0 και 1-x≥ 0 και x ≠ 0. Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το [-1,0)U(0,1].

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$