ΕΡΓΑΣΙΑ 5^{Η}

(Ημερομηνία παράδοσης 15.5.2006)

g=9.81 m/s^2

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ενας απρόσεκτος εργάτης, μάζας M = 80kg, ανεβαίνει σε μία σκάλα μήκους L = 3.2m, η αποία ακουμπά σε ένα τοίχο χωρίς τριβή και στέκεται σε βρεμένο δάπεδο. Οταν ο εργάτης έφτασε στο μέσο της σκάλας, αυτή γλύστρησε. Αν το κάτω μέρος της σκάλας απείχε αρχικά από τον τοίχο 1.2m και η γραμμική πυκνότητα της σκάλας δίνεται από την σχέση λ = (10kg/m - *l* * 2.5 kg/m^2), υπολογίστε τον συντελεστή τριβής μεταξύ της σκάλα και του δαπέδου. (Το *l* μετριέται σε μέτρα από το κατώτερο τμήμα της σκάλας).

Αρχικά υπολογίζουμε την μάζα m της σκάλας και την απόσταση του L_c κέντρου μάζας από την βάση της. Έχουμε:

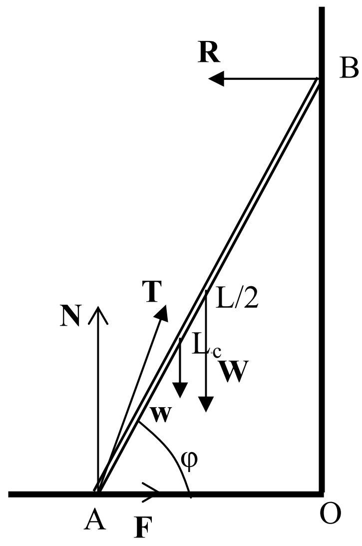
$$m = \int_0^L \lambda \cdot dl = \int_0^L \left(10kg/m - 2.5 \cdot l\ kg/m^2\right) \cdot dl = \left(\int_0^L 10 dl - \int_0^L 2.5 \cdot l \cdot dl\right) kg = \left(10 \cdot L - 2.5 \cdot L^2/2\right) kg = 19.2kg$$

και $$L_c = \frac{\int_0^L \lambda \cdot 1 \cdot dl}{\int_0^L \lambda \cdot dl} = \frac{\int_0^L \left(10kg/m - 2.5 \cdot l\ kg/m^2\right) \cdot 1 \cdot dl}{\left(10 \cdot L - 2.5 \cdot L^2/2\right) kg} = \frac{\left(\int_0^L 10 \cdot l \cdot dl - \int_0^L 2.5 \cdot l^2 \cdot dl\right) kg \cdot m}{\left(10 \cdot L - 2.5 \cdot L^2/2\right) kg} =$$

$$\Rightarrow L_c = \frac{(5 \cdot L^2 - 2.5 \cdot L^3/3) kg \cdot m}{\left(10 \cdot L - 2.5 \cdot L^2/2\right) kg} = \frac{2 \cdot L^2 \cdot (15 - 2.5 \cdot L)}{3 \cdot L \cdot \left(20 - 2.5 \cdot L\right)} m = \frac{2 \cdot L \cdot (6 - L)}{3 \cdot (8 - L)} m = 1.24m$$

(Θεωρούμε ότι οι συντελεστές έχουν τις κατάλληλες μονάδες ώστε όταν αντικαταστήσουμε το L στους παραπάνω τύπους θα έχουμε τελικά kg και m για την μάζα και το κέντρο μάζας της σκάλας).

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην σκάλα την στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση, οπότε σχηματίζει γωνία φ με το δάπεδο:



Έχουμε το βάρος του ανθρώπου **W** που ασκείται στο μέσο της σκάλας (L/2) και το βάρος της σκάλας **w** που ασκείται σε απόσταση L_c από το κάτω μέρος της σκάλας. Επίσης την αντίδραση **R** του τοίχου (και κάθετη σε αυτόν αφού δεν έχουμε τριβή) και την αντίδραση **T** του δαπέδου. Οι φορές και διευθύνσεις αυτών των δυνάμεων είναι όπως φαίνονται στο σχήμα.

Αφού η σκάλα ισορροπεί θα πρέπει: $\Sigma \mathbf{F} = 0$ και $\Sigma \boldsymbol{\tau} = 0$
ή $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$ και $\Sigma \boldsymbol{\tau} = 0$.

Η **T** αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την **F** της τριβής και την **N** της αντίδρασης του δαπέδου.

Από τα παραπάνω και παίρνοντας τα μέτρα και έχοντας υπ’όψηψ την φορά των διανυσμάτων

έχουμε:
Για τον άξονα Y: $-W - w + N = 0$
για το άξονα X: $F – R = 0$ και
$F = \mu \cdot N$ για την τριβή, όπου μ ο ζητούμενος συντελεστής.

Εξετάζοντας τις ροπές ως προς το σημείο Α έχουμε:

$$(W \cdot L/2 \cdot \cos\varphi + w \cdot L_c \cdot \cos\varphi) – R \cdot L \cdot \sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

Το $w \cdot L_c = m \cdot g \cdot L_c) = \left(10 \cdot L - 2.5 \cdot L^2 / 2\right) kg \cdot g \cdot \dfrac{2 \cdot L \cdot (6 - L)}{3 \cdot (8 - L)} m =$

$$= \frac{L \cdot \left(20 - 2.5 \cdot L\right) \cdot 2 \cdot L \cdot (6 - L)}{2 \cdot 3 \cdot (8 - L)} \cdot g \quad kg \cdot m =$$

$$= \frac{L \cdot 2.5 \cdot \left(8 - L\right) \cdot L \cdot (6 - L)}{3 \cdot (8 - L)} \cdot g \quad kg \cdot m = \frac{L^2 \cdot 2.5 \cdot (6 - L)}{3} \cdot g \quad kg \cdot m$$

Εχουμε (χρησιμοποιώντας την 1)

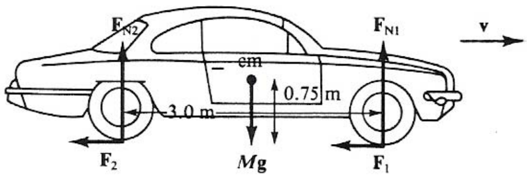
$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{R}{W + w} = \frac{(W \cdot L / 2 + w \cdot L_c) \cdot \cos\phi}{L \cdot \sin\phi \cdot (W + w)} =$$

$$= \frac{3 \cdot M + 5 \cdot L \cdot (6 - L)}{3 \cdot \left(2 \cdot M + L \cdot 2.5 \cdot \left(8 - L\right)\right) \cdot \tan\phi} = 0.193$$

Θεωρούμε ότι οι συντελεστές έχουν τις κατάλληλες μονάδες ώστε όταν αντικαταστήσουμε το L και M στον παραπάνω τύπο θα έχουμε τελικά καθαρό αριθμό και ότι

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{3.2^2 - 1.2^2}}{1.2} = 2.472$$

ΑΣΚΗΣΗ 2
Όταν σ'ένα αυτοκίνητο πιέζονται τα φρένα η δύναμη που ασκείται στους μπροστινούς τροχούς είναι κατά πολύ μεγαλύτερη αυτής πού ασκείται στους πίσω. Υπολογίστε τις δυνάμεις τριβής F_1 και F_2 στους μπροστινούς και στους πίσω τροχούς στο αυτοκίνητο του σχήματος όταν αυτό φρενάρει με επιβράδυνση α=0.5g . Το αυτοκίνητο έχει μάζα M=1200 kgr, η απόσταση μεταξύ των αξόνων των τροχών είναι 3m και το κέντρο μάζας του βρίσκεται στο μέσον της απόστασης των αξόνων και 75 cm από το έδαφος. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μ για όλες τις ρόδες. (Θεωρείστε τις δυνάμεις F_{N1} και F_{N2} σαν το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στις μπροστινές και πίσω ρόδες αντίστοιχα από τα φρένα και το έδαφος).



ΛΥΣΗ
Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος με όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο αυτοκίνητο. F_1 είναι το άθροισμα των δυνάμεων τριβής στους μπροστινούς τροχούς και F_2 αντίστοιχα για τους πίσω.

$F_1 + F_2 = M\alpha = 1200kgr*0.5*9.81m/s^{-2} = 5886\ N$ (1)

F_{N1} και F_{N2} οι κάθετες δυνάμεις που ασκεί το έδαφος.

$F_{N1} = F_1/\mu$
$F_{N2} = F_2/\mu$

Όταν το αυτοκίνητο φρενάρει δεν περιστρέφεται, άρα το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας είναι 0.

$1.5* F_{N1} - 1.5* F_{N2} - 0.75* F_1 - 0.75* F_2=0$

$1.5 *(F_1 - F_2)/\mu - 0.75* (F_1 + F_2) = 0$ (2)

Αφού το αυτοκίνητο δεν επιταχύνεται στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε

$Mg = F_{N1} + F_{N2} =(F_1 + F_2)/\mu$ (3)

Χρησιμοποιώντας τις (1) και (3) βρίσκουμε μ=α/g= 0.5

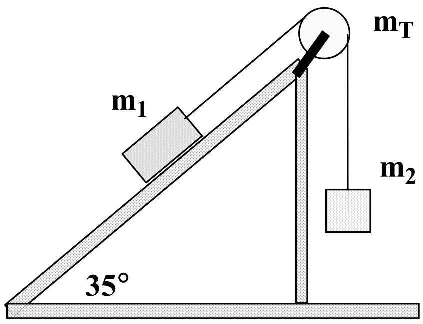
Λύνοντας την (2)

$F_1=5/3\ F_2$
Από την (1) $F_1 + F_2= 5886\ N$

έχουμε τελικά $F_1=3678.75\ N$ και $F_2=2207.25\ N$

ΑΣΚΗΣΗ 3[A]

Δύο σώματα, m_1 = 2.5kg και m_2 = 2.0kg, είναι συνδεδεμένα με ιδανικό νήμα άνευ μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τροχαλία έχει μάζα m_T = 0.25kg και διάμετρο d = 10cm. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του m_1 και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ = 0.02. Αν το σώμα m_2 κινηθεί προς τα κάτω κατά H = 1.2m, υπολογίστε την επιτάχυνση των μαζών. Πόση θα είναι η επιτάχυνση αν m_T = 2.5kg;



Λύση Α

Κατ΄αρχήν θεωρούμε ότι το σώμα 1 κινείται προς την τροχαλία και ότι, αφού το νήμα είναι ιδανικό και χωρίς μάζα, η επιτάχυνση των δύο μαζών είναι ίση κατά μέτρο.

Επίσης αφού η μάζα 2 κινείται κατά H, η μάζα 1 θα κινηθεί κατά s = H και θα ανυψωθεί κατά $h = s \cdot \sin 35° = H \cdot \sin 35°$.

Λύνοντας το πρόβλημα ενεργειακά, έχουμε ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας των μαζών θα μετατραπεί σε κινητική τους ενέργεια, κινητική ενέργεια περιστροφής της τροχαλίας και θα δαπανηθεί στο έργο της τριβής. Η τριβή ισούται με $f = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35° = \mu \cdot s \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35°$

Ετσι έχουμε:

$$\mathbf{m_2 \cdot g \cdot H = m_1 \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathit{I_T} \cdot \omega^2 + \int_0^s f \cdot ds} \quad \Rightarrow$$

$$(m_2 \cdot H - m_1 \cdot h) \cdot g = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot R^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{R^2} + \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35° \cdot \int_0^H ds \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{4} \cdot m_T \cdot \upsilon^2 = (m_2 \cdot H - m_1 \cdot h) \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35° \cdot H \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{4 \cdot \left((m_2 - m_1 \cdot \sin 35°) \cdot H \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35° \cdot H\right)}{2 \cdot (m_1 + m_2) + m_T}}$$

Από την κινηματική γνωρίζουμε ότι: $x = x_o + \upsilon_o \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$ και $\upsilon = \upsilon_o + \alpha \cdot t$ (1)

Στην περίπτωση μας $x = H$, $x_o = 0$, $\upsilon_o = 0$ και υ η τιμή που υπολογίσαμε.

Συνεπώς από τις (1) έχουμε: $H = ½ \cdot \upsilon^2 / \alpha$ και τελικά:

$$\boldsymbol{\alpha_1} = \frac{\mathbf{2} \cdot g \cdot \left(\mathbf{m_2 - m_1} \cdot \sin 35° - \mu \cdot \mathbf{m_1 \cdot cos35°}\right)}{\left(\mathbf{2 \cdot (m_1 + m_2) + m_T}\right)} = \qquad (@)$$

$$= \frac{2 \cdot 9.81 \mathrm{ms}^{-2} \cdot \left((2.0 - 2.5 \cdot \sin 35°)\mathrm{kg} - 0.02 \cdot 2.5\mathrm{kg} \cdot \cos 35°\right)}{\left(2 \cdot (2.5 + 2.0) + 0.25\right)\mathrm{kg}} =$$

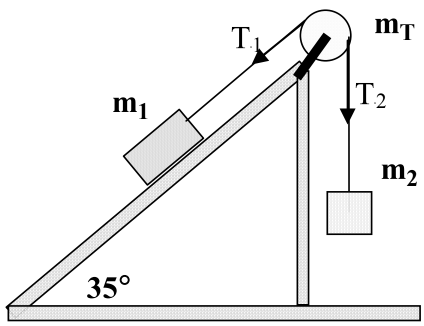
$$= \frac{2 \cdot 9.81 \cdot \left(0.566 - 0.02 \cdot 2.5 \cdot \cos 35°\right)}{9.25} \mathrm{ms}^{-2} = 1.11 \ \mathrm{ms}^{-2}$$

Αντικαθιστώντας την νέα τιμή του m_T στην τελευταία εξίσωση θα έχουμε:

$$\alpha_2 = \frac{2 \cdot 9.81 \mathrm{ms}^{-2} \cdot \left((2.0 - 2.5 \cdot \sin 35°)\mathrm{kg} - 0.02 \cdot 2.5\mathrm{kg} \cdot \cos 35°\right)}{\left(2 \cdot (2.5 + 2.0) + 2.5\right)\mathrm{kg}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 9.81 \cdot \left(0.566 - 0.02 \cdot 2.5 \cdot \cos 35°\right)}{11.5} \mathrm{ms}^{-2} = 0.89 \ \mathrm{ms}^{-2}$$

Λύση Β



Εχουμε για τα δύο σώματα ΣF ⇒

$m_1 \cdot \alpha = T_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin 35° - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35°$ (1)

$m_2 \cdot \alpha = m_2 \cdot g - T_2$ (2)

και για την τροχαλία Στ ⇒ $I \cdot d\omega/dt = (T_2 - T_1) \cdot R$ ⇒ $½ \cdot m_T \cdot R^2 \cdot \alpha/R = (T_2 - T_1) \cdot R$ ⇒

$½ \cdot m_T \cdot \alpha = (T_2 - T_1)$ (3)

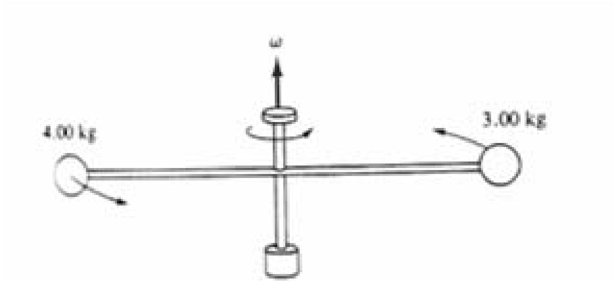
Προσθέτοντας την (1) και (2) και αντικαθιστώντας το $-(T_2 - T_1)$ από την (3) έχουμε:

$m_1 \cdot \alpha + m_2 \cdot \alpha = m_2 \cdot g - T_2 + T_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin 35° - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 35°$ ⇒

$(m_1 + m_2 + ½ \cdot m_T) \cdot \alpha = g \cdot (m_2 - m_1 \cdot \sin 35° - \mu \cdot m_1 \cdot \cos 35°)$ ⇒ ***Συνέχεια ως @***

ΑΣΚΗΣΗ 3^B

Δύο σώματα με μάζες m_1=4 kgr και m_2=3kgr συνδέονται στα δύο άκρα λεπτής οριζόντιας ράβδου αμελητέας μάζας και μήκους 50 cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=8 rad/s γύρω από κατακόρυφο άξονα. Να βρεθούν α) η κινητική ενέργεια του συστήματος και β) η δύναμη που ασκείται σε κάθε μάζα και στον άξονα περιστροφής όταν ο άξονας περιστροφής περνά από το μέσο της ράβδου και όταν περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος.



Λύση
Η ροπή αδρανείας κάθε μάζας είναι mR^2, όπου R=0,25 m.

$$KE = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1R^2 + m_2R^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(4kgr + 3kgr)(0.25m)^2(8s^{-1})^2 = 14J$$

Η KE μπορεί επίσης να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη γραμμική ταχύτητα κάθε μάζας, υ = Rω = 0.25*8 = 2 m/s

$KE = ½\, m_1\, \upsilon^2 + ½\, m_2\, \upsilon^2 = ½(4kgr+3kgr)*(2m/s)^2 = 14\ J$

Αφού οι δύο μάζες κινούνται κυκλικά ασκείται πάνω τους μια κεντρομόλος δύναμη:

$F_1 = m_1\, \omega^2 R_1 = 4\ kgr*(8\ s^{-1})^2*0.25m = 64\ N$
$F_2 = m_2\, \omega^2 R_2 = 3\ kgr*(8\ s^{-1})^2*0.25m = 48\ N$

Οι δύο δυνάμεις έχουν φορά προς τον άξονα περιστροφής και ασκούνται πάνω στις μάζες από τον άξονα μέσω της ράβδου. Αλλά η συνολική δύναμη είναι 64-48=16 N, πρέπει να ασκείται στον άξονα από το σύστημα στήριξης του άξονα. Η δύναμη αυτή αλλάζει συνεχώς διεύθυνση καθώς το σύστημα περιστρέφεται.

Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται σε απόσταση x_{cm} από τη μάζα m_1 όπου

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{4kgr*0m + 3kgr*0.5m}{4kgr + 3kgr} = 0.214\ \text{m}$$

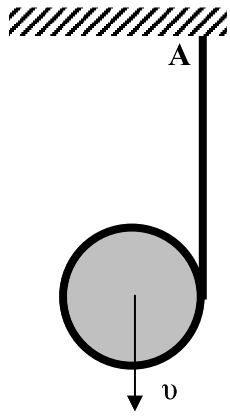
Άρα η μάζα m_2 απέχει από το κέντρο μάζας 0.286 m.

Στην περίπτωση αυτή η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$KE = ½\, I\omega^2 = ½(m_1R_1^2 + m_2R_2^2)\omega^2 = ½(4kgr*(0.214m)^2 + 3kgr*(0.286m)^2)*(8s^{-1})^2 = 13,7J$

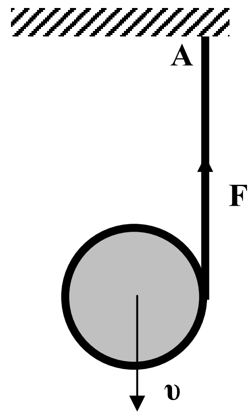
Και οι δυνάμεις σε κάθε μάζα
$F_1 = m_1\, \omega^2 R_1 = 4kgr*(8s^{-1})^2*0.214m = 54.8\ N$
$F_2 = m_2\, \omega^2 R_2 = 3kgr*(8s^{-1})^2*0.286m = 54.8\ N$
Στην περίπτωση αυτή η συνολική δύναμη είναι 0 και άρα δεν ασκείται δύναμη στο άξονα περιστροφής.

ΑΣΚΗΣΗ 4[A] Ενα αβαρές και μη εκτατό σχοινί είναι τυλιγμένο σφειχτά γύρω από κυλινδρικό δίσκο ακτίνας R και μάζας m . Το ελεύθερο ακρο του σχοινιού είναι στερεωμένο στο σημείο Α. Αφήνουμε τον κύλινδρο ελεύθερο να πέσει. Καθώς ο κύλινδρος κινείται προς τα κάτω το σχοινί ξετυλίγεται. Να βρεθούν οι συναρτήσεις:
$x = f(t)$, $\upsilon = f(t)$, $\theta = f(t)$ και $\omega = f(t)$



Στο σημείο επαφής του σχοινιού στον κύλινδρο θα υπάρχει μία δύναμη F η οποία θα αντιδρά στην ελεύθερη πτώση του κυλίνδρου και θα ασκεί μία ροπή σε αυτόν με αποτέλεσμα αυτός να περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνάει από τον άξονα συμμετρίας του. Ετσι, καθώς το Κέντρο Μάζας θα κινείται προς τα κάτω και συγχρόνως ο κύλινδρος θα περιστρέφεται, θα έχουμε:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g - F \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{F}{m} \qquad (1)$$



$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = F \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{F \cdot R}{I} = \frac{F \cdot R}{1/2 \cdot m \cdot R^2} = \frac{2 \cdot F}{m \cdot R} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την F από την (2) στην (1) και από την σχέση $\omega = \upsilon / R$ έχουμε:

$$F = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{m \cdot R}{2} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{m}{2} \quad \text{και} \quad \frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{1}{m} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{m}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{g}{3/2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \int_0^t dt = \frac{2}{3} \cdot g \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = \frac{2}{3} \cdot g \cdot t} \qquad (3)$$

Ολοκληρώνοντας την (3) έχουμε:

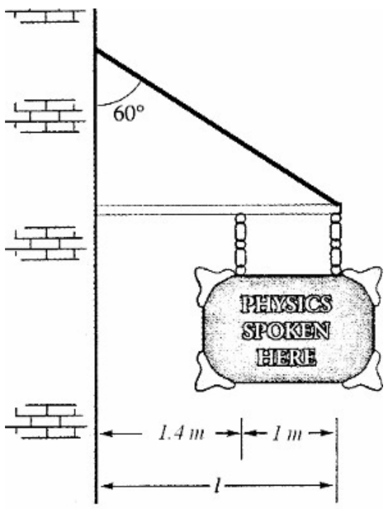
$$x = \frac{2 \cdot g}{3} \cdot \int_0^t t \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{3} \cdot g \cdot t^2} \qquad (4)$$

και από τις σχέσεις $\upsilon = \omega \cdot R$ και $x = \theta \cdot R$ έχουμε:

$$\boxed{\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{R} \cdot t} \quad \text{και} \quad \boxed{\theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{g}{R} \cdot t^2}$$

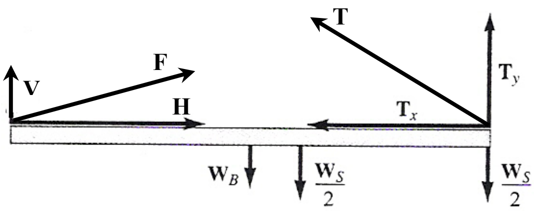
ΑΣΚΗΣΗ 4[Β]

Μια πινακίδα κρέμεται από μία οριζόντια ράβδο με δύο αλυσίδες. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο μέσω ενός μεντεσέ με τον οποίο στηρίζεται στον τοίχο. Όπως φαίνεται στο σχήμα η ράβδος κρατιέται οριζόντια με τη βοήθεια ενός σκοινιού που είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο της και στον τοίχο και σχηματίζει γωνία 60° με τον τοίχο. Αν το βάρος της πινακίδας είναι W_s = 50 N και της ράβδου W_B =20 N να βρεθούν η τάση στο σκοινί καθώς και η δύναμη στο μεντεσέ.



Η δύναμη F που ασκεί ο μεντεσές αναλύεται σε δύο δυνάμεις Η και V καθώς και η τάση του σκοινιού T στις T_x και T_y. (T_x = T cos(30) και T_y = T sin(30))

Για την κατακόρυφη διεύθυνση :
$V + T_y - W_B - W_S/2 - W_S/2 = 0$



Για την οριζόντια διεύθυνση :
$T_x - H = 0$

Οι ροπές ως προς το μεντεσέ είναι

$$-W_B\frac{l}{2}-\frac{W_S}{2}(l-1)-\frac{W_S}{2}l+T_y l=0$$

και λύνοντας ως προς Τ έχουμε

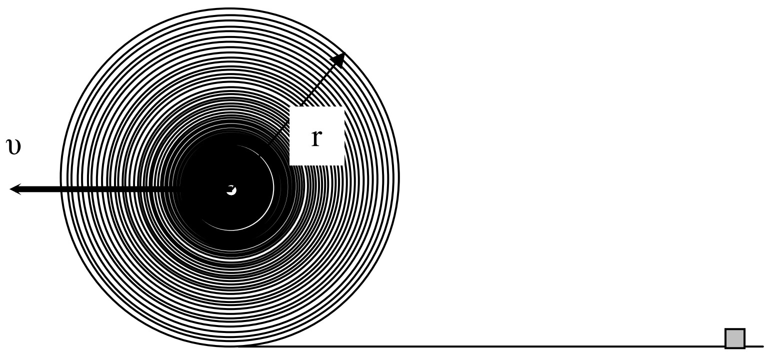
*T sin(30) 2.4m = 20N*1.2m + 25N*1.4m+25N*2.4m => T=99.2 N*

*$H=T_x$ = T cos(30) =99.2N *0.866 =85.9 N*

$V=-T_y + W_B + W_S/2 + W_S/2 = T\sin(30) + W_B + W_S$ = 20.4 N

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ενας κύλινδρος τυπογραφικού χάρτου , διαμέτρου d = 1.20 m, βρίσκεται σε επίπεδο δρόμο με πακτωμένο το ελεύθερο άκρο του χαρτιού. Δίνουμε μία ελαφριά ώθηση στον κύλινδρο ώστε να αρχίσει να κυλάει με αρχική ταχύτητα του Κ.Μ., υ_o = 0 m/s ενώ το χαρτί να αρχίσει να ξετυλίγεται. Υπολογίστε την ταχύτητα του Κ.Μ. όταν η ακτίνα του κυλίνδρου γίνει r_t = 0.3 m. Θεωρούμε τον κύλινδρο ομογενή.



Καθώς το χαρτί θα ξετυλίγεται, κατεβαίνει το Κ.Μ. του. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του κέντρου μάζας μετατρέπεται σε κινητική του κέντρου μάζας και σε περιστροφική του κυλίνδρου. Ετσι αν R = d/2 η αρχική ακτίνα του κυλίνδρου (με υ_o = 0 m/s), όταν η ακτίνα γίνει r θα έχουμε:

$$\mathrm{M}\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{R} - \mathrm{m}\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{r} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}\cdot \omega^2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{m}\cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

όπου m η μάζα του κυλίνδρου όταν η ακτίνα γίνει r. Αν ρ η πυκνότητα του χαρτιού και s το μήκος του κυλίνδρου, θα είναι:

$M = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot s$, $m = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot s$ και βεβαίως $\upsilon = \omega \cdot r$, ενώ $I = ½ \cdot m \cdot r^2$

Με τα παραπάνω η (1) γίνεται:

$$\rho \cdot \pi \cdot s \cdot g \cdot (R^3 - r^3) = ¼ \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot s \cdot r^2 \cdot \upsilon^2/r^2 + ½ \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot s \cdot \upsilon^2 \Rightarrow$$

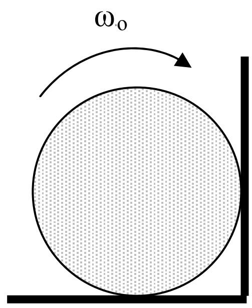
$$g \cdot (R^3 - r^3) = ¼ \cdot r^2 \cdot \upsilon^2 + ½ \cdot r^2 \cdot \upsilon^2 = ¾ \cdot r^2 \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \qquad \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{4\cdot g\cdot (R^3 - r^3)}{3\cdot r^2}}}$$

Τελικά για $r = r_t$ θα έχουμε:

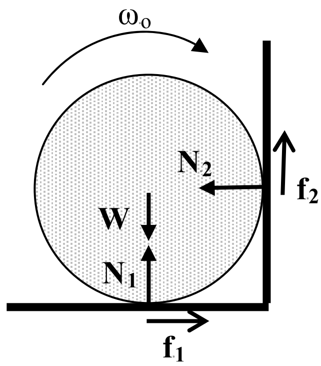
$$\upsilon = \sqrt{\frac{4\cdot g\cdot (R^3 - r_t^3)}{3\cdot r^2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 9.81 m/s^2 \cdot (0.6^3 - 0.3^3) m^3}{3\cdot 0.3^2 m^2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 9.81\cdot (0.6^3 - 0.3^3)}{3\cdot 0.09}\frac{m^2}{s^2}} = 5.2\ m/s$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ομογενής κύλινδρος ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του με γωνιακή ταχύτητα ω_o = 600 στροφές/min και τοποθετείται σε γωνιά όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ της ρόδας και του τοίχου ή του δαπέδου είναι μ = 0.05, πόσες στροφές θα κάνει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει και πόσος χρόνος θα απαιτηθεί. Η μάζα της ρόδας είναι m = 25 kg και η ακτίνα της είναι R = 0.25 m.



Αφού δεν έχουμε κρούση, από την στιγμή που η ρόδα θα ακουμπήσει τον τοίχο θα ασκούνται πάνω της το βάρος της **W**, η αντίδραση του δαπέδου $\mathbf{N_1}$, η αντίδραση του τοίχου $\mathbf{N_2}$ και οι τριβές $\mathbf{f_1}$ και $\mathbf{f_2}$ που οφείλονται στην τριβή της περιστρεφόμενης ρόδας στο δάπεδο και στον τοίχο αντίστοιχα και έχουν φορά αντίθετη της περιστροφής.



Αφού το κέντρο μάζας ισορροπεί, μελετώντας τα μέτρα των δυνάμεων στους δύο άξονες X και Y θα έχουμε:

$N_2 = f_1$ και $f_2 + N_1 = m \cdot g$

και $f_1 = \mu \cdot N_1$ και $f_2 = \mu \cdot N_2$

Από αυτές τις τέσσερις εξισώσεις λύνουμε ως προς f_1 και f_2 και τελικά έχουμε:

$$f_1 = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{1+\mu^2} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{\mu^2 \cdot m \cdot g}{1+\mu^2} \qquad (1)$$

Αφού η ρόδα περιστρέφεται, εξετάζουμε τις ροπές που ασκούνται σε αυτήν ως προς τον άξονα περιστροφής της. Ροπή ασκούν μόνο οι $\mathbf{f_1}$ και $\mathbf{f_2}$ αφού οι άλλες δυνάμεις περνούν από τον άξονα περιστροφής. Ετσι έχουμε:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = -(f_1 + f_2) \cdot R \qquad (2)$$

όπου I η ροπή αδράνειας της ρόδας και το αρνητικό πρόσημο μπαίνει γιατί η οι τριβές είναι αντίθετες από την περιστροφή και συνεπώς την επιβραδύνουν. Αν η ροπή αδρανείας της ρόδας είναι I = ½ · m · R^2 θα έχουμε:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = -(f_1 + f_2) \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \omega = -\frac{2 \cdot (f_1 + f_2) \cdot R}{m \cdot R^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\omega_o}^{0} d\omega \cdot \omega = -\frac{2 \cdot (f_1 + f_2) \cdot R}{m \cdot R^2} \cdot \int_0^{\Phi} d\phi$$

όπου Φ θα είναι η συνολική γωνία που θα περιστραφεί η ρόδα μέχρι να σταματήσει ($\omega = 0\ s^{-1}$)

Λύνοντας τα ολοκληρώματα έχουμε τελικά: $$\Phi = \frac{m \cdot R \cdot \omega_o^2}{4 \cdot (f_1 + f_2)} \qquad (3)$$

Ο αριθμός των στροφών υπολογίζεται από την σχέση S = Φ/(2·π)
και τελικά χρησιμοποιώντας την (1) και (3) και επειδή $\omega_o = 2\cdot\pi\cdot 600$ στρ./60s = $2\cdot\pi\cdot 10\ s^{-1}$, έχουμε:

$$\boxed{S=\frac{m\cdot R\cdot\omega_o^2}{8\cdot\pi\cdot(f_1+f_2)}}=\frac{m\cdot R\cdot\omega_o^2\cdot(1+\mu^2)}{8\cdot\pi\cdot(1+\mu)\cdot\mu\cdot m\cdot g}=\frac{0.25m\cdot 100s^{-2}\cdot 4\cdot\pi^2\cdot(1+0.0025)}{8\cdot\pi\cdot(1+0.05)\cdot 0.05\cdot 9.81m\cdot s^{-2}}=76.4\,\text{στροφές}$$

Από την σχέση (2) έχουμε $\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2\cdot d\omega=-(f_1+f_2)\cdot R\cdot dt \quad\Rightarrow$

$\int_0^T dt=-\frac{m\cdot R}{2\cdot(f_1+f_2)}\cdot\int_{\omega_o}^0 d\omega$ όπου T ο χρόνος που θα χρειαστεί να σταματήσει.

Συνεπώς $$\boxed{T=\frac{m\cdot R\cdot\omega_o}{2\cdot(f_1+f_2)}}=\frac{m\cdot R\cdot\omega_o\cdot(1+\mu^2)}{2\cdot(1+\mu)\cdot\mu\cdot m\cdot g}=\frac{0.25m\cdot 2\cdot\pi\cdot 10s^{-1}\cdot(1+0.0025)}{2\cdot(1+0.05)\cdot 0.05\cdot 9.81m\cdot s^{-2}}=15.26s$$

Β' τρόπος υπολογισμού αριθμού στροφών:

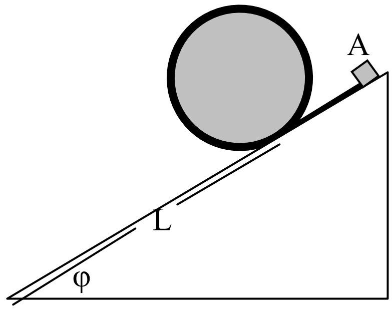
Η κινητική ενέργεια περιστροφής θα δαπανηθεί στο έργο των τριβών που θα διανύσουν απόσταση s μέχρι να σταματήσει η ρόδα να περιστρέφεται:

$\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2=(f_1+f_2)\cdot s$

Αλλά αν S ο αριθμός στροφών θα έχουμε S = s / (2·π·R)

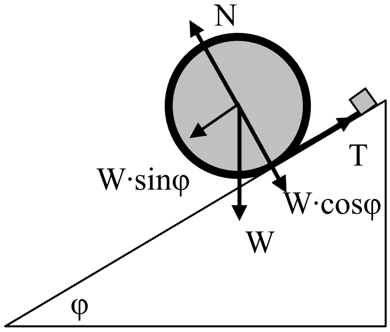
Από τις τελευταίες σχέσεις και την (1) έχουμε τελικά $\boxed{S=\frac{m\cdot R\cdot\omega_o^2}{8\cdot\pi\cdot(f_1+f_2)}}$ που υπολογίσαμε και προηγουμένως.

ΑΣΚΗΣΗ 7
Ενα αβαρές και μη εκτατό σχοινί είναι τυλιγμένο σφιχτά γύρω από κυλινδρικό δίσκο ακτίνας R = 40 cm και μάζας m = 2.5 kgr. Το ελεύθερο ακρο του σχοινιού είναι στερεωμένο στο σημείο A. Αφήνουμε τον κύλινδρο ελεύθερο να κυλίσει σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία φ = 35°. Ο κύλινδρος κυλίεται προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο κατα μήκος L = 1.0 m ενώ το σχοινί ξετυλίγεται. Υπολογίστε τον χρόνο που θα απαιτηθεί να διανύσει την απόσταση L και την ταχύτητα του κυλίνδρου στο κατώτατο σημείο.



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις πάνω στον κύλινδρο και τις αναλύουμε σε δύο διευθύνσεις παράλληλα και κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο.

Στο σημείο επαφής του σχοινιού στον κύλινδρο θα υπάρχει μία δύναμη **T** η οποία θα αντιδρά στην ελεύθερη ολίσθηση του κυλίνδρου και θα ασκεί μία ροπή σε αυτόν με αποτέλεσμα αυτός να περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνάει από τον άξονα συμμετρίας του. Ετσι, καθώς το Κέντρο Μάζας θα κινείται προς τα κάτω και συγχρόνως ο κύλινδρος θα περιστρέφεται, θα έχουμε:



$$m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = m \cdot g \cdot \sin\phi - T \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dt} = g \cdot \sin\phi - \frac{T}{m} \quad (1)$$

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = T \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{T \cdot R}{I} = \frac{T \cdot R}{1/2 \cdot m \cdot R^2} = \frac{2 \cdot T}{m \cdot R} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την T από την (2) στην (1) και από την σχέση ω = υ / R έχουμε:

$$T = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{m \cdot R}{2} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{m}{2} \quad \text{και} \quad \frac{d\upsilon}{dt} = g \cdot \sin\phi - \frac{1}{m} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{m}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{g \cdot \sin\phi}{3/2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot \int_0^t dt = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot t} \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας την (3) έχουμε:

$$x = \frac{2 \cdot g \cdot \sin\phi}{3} \cdot \int_0^t t \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot t^2} \quad (4)$$

Από την (4) υπολογίζουμε τον χρόνο κύλισης μέχρι να φτάσει στο κατώτερο σημείο:

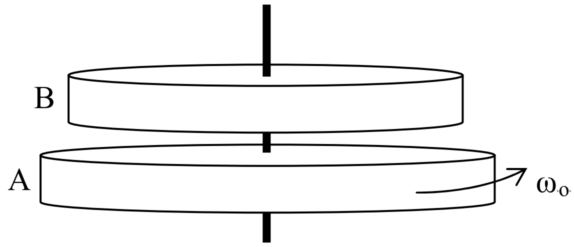
$$t_L = \sqrt{\frac{3 \cdot L}{g \cdot \sin\phi}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.0m}{9.81m/s^2 \cdot \sin 35°}} = \sqrt{0{,}533\ s^2} = 0{,}73\ s$$

και $\upsilon_L = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot t_L = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\phi \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot L}{g \cdot \sin\phi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3 \cdot L \cdot g^2 \cdot \sin^2\phi}{9 \cdot g \cdot \sin\phi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot L \cdot g \cdot \sin\phi}{3}} =$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 1.0\text{m} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot \sin 35°}{3}} = \sqrt{7{,}502 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 2.7\ \text{m/s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δύο ομογενείς οριζόντιοι δίσκοι Α και Β, ακτίνας R_1=20cm και R_2=15cm αντίστοιχα, μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από κάθετο άξονα ο οποίος περνάει από τα κέντρα τους. Ο κάτω δίσκος Α, μάζας m_1=1.0kgr, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_o=3000στροφές/min ενώ ο πάνω δίσκος Β, μάζας m_2=1.5kgr, κρατείται ακίνητος σε μικρή απόσταση πάνω από τον Α. Αν αφήσουμε τον Β να πέσει πάνω στον Α και αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του Α και Β δίσκου είναι μ=0.1, υπολογίστε τον χρόνο που απαιτείται μέχρι και οι δύο δίσκοι να περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.



Κατ' αρχήν θεωρούμε τις ροπές αδράνειας των δύο δίσκων γνωστές και ίσες προς $I_1 = ½ \cdot m_1 \cdot R_1^2$ και $I_1 = ½ \cdot m_2 \cdot R_2^2$.

Επειδή μεταξύ των δίσκων έχουμε τριβή και αφού έχουμε περιστροφική κίνηση πρέπει να υπολογίσουμε την ροπή που αναπτύσσεται σε κάθε δίσκο λόγω της τριβής. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα στοιχειώδες τμήμα του δίσκου Β μάζας dm που απέχει r από το άξονα περιστροφής. Το τμήμα αυτό θα προκαλεί μία στοιχειώδη ροπή ίση με $d\tau = \mu \cdot dm \cdot g \cdot r$.

Αν ρ είναι η επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου Β, η συνολική ροπή θα ισούται με:

$$\tau = \int d\tau = \int_0^{R_2} \mu \cdot g \cdot r \cdot dm = \int_0^{R_2} \mu \cdot g \cdot r \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{R_2} r^2 \cdot dr =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot g \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_2^3 = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot g \cdot m_2 \cdot R_2$$

Αυτή η ροπή θα εφαρμοστεί στον δίσκο Α και θα τον επιβραδύνει από την γωνιακή ταχύτητα ω_o στην τελική ω και στον δίσκο Β (από τον Α, σύμφωνα με το δράση-αντίδραση) και θα τον επιταχύνει από την γωνιακή ταχύτητα 0 έως την τελική ω. Συνεπώς θα έχουμε:

για τον δίσκο Α (με - αφού επιβραδύνεται): $-\tau = -\frac{2}{3} \cdot \mu \cdot g \cdot m_2 \cdot R_2 = I_1 \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow$

$$d\omega = -\frac{2 \cdot \mu \cdot g \cdot m_2 \cdot R_2}{3 \cdot I_1} \cdot dt$$

και:

$$\int_{\omega_o}^{\omega_1} d\omega = \omega_1 - \omega_o = -\int_0^t \frac{2 \cdot \mu \cdot g \cdot m_2 \cdot R_2}{3 \cdot I_1} \cdot dt = -\frac{2 \cdot \mu \cdot g \cdot m_2 \cdot R_2}{3 \cdot I_1} \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \omega_o - \frac{2 \cdot \mu \cdot g \cdot m_2 \cdot R_2}{3 \cdot I_1} \cdot t \qquad (1)$$

και για τον δίσκο Β $\quad \tau = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot g \cdot m \cdot R_2 = I_2 \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\omega_2} d\omega = \omega_2 = \frac{2 \cdot \mu \cdot g \cdot m \cdot R_2}{3 \cdot I_2} \cdot t \quad (2)$

Οι δύο δίσκοι θα περιστρέφονται με την ίδια ταχύτητα όταν $\omega_1 = \omega_2$ μετά από χρόνο T, συνεπώς από την (1) και (2) έχουμε:

$$\omega_o - \frac{2\cdot\mu\cdot g\cdot m_2\cdot R_2}{3\cdot I_1}\cdot T = \frac{2\cdot\mu\cdot g\cdot m_2\cdot R_2}{3\cdot I_2}\cdot T \quad\Rightarrow\quad \omega_o = \frac{2\cdot\mu\cdot g\cdot m_2\cdot R_2}{3}\cdot T\cdot\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{3\cdot\omega_o}{2\cdot\mu\cdot g\cdot m_2\cdot R_2}\cdot\frac{I_1\cdot I_2}{I_1+I_2}}$$

ή αφού $I_1 = ½\cdot m_1\cdot R_1^2$ και $I_1 = ½\cdot m_2\cdot R_2^2$

θα είναι: $\dfrac{I_1\cdot I_2}{I_1+I_2} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot R_1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot R_2^2}{\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot R_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot R_2^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{m_1\cdot m_2\cdot R_1^2\cdot R_2^2}{(m_1\cdot R_1^2+m_2\cdot R_2^2)}$ και τελικά

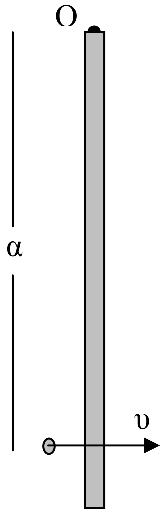
$$T = \frac{3\cdot\omega_o\cdot m_1\cdot m_2\cdot R_1^2\cdot R_2^2}{4\cdot\mu\cdot g\cdot m_2\cdot R_2\cdot(m_1\cdot R_1^2+m_2\cdot R_2^2)} =$$

$$= \frac{3\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{3000}{min}\cdot\frac{1min}{60s}\cdot 1.0kgr\cdot 2.0kgr\cdot 0.2^2m^2\cdot 0.15^2m^2}{4\cdot 0.1\cdot 9.81m/s^2\cdot 2.0kgr\cdot 0.15m\cdot(1.0\cdot 0.2^2+2.0\cdot 0.15^2)kgr\cdot m^2} = \quad \text{(μετά από απλοποιήσεις)}$$

$$= \frac{2\cdot\pi\cdot 3\cdot 50\cdot 2.0\cdot 0.2^2\cdot 0.15^2}{4\cdot 0.1\cdot 9.81\cdot 2.0\cdot 0.15\cdot(1.0\cdot 0.2^2+2.0\cdot 0.15^2)}s = 17.0s$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ράβδος μήκους L = 1.0 m και μάζας M = 1.5 kg, η οποία μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα σε άξονα στο ένα άκρο της (O), αναρτάται στην κατακόρυφη θέση. Μία σφαίρα μάζας m = 0.004 kg και ταχύτητας υ = 200 m/s χτυπάει την ράβδο σε απόσταση α = 0.9m από το O και σφηνώνεται σε αυτή.
α. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά από κρούση.
β. Να οριστεί η ορμή του συστήματος μόλις πριν την κρούση και αμέσως μετά από αυτή.
γ. Πόση πρέπει να είναι η απόσταση α ώστε να ισχύει η συνθήκη διατήρησης της ορμής;



α) Υπολογίζουμε την στροφορμή πριν και αμέσως μετά την κρούση θεωρώντας ότι η ροπή αδρανείας της ράβδου προς άξονα που βρίσκεται στο άκρο της είναι: $I = 1/3 \cdot M \cdot L^2$ και ότι η ροπή αδρανείας με την ενσωμάτωση της σφαίρας γίνεται: $I = (1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2)$.

Εχουμε πριν την κρούση: $L_{\pi\rho\iota\nu} = m \cdot \upsilon \cdot \alpha$ και αμέσως μετά:

$L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = I \cdot \omega_o = (1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2) \cdot \omega_o$

Επειδή η στροφορμή διατηρείται, πρέπει $L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ και συνεπώς:

$$m \cdot \upsilon \cdot \alpha = (1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2) \cdot \omega_o \Rightarrow \boxed{\omega_o = \frac{m \cdot \upsilon \cdot \alpha}{1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2}} \qquad (1)$$

$$\omega_o = \frac{m \cdot \upsilon \cdot \alpha}{1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2} = \frac{0.004\text{kg} \cdot 200\text{m/s} \cdot 0.9\text{m}}{1/3 \cdot 1.5\text{kg} \cdot 1.0\text{m}^2 + 0.004\text{kg} \cdot 0.9^2\text{m}^2} =$$

$$\omega_o = \frac{0.004 \cdot 200 \cdot 0.9}{1/3 \cdot 1.5 \cdot 1.0 + 0.004 \cdot 0.9^2} s^{-1} = 1.43\ s^{-1}$$

β) Η ορμή μόλις πριν από την κρούση θα ισούται με την ορμή της σφαίρας και θα ισούται με:

$P_{\pi\rho\iota\nu} = m \cdot \upsilon$, αμέσως μετά δε θα ισούται με: $P_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = m \cdot \upsilon_\sigma + M \cdot \upsilon_{cm}$ και έχοντας υπ΄όψη την σχέση γωνιακής ταχύτητας και ταχύτητας και την σχέση (1) θα έχουμε:

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = m \cdot \upsilon_\sigma + M \cdot \upsilon_{cm} = m \cdot \omega_o \cdot \alpha + M \cdot \omega_o \cdot L/2 = \omega_o \cdot (m \cdot \alpha + M \cdot L/2) =$$

$$= \frac{\mathbf{m \cdot \upsilon \cdot \alpha} \cdot (m \cdot \alpha + M \cdot L/2)}{\mathbf{1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2}} = 1.078\ kg\ m/s$$

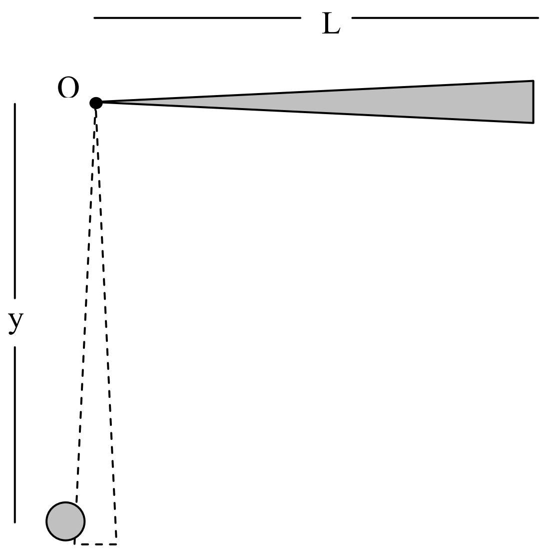
Ας σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση ασκείται δύναμης πάνω στο καρφί, αλλά είναι εξωτερική του συστήματος ράβδου-σφαίρας και γι΄αυτό η ορμή μόλις πρίν είναι διαφορετική από την ορμή αμέσως μετά.

γ) Αν ισχύει η συνθήκη διατήρησης της ορμής θα έχουμε:

$$m \cdot \upsilon = \frac{m \cdot \upsilon \cdot \alpha \cdot (m \cdot \alpha + M \cdot L/2)}{1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2} \Rightarrow \qquad 1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2 = \alpha \cdot (m \cdot \alpha + M \cdot L/2) \quad \Rightarrow$$

$$1/3 \cdot M \cdot L^2 + m \cdot \alpha^2 = m \cdot \alpha^2 + \alpha \cdot M \cdot L/2 \quad \Rightarrow \quad 1/3 \cdot L^2 = \alpha \cdot L/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3} \cdot L = 0.67 \text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10
Ρόπαλο μήκους L = 1.0 m, το οποίο μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα σε άξονα στο άκρο Ο και στηρίζεται σε οριζόντιο θέση, αφήνεται να πέσει ελεύθερα. Όταν περνάει από την κατακόρυφο, το ελεύθερο άκρο του κτυπάει ελαστικά μικρή μπάλα μάζας m = 0.4 kgr σε απόσταση y = 0.9m από το Ο. Αν η γραμμική πυκνότητα της ράβδου ισούται με ρ = c·x, όπου c = 20 kgr/m², υπολογίστε την ταχύτητα της μπάλας αμέσως μετά την κρούση.



Κατ' αρχήν, υπολογίζουμε την μάζα του ρόπαλου M, την απόσταση του κέντρου μάζας του από το O και την ροπή αδράνειας του ως προς το O.

Ενα στοιχειώδες τμήμα dm του ρόπαλου θα έχει μάζα

dm = ρ·dx και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$M = \int dm = \int_0^L \rho \cdot dx = \int_0^L c \cdot x \cdot dx = c \cdot \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^L = c \cdot \frac{L^2}{2}$$

και ροπή αδράνειας ως προς το O:

$$I = \int x^2 \cdot dm = \int_0^L x^2 \cdot \rho \cdot dx = c \cdot \int_0^L x^3 \cdot dx = c \cdot \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^L = c \cdot \frac{L^4}{4}.$$

Το κέντρο μάζας θα απέχει $k = \dfrac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \dfrac{\int_0^L x \cdot \rho \cdot dx}{M} = \dfrac{\int_0^L c \cdot x^2 \cdot dx}{M} = \dfrac{c \cdot \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^L}{M} = \dfrac{c \cdot \frac{L^3}{3}}{c \cdot \frac{L^2}{2}} = \dfrac{2}{3} \cdot L$

Τώρα, κατά την κίνηση της ράβδου στην κατακόρυφο, η δυναμική ενέργεια της ράβδου θα μετατραπεί σε κινητική ενέργεια:

$$M \cdot g \cdot k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του ρόπαλου ως προς το άκρο της.

Από αυτή την σχέση προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα του ρόπαλου όταν φτάσει στην κατακόρυφη θέση:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot k}{I}} \qquad (1)$$

Όταν η ράβδος θα φτάσει στην κατακόρυφη θέση θα συγκρουστεί ελαστικά με το σώμα m. Η διατήρηση της ενέργειας και της στροφορμής σε αυτή την περίπτωση θα μας δώσει:

$$\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega'^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 \quad (2) \quad \text{και} \qquad I\cdot\omega = I\cdot\omega'+m\cdot\upsilon\cdot y \quad (3)$$

όπου ω' η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου και υ η ταχύτητα του σώματος m αμέσως μετά την κρούση.

Από την (3) έχουμε $\omega' = \dfrac{I\cdot\omega - m\cdot\upsilon\cdot y}{I}$ και αντικαθιστώντας στην (2), αφού απλοποιήσουμε το ½, έχουμε:

$$I\cdot\omega^2 = I\cdot\frac{(I\cdot\omega - m\cdot\upsilon\cdot y)^2}{I^2}+m\cdot\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad I^2\cdot\omega^2 = (I\cdot\omega - m\cdot\upsilon\cdot y)^2 + I\cdot m\cdot\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$I^2\cdot\omega^2 - 2\cdot I\cdot\omega\cdot m\cdot y\cdot\upsilon + m^2\cdot\upsilon^2\cdot y^2 + I\cdot m\cdot\upsilon^2 - I^2\cdot\omega^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$(m\cdot y^2 + I)\cdot m\cdot\upsilon^2 - 2\cdot I\cdot\omega\cdot m\cdot y\cdot\upsilon = 0$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε υ = 0, απορρίπτεται γιατί δεν έχει φυσική σημασία και

$$\boxed{\upsilon = \frac{2\cdot I\cdot\omega\cdot y}{I+m\cdot y^2} = \frac{2\cdot I\cdot y}{I+m\cdot y^2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot M\cdot g\cdot k}{I}}}$$

Τελικά

$$\upsilon = \frac{2\cdot c\cdot\frac{L^4}{4}\cdot y}{c\cdot\frac{L^4}{4}+m\cdot y^2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot c\cdot\frac{L^2}{2}\cdot g\cdot k}{c\cdot\frac{L^4}{4}}} = \frac{2\cdot c\cdot L^4\cdot y}{c\cdot L^4+4\cdot m\cdot y^2}\cdot\sqrt{\frac{4\cdot g\cdot k}{L^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 20\ \text{kgr}/\text{m}^2\cdot 1.0\ \text{m}^4\cdot 0.9\ \text{m}}{20\ \text{kgr}/\text{m}^2\cdot 1.0\ \text{m}^4 + 4\cdot 0.4\ \text{kgr}\cdot 0.9^2\,\text{m}^2}\cdot\sqrt{\frac{4\cdot 9.81\ \text{m}/\text{s}^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1.0\ \text{m}}{1.0\text{m}^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 20\cdot 0.9\ \text{m}}{20+4\cdot 0.4\cdot 0.81}\cdot\sqrt{\frac{8\cdot 9.81}{3\ \text{s}^2}} = 8.7\ \text{m}/\text{s}$$