Θ.Ε. Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες
Λύσεις Θεμάτων Τελικών Εξετάσεων στις «Εισαγωγικές Έννοιες Μαθηματικών»
Αύγουστος 2002

Θέμα 1ον

Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi &= \cos\varphi \\ -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi &= \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{με } \varphi \in R$$

α) Δείξτε ότι το σύστημα έχει πάντα λύση και βρείτε τη λύση του.

β) Εάν $\{x_1, y_1\}$ είναι η λύση του συστήματος, να δείξετε ότι: $-\sqrt{2} \le (x_1 + y_1) \le \sqrt{2}$

Λύση

α) Η ορίζουσα του συστήματος είναι $D=\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 0$. Άρα το σύστημα έχει πάντα λύση. Η λύση του είναι: $x_1 = D_x/D = \cos 2\varphi$ και $y_1 = D_y/D = \sin 2\varphi$.

β) $x_1 + y_1 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi = \cos 2\varphi + \cos(\pi/2 - 2\varphi) = 2\cos(\pi/4)\cos(2\varphi - \pi/4) = \sqrt{2}\cos(2\varphi - \pi/4)$ και επειδή $-1 \le \cos(2\varphi - \pi/4) \le 1$ θα έχουμε τελικά $-\sqrt{2} \le (x_1 + y_1) \le \sqrt{2}$

Θέμα 2ον

α) Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο στα διανύσματα $\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{j} + \vec{k}$, όπου τα σύμβολα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ παριστούν τα μοναδιαία διανύσματα ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

β) Ένα τρίγωνο έχει κορυφές τα σημεία (0,0,0), (1,1,1) και (0,-2,3). Να ευρεθεί το εμβαδόν του.

Λύση

α) Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{j} + \vec{k}$, διαιρεμένο με το μέτρο του, είναι το ζητούμενο διάνυσμα. Έτσι, έχουμε: $(\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, με μέτρο ίσο με $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Άρα τελικά, το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $1/\sqrt{3}\,(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ ή το $-1/\sqrt{3}\,(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

β) Έστω O(0,0,0), A(1,1,1) και B(0,-2,3) οι κορυφές του τριγώνου. Θα ισχύει: $\vec{OA} = (1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{OB} = (0-0)\vec{i} + (-2-0)\vec{j} + (3-0)\vec{k} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι ίσο με:

$$\frac{1}{2}\left|\vec{OA} \times \vec{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (-2\vec{j} + 3\vec{k})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|5\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{38}$$

Θέμα 3ον

α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + \lambda \cdot x + 1}$ με $\lambda \in R$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το R.

β) Δικαιολογήσετε τα βήματα στον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3$$

Λύση

α) Για να ορίζεται η f σε όλο το R, θα πρέπει $x^2+\lambda x+1\neq 0$, για κάθε τιμή του x. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το τριώνυμο να μην έχει ρίζες στο R, δηλαδή η διακρίνουσά του, Δ, να είναι αρνητική.
Άρα: $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < \lambda < 2$.

β) 1^o βήμα: Πολλαπλασιασμός της 1ης γραμμής με – 4 και πρόσθεσή της στην 2^η γραμμή.
2^o βήμα: Πολλαπλασιασμός της 1ης γραμμής με – 7 και πρόσθεσή της στην 3^η γραμμή.
3^o βήμα: Ανάπτυγμα της ορίζουσας τρίτης τάξης ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix}$$

4^o βήμα: Υπολογισμός της ορίζουσας δεύτερης τάξης. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = (-3)(-11) - (-6)(-6) = 33 - 36 = -3$$

Θέμα $4^{ον}$

α) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{I. } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}, \quad \text{II. } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, \quad \text{III. } \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \;\text{ εάν }\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

β) Αν $S_n(x)=x^n$ (π.χ. $S_5(x)=x^5$) και $0\le k\le n$, δείξετε ότι: $\dfrac{d^kS_n(x)}{dx^k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}\cdot x^{n-k}$

γ) Το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου δίνεται συναρτήσει της μεταβλητής t από την διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$. Έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{V}(t)$ και $\vec{F}(t)$ που ορίζονται ως: $\vec{V}(t)=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ και $\vec{F}(t)=m\cdot\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ με $m\in R$. Δείξετε ότι: $\dfrac{d}{dt}\left(m\cdot\vec{r}(t)\times\vec{V}(t)\right)=\vec{r}(t)\times\vec{F}(t)$

Λύση

α) I. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{2-0+0}{6+0-0}=\frac{1}{3}$$

II. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

III. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0$$

β) για k=1: $\dfrac{dS_n(x)}{dx}=n\cdot x^{n-1}$, για k=2: $\dfrac{d^2S_n(x)}{dx^2}=n(n-1)\cdot x^{n-2}$,

για k=3: $\dfrac{d^3S_n(x)}{dx^3}=n(n-1)(n-2)\cdot x^{n-3}$ κ.ο.κ.

Άρα: $\dfrac{d^kS_n(x)}{dx^k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}\cdot x^{n-k}$ (1). Αυτή η σχέση όμως πρέπει να αποδειχτεί επαγωγικά. Έτσι, έχουμε:

Για k=1: $\dfrac{dS_n(x)}{dx}=\dfrac{n!}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$, το οποίο ισχύει.

Έστω ότι η σχέση (1) ισχύει για k. Θα δείξουμε ότι ισχύει για k+1, δηλαδή:
$$\frac{d^{k+1}S_n(x)}{dx^{k+1}}=\frac{n!}{(n-(k+1))!}\cdot x^{n-(k+1)}$$
Έχουμε ότι:
$$\frac{d^{k+1}S_n(x)}{dx^{k+1}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^kS_n(x)}{dx^k}\right]\overset{(1)}{=}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot(n-k)\cdot x^{(n-k)-1}=\frac{n!}{(n-k-1)!}\cdot x^{(n-k)-1}=\frac{n!}{(n-(k+1))!}\cdot x^{n-(k+1)}$$
Άρα η σχέση (1) ισχύει για κάθε k, με $0\le k\le n$.

γ)
$$\frac{d}{dt}\left(m\cdot\vec{r}(t)\times\vec{V}(t)\right)=m\cdot\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\times\vec{V}(t)+\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{V}(t)}{dt}\right)=m\cdot\left(\vec{V}(t)\times\vec{V}(t)+\vec{r}(t)\times\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right)=$$
$$=m\cdot\left(\vec{r}(t)\times\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right)=\vec{r}(t)\times\left(m\cdot\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right)=\vec{r}(t)\times\vec{F}(t)$$

Θέμα 5ον

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1\frac{x+2}{x+1}dx$, **β)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx$, **γ)** $\int\frac{dx}{x^2-9}$

Λύση

α) $$\int_0^1\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1+1}{x+1}dx=\int_0^1dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=[x]_0^1+[\ln(x+1)]_0^1=1+\ln 2$$

β)
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin x)'dx=\left[x^2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2)'\sin x dx=\left[x^2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x dx=$$
$$=\left[x^2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(\cos x)'dx=\left[x^2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\left(\left[x\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x)'\cos x dx\right)=$$
$$=\left[x^2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\left(\left[x\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right)=\left[x^2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\left(\left[x\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{2}-4$$

γ) $$\int\frac{dx}{x^2-9}=\int\frac{dx}{(x-3)(x+3)}$$
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης σε απλά κλάσματα, έχουμε:
$$\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+3)}\Rightarrow 1=A(x+3)+B(x-3)\Rightarrow A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{6}.$$
Έτσι, το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:
$$\int\frac{dx}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-3)}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x+3)}=\frac{1}{6}\left(\ln(x-3)-\ln(x+3)\right)+C=\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}+C$$