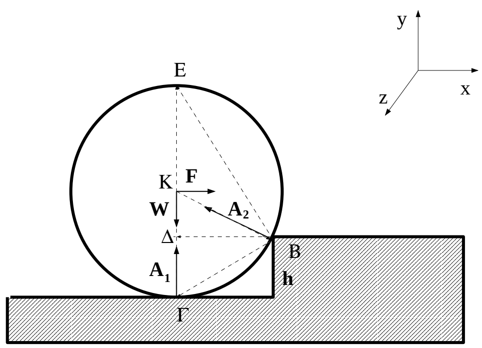
5^{η} Εργασία – Λύσεις

1

Ποια είναι ή ελάχιστη οριζόντια δύναμη F πού πρέπει να εφαρμοστεί πάνω στον άξονα μιας ρόδας, ώστε να ανέβει πάνω σ' ένα πεζοδρόμιο; Δίνονται ή ακτίνα R της ρόδας, το βάρος της W και το ύψος του πεζοδρομίου h.

(8 μονάδες)

<u>**Λύση:**</u>



Σχήμα 1:

Πάνω στη ρόδα ενεργούν οι δυνάμεις $\vec{W}$ και $\vec{F}$ καθώς και οι αντιδράσεις $\vec{A}_1$ και $\vec{A}_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα (1). Τη στιγμή που αρχίζει η ρόδα να ανεβαίνει, αρχίζει να στρέφεται γύρω από το σημείο B και διακόπτεται η επαφή της με το δάπεδο στο σημείο Γ. Αποτέλεσμα αυτής της κίνησης είναι ότι η αντίδραση $\vec{A}_1$ παύει να ενεργεί. Σε αυτή την οριακή κατάσταση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ρόδα ισορροπεί οπότε ισχύει:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{N} = 0$$

Αν πάρουμε τις ροπές ως προς το σημείο B έχουμε:

$$\overrightarrow{BK} \times \vec{F} + \overrightarrow{BK} \times \vec{W} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta K}) \times (\vec{F} + \vec{W}) = 0 \tag{1}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$\Delta K = R - h$$

και από το τρίγωνο $B\Delta K$

$$B\Delta = \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$(1) \Rightarrow \quad \left[-\sqrt{2Rh - h^2}\hat{x} + (R - h)\hat{y}\right] \times (F\hat{x} - W\hat{y}) = 0$$

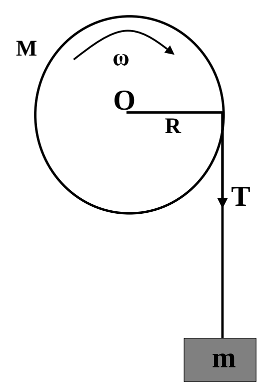
$$\Rightarrow \quad W\sqrt{2Rh-h^2}-F(R-h)=0$$

$$\Rightarrow \quad F=\frac{W\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$$

2

Συμπαγής κύλινδρος με μάζα $2000\,g$ και ακτίνα $4\,cm$, είναι αναγκασμένος να στρέφεται γύρω από τον άξονα του, που είναι οριζόντιος. Ένα νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο και το ένα άκρο του, που κρέμεται ελεύθερο, συγκρατεί μια μάζα $150\,g$ (βλ. σχήμα 2). Να βρείτε τη γραμμική επιτάχυνση της μάζας, τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, την τάση του νήματος και την κατακόρυφη δύναμη που συγκρατεί τον κύλινδρο.(Δίδεται $g=9,8\ m/s^2$)
(8 μονάδες)

Λύση:



Σχήμα 2:

Η ροπή N που δημιουργεί η τάση του νήματος είναι:

$$N=TR=I\alpha$$

όπου α είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Η μεταφορική επιτάχυνση a του σώματος μάζας m δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton:

$$mg-T=ma$$

όπου η γωνιακή και μεταφορική επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση:

$$a=\alpha R$$

διότι

$$v=\omega R$$

$$\Rightarrow \quad dv/dt = d\omega/dtR$$
$$\Rightarrow \quad a = \alpha R$$

Επομένως, η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$mg = I\frac{\alpha}{R} + ma = \left(\frac{I}{R^2} + m\right)a$$

όπου η ροπή αδρανείας I του κυλίνδρου είναι $I = MR^2/2$. Άρα θα έχουμε:

$$a = \frac{mg}{m + M/2} = \frac{0,150 \times 9,8}{0,15 + 2/2}\, m/s^2 = 1,28\ m/s^2$$

και η γωνιακή επιτάχυνση α είναι:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1,28}{0,04}\, rad/s^2 = 32\, rad/s^2$$

και η τάση T του νήματος είναι:

$$T = \frac{I}{R}\alpha = \frac{1}{2}MR\alpha = 1,28\ N$$

και η κατακόρυφος δύναμης που συγκρατεί τον κύλινδρο είναι:

$$F = Mg + T = 2 \times 9,8 + 1,28\ N = 20,9\ N$$

3

Ένας βαρύς τροχός έχει σχήμα συμπαγούς κυλίνδρου με ακτίνα $0,50\,m$, πάχος $0,20\,m$ και μάζα $1200\,kg$. Ο τροχός στηρίζεται σε ρουλεμάν και στρέφεται ελεύθερα με γωνιακή ταχύτητα 150 στροφές ανά δευτερόλεπτο. Σε κάποια στιγμή εφαρμόζουμε στον τροχό μια τροχοπέδη, που δρα στην περιφέρεια του τροχού με κάθετη δύναμη ίση με το βάρος μιας μάζας $40\,kg$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των τριβόμενων επιφανειών είναι $0,4$ και δεχόμαστε ότι είναι ανεξάρτητος από τη σχετική ταχύτητα των επιφανειών. Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει ο τροχός; (Δίδεται $g = 9,8\ m/s^2$)

(8 μονάδες)

Λύση:

Η ροπή της δύναμης της τριβής είναι:

$$N = F_\tau R = -\mu AR = -\mu mgR$$

όπου A είναι η κάθετη δύναμη που δρα στον τροχό. Επιπλέον, η ροπή συνδέεται με τη γωνιακή επιτάχυνση α:

$$N = \frac{dL}{dt} = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

όπου η ροπή αδρανείας I του κυλίνδρου είναι $I = MR^2/2$ (μάζα του τροχού). Άρα η γωνιακή επιτάχυνση είναι:

$$I\alpha = -\mu mgR \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2\mu mgR}{MR^2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2\mu mg}{MR} = -\frac{2 \times 0,4 \times 40 \times 9,8}{1,2 \times 0,5}\, rad/s^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -0,523\, rad/s^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = -0,523$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 - 0,523\, t = 150 \times 2\pi - 0,523\, t$$

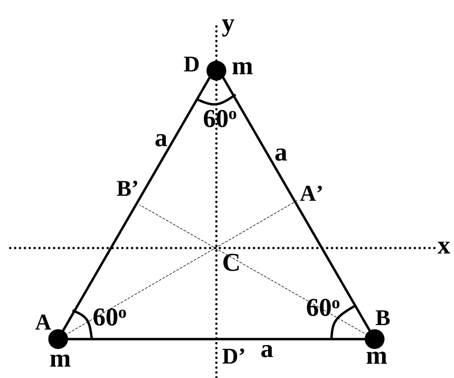
Άρα θα έχουμε $\omega = 0$ όταν:

$$t = \frac{300\pi}{0,523} = 1,8 \times 10^3\, s$$

4

Τρεις ίσες σημειακές μάζες βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a (βλ. σχήμα 4) και συνδέονται μεταξύ τους με ένα αβαρές τριγωνικό φύλλο.
(α) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_z ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο τρίγωνο και περνά από το κέντρο του, C.
(β) Να υπολογίσετε την I_y ως προς τον άξονα y (βλ. σχήμα 4).
(γ) Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των κάθετων αξόνων, για να υπολογίσετε την I_x.
(8 μονάδες)

Λύση:



Σχήμα 4:

(α)

Το σημείο C είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου (το σημείο που τέμνονται οι διάμεσοι του τριγώνου), άρα θα ισχύει από την Ευκλίδεια γεωμετρία: $(CD) = (2/3)(DD')$ και $(DD') = a \sin 60^o$, επομένως:

$$(CD) = \frac{2}{3}a\sin 60^o \quad \Rightarrow \quad (CD) = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Λόγω συμμετρίας, ομοίως θα ισχύει:

$$(CD) = (CA) = (CB) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο C, είναι:

$$I_z = 3m(CD)^2 = 3m\frac{a^2}{3} = ma^2$$

(β)

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των y θα είναι:

$$I_y = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{2}$$

(γ)

Από το θεώρημα των καθέτων αξόνων θα έχουμε:

$$I_x + I_y = I_z$$

$$\Rightarrow \quad I_x = I_z - I_y = ma^2 - \frac{ma^2}{2} = \frac{ma^2}{2}$$

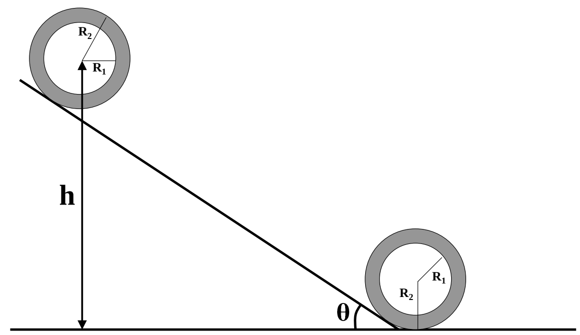
5

Μια κούφια σφαίρα με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2, κυλάει προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης ϑ.
(α) Να βρείτε τη γωνιακή και τη γραμμική επιτάχυνση της σφαίρας.
(β) Στο χαμηλότερο άκρο του, το κεκλιμένο επίπεδο συνδέεται με καμπύλη επιφάνεια, που τελικά καταλήγει σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Με ποια ταχύτητα θα κινείται το σώμα στο τελικό οριζόντιο επίπεδο, αν ξεκινάει από την ηρεμία, και το κέντρο του βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το τελικό οριζόντιο επίπεδο; (Να χρησιμοποιήσετε την αρχή διατήρησης της ενέργειας).
(10 μονάδες)

Λύση:

(α)

Η ροπή αδρανείας της κούφιας σφαίρας μπορεί να βρεθεί αφού θεωρήσουμε δύο σφαίρες ίδιας πυκνότητας μάζας με ακτίνες R_2 και R_1. Βρίσκοντας τις ροπές αδρανείας των δυο αυτών σφαιρών, η διαφορά τους θα είναι η ζητούμενη ροπή αδρανείας.
Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδρανείας μιας σφαίρας ακτίνας r με πυκνότητα μάζας ρ είναι:



Σχήμα 5:

$$I_s = \frac{2}{5} r^2 (\text{Μάζα}) = \frac{2}{5} r^2 \rho (\text{Όγκος}) = \frac{2}{5} r^2 \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Η ζητούμενη ροπή αδρανείας, I είναι:

$$I = \frac{2}{5} R_2^2 \rho \frac{4}{3} \pi R_2^3 - \frac{2}{5} R_1^2 \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{5} \frac{4}{3} \pi \rho (R_2^5 - R_1^5)$$

Η μάζα της κούφιας σφαίρας μπορεί να εκφραστεί από την πυκνότητα της μάζας, και είναι:

$$M = \rho (\text{Όγκος}) = \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$$

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{4}{3} \pi = \frac{M}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

επομένως η ροπή αδρανείας, I είναι:

$$I = \frac{2}{5} M \frac{(R_2^5 - R_1^5)}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

Η γραμμική επιτάχυνση βρίσκεται εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας :

Σε μια τυχαία θέση y η ολική ενέργεια του σώματος ισούται με το άθροισμα της κινητικής (εξαιτίας της μεταφορικής και της περιστροφικής κίνησης) και της δυναμικής ενέργειας.

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + Mgy = \frac{1}{2} M (1 + \frac{I}{MR_2^2}) v^2 + Mgy$$

Η ολική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή, επομένως $dE/dt = 0$, άρα

$$\frac{dE}{dt} = M (1 + \frac{I}{MR_2^2}) v \frac{dv}{dt} + Mg \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1+\frac{I}{MR_2^2})v\alpha = -g\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad (1+\frac{I}{MR_2^2})v\alpha = gv\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{MR_2^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}\frac{M(R_2^5-R_1^5)}{MR_2^2(R_2^3-R_1^3)}}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{R_2^5(1-R_1^5/R_2^5)}{R_2^5(1-R_1^3/R_2^3)}} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}\frac{(1-(R_1/R_2)^5)}{(1-(R_1/R_2)^3)}}$$

και η γωνιακή επιτάχυνση α είναι:

$$v = R_2\omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = R_2\frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad a = R_2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R_2} = \frac{1}{R_2}\frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}\frac{(1-(R_1/R_2)^5)}{(1-(R_1/R_2)^3)}}$$

(β)

Σε ύψος h η κινητική ενέργεια είναι $K_i = 0$ και η δυναμική $U_i = Mgh$. Στο οριζόντιο επίπεδο το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ύψος R_2, επομένως η δυναμική ενέργεια θα είναι $U_f = MgR_2$ και η κινητική ενέργεια θα οφείλεται στη μεταφορική κίνηση συν την περιστροφική κίνηση:

$$K_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R_2^2}$$

Από το θεώρημα της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = MgR_2 + \frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{I}{MR_2^2}\right)$$

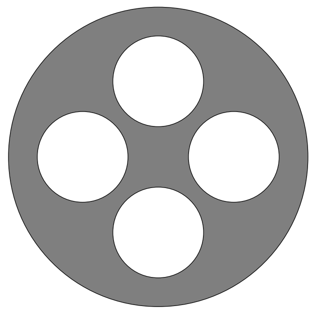
$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2g(h-R_2)}{1+I/(MR_2^2)}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2g(h-R_2)}{1+\frac{2}{5}\frac{(1-(R_1/R_2)^5)}{(1-(R_1/R_2)^3)}}$$

6

Χρησιμοποιώντας την αρχή ότι οι ροπές αδράνειας μπορούν να προστεθούν, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντρικό άξονα του κυλινδρικού σώματος του οποίου η διατομή φαίνεται στο σχήμα (6). Η μάζα του σώματος είναι M, η ακτίνα του a, η ακτίνα καθενός από τα τέσσερα κυλινδρικά κενά είναι $a/3$ και ο άξονας κάθε κενού βρίσκεται σε απόσταση $a/2$ από τον κεντρικό άξονα.

(10 μονάδες)



Σχήμα 6:

<u>Λύση:</u>

Η ροπή αδρανείας ενός στερεού κυλίνδρου πυκνότητας ρ και ακτίνας $a/3$ γύρω από τον άξονα συμμετρίας (άξονας που περνά από το κέντρο του) είναι:

$$I^{CM} = \frac{1}{2}m' \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 L \left(\frac{a}{3}\right)^2$$

Η ροπή αδρανείας του στερεού κυλίνδρου πυκνότητας ρ και ακτίνας $a/3$ γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου ακτίνας a είναι:

$$I' = I^{CM} + m' \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

διότι η απόσταση μεταξύ του κέντρου του κυλίνδρου ακτίνας a και του κέντρου του μικρού κυλίνδρου ακτίνας $a/3$ είναι $a/2$. Επομένως η ροπή αδρανείας είναι:

$$I' = \frac{1}{2}\rho\pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 L \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \rho\pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 L \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Υπάρχουν 4 τέτοιοι μικροί κύλινδροι που συνεισφέρουν αρνητικά στην ολική ροπή αδρανείας I όταν αφαιρεθούν οι μάζες τους:

$$I = \frac{1}{2}m^{''} a^2 - 4I'$$

όπου $m^{''}$ είναι η μάζα του κυλίνδρου ακτίνας a και μήκους L όταν υπάρχει μάζα σε όλο τον όγκο:

$$m^{''} = \rho\pi a^2 L$$

Επομένως η ροπή αδρανείας θα είναι:

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi a^4 L - \frac{11}{81}\rho\pi a^4 L \tag{2}$$

Η μάζα του κυλίνδρου, M αφού αφαιρέσουμε τους 4 μικρούς κυλίνδρους ακτίνας $a/3$ θα είναι:

$$M = m'' - 4m' = \rho\pi a^2 L - 4\rho\pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 L = \frac{5}{9}\rho\pi a^2 L$$

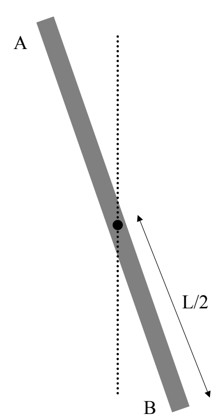
$$\Rightarrow \quad \rho\pi a^2 L = \frac{9}{5}M$$

και συνεπώς η ολική ροπή αδρανείας του σώματος είναι:

$$I = \frac{9}{5}Ma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{81}\right) = \frac{59}{90}Ma^2$$

7

Η γραμμική πυκνότητα μάζας ($\lambda = dm/dx$) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνεται από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της (A) σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της (B) σύμφωνα με τη σχέση $\lambda(x) = \lambda_0(1+x^2/L^2)$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της, O, και είναι κάθετος σε αυτήν.
(α) Υπολογίστε το κέντρο μάζας της ράβδου.
(β) Υπολογίστε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο της.
(10 μονάδες)



Σχήμα 7:

Λύση:

(α)

Το κέντρο βάρους της ράβδου δίνεται από τη σχέση :

$$x_{cm} = \frac{\int_0^L x dm}{\int_0^L dm}.$$

Για το ολοκλήρωμα του αριθμητή έχουμε :

$$\int_0^L x dm = \int_0^L x\lambda_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) dx = \lambda_0 \frac{3L^2}{4}.$$

Για το ολοκλήρωμα του παρονομαστή έχουμε :

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) dx = \lambda_0 \frac{4L}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda_0 \frac{3L^2}{4}}{\lambda_0 \frac{4L}{3}} = \frac{9}{16}L.$$

(β)

Η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το άκρο της με τη μικρότερη πυκνότητα είναι :

$$I = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) dx = \frac{8\lambda_0 L^3}{15}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των παραλλήλων αξόνων ($Steiner$) ώστε να βρούμε τη ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο μάζας.

$$I = I_{cm} + M x_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad I_{cm} = \frac{8\lambda_0 L^3}{15} - \frac{4\lambda_0 L}{3}\left(\frac{9L}{16}\right)^2 = \frac{107\lambda_0 L^3}{960}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κανόνα των παραλλήλων αξόνων (κανόνας του $Steiner$) ώστε να βρούμε τη ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο περιστροφής O.

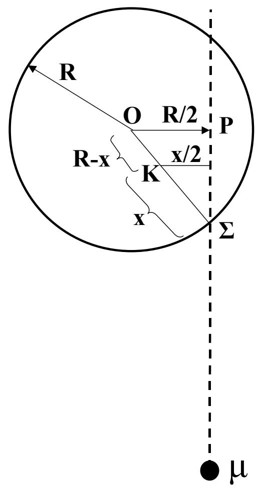
$$I_o = I_{cm} + MR^2,$$

όπου R είναι η απόσταση του σημείου περιστροφής από το κέντρο μάζας της ράβδου

$$R = \frac{9L}{16} - \frac{L}{2} = \frac{L}{16}.$$

Άρα για το I_o έχουμε :

$$I_o = \frac{107\lambda_0 L^3}{960} + \frac{4\lambda_0 L}{3}\left(\frac{L}{16}\right)^2 = \frac{56\lambda_0 L^3}{480}.$$



Σχήμα 8:

8

Ένας κυλινδρικός δίσκος με μάζα m και ακτίνα R βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα με μάζα μ, πού κινείται οριζόντια με ταχύτητα v, κτυπά το δίσκο στη διεύθυνση μιας ευθείας πού απέχει από το κέντρο $R/2$. Να βρεθεί τι κίνηση θα κάνει ό δίσκος αν ή σφαίρα σταματήσει στο σημείο Σ. Δίνεται $I = mR^2/2$.

(14 μονάδες)

Λύση:

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\mu\vec{v} = \vec{v}_k(m+\mu) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_k = \frac{\mu}{m+\mu}\vec{v} \tag{3}$$

Άρα το κέντρο μάζας μετά την κρούση αποκτά μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}_k$ της ίδιας διεύθυνσης με τη $\vec{v}$. Η θέση του κέντρου μάζας K βρίσκεται πάνω στην ακτίνα $O\Sigma$ και ισχύει:

$$x = \frac{mR}{m+\mu} \quad \text{και} \quad R - x = \frac{\mu R}{m+\mu} \tag{4}$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε:

$$\frac{x}{2}\mu v = I_k \omega \tag{5}$$

όπου I_k είναι η ροπή αδρανείας του συστήματος δίσκος - σφαίρα σχετικά με κατακόρυφο άξονα που περνά από το K. Άρα:

$$I_k = I_0 + m(R-x)^2 + \mu x^2 \tag{6}$$

όπου I_0 είναι η ροπή αδρανείας του δίσκου σχετικά με άξονα που περνά από το κέντρο του.

$$(6) \Rightarrow \quad I_k = \frac{1}{2}mR^2 + m(R-x)^2 + \mu x^2 = \frac{3}{2}mR^2 + (m+\mu)x^2 - 2mRx \tag{7}$$

χρησιμοποιώντας το x από την (4) έχουμε:

$$I_k = \frac{3}{2}mR^2 + (m+\mu)\frac{m^2R^2}{(m+\mu)^2} - 2mR\frac{mR}{m+\mu} = \frac{3m\mu R^2 + m^2R^2}{2(m+\mu)} \tag{8}$$

και η (5) γίνεται:

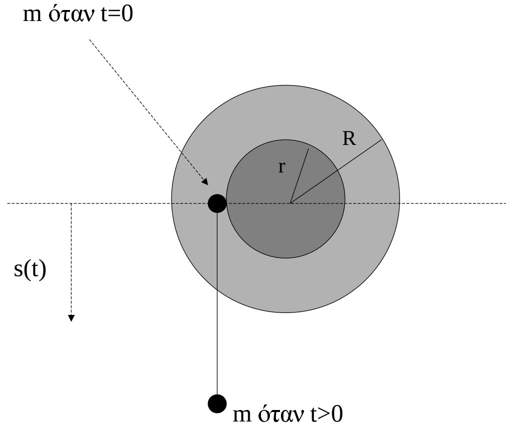
$$\frac{mR}{2(m+\mu)}\mu v = \frac{3m\mu R^2 + m^2R^2}{2(m+\mu)}\omega$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{v\mu}{R(m+3\mu)} \tag{9}$$

Άρα βλέπουμε ότι εκτός από τη μεταφορική κίνηση ο δίσκος εκτελεί και περιστροφική κίνηση.

9

Ένας τροχός αποτελείται από δυο ομόκεντρους δίσκους με ακτίνες $R = 0,5\,m$ και $r = 0,3\,m$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο μικρότερος δίσκος έχει μάζα $m_r = 0,2\,Kg$ και ο μεγαλύτερος $m_R = 10\,kg$. Γύρω από το μικρότερο δίσκο είναι τυλιγμένο σχοινί μήκους $L = 10\,m$ αμελητέου βάρους και στη μια άκρη του είναι συνδεδεμένη μια μάζα $m = 0,1\,kg$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα m αφήνεται ελεύθερη και πέφτει ξετιλύγωντας το σχοινί.
(α) Ποια είναι η τάση που αναπτύσσεται στο σχοινί ενώ ξετυλίγεται.
(β) Υπολογίστε την γωνιακή επιτάχυνση $\alpha(t)$, την γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$ των δίσκων και τη θέση $s(t)$ της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου t.
(γ) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί όλο το σχοινί.
(12 μονάδες)



Λύση:

(α)

Το σώμα κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του, mg, ενώ στο σχοινί αναπτύσσεται μία τάση T προς τα πάνω. Το σύστημα των δύο τροχών έχει ροπή αδρανείας I

$$I = \frac{1}{2}m_r r^2 + \frac{1}{2}m_R R^2 = 1,259\, kgm^2. \tag{10}$$

Η ροπή του συστήματος είναι:

$$Tr = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha(t). \tag{11}$$

Η ταχύτητα μετατόπισης και η επιτάχυνση της μάζας m είναι

$$\frac{ds}{dt} = \omega r \qquad\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \alpha(t)r, \tag{12}$$

αντίστοιχα. Επίσης από το δεύτερο νόμο του $Newton$ έχουμε:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - T \tag{13}$$

Από τις σχέσεις (11,12,13) έχουμε:

$$mg - T = \frac{T}{I}mr^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{mg}{1+\frac{mr^2}{I}} = 0,992\, N.$$

(β)

Αντικαθιστώντας στην (11) έχουμε:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Tr}{I} = 0,236\, s^{-2},$$

ολοκληρώνοντας

$$\Rightarrow \quad \omega(t) = 0,236t\, s^{-1}. \tag{14}$$

Από την (12) έχουμε:

$$\frac{ds}{dt} = (0,236t)0,3 = 0,0708\, t,$$

και ολοκληρώνοντας

$$s(t) = \frac{0,0708}{2}t^2 = 0,0354t^2. \tag{15}$$

(γ)

Από την (15) για το συνολικό μήκος του σχοινιού βρίσκουμε το συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί για να ξετυλιχτεί

$$t_{tot} = \sqrt{\frac{10}{0,0354}} = 16,807\,s,$$

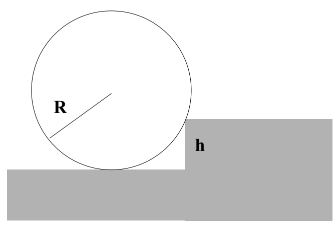
και αντικαθιστώντας στη σχέση (14) βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega(t_{tot}) = 3,966\,s^{-1}.$$

10

Μια συμπαγής μπάλα ακτίνας R κυλά με ταχύτητα v σε μια επίπεδη επιφάνεια και συγκρούεται μη ελαστικά με ένα σκαλοπάτι ύψους $h < R$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε, ως συνάρτηση των R και h, την ελάχιστη ταχύτητα ώστε η μπάλα να ανέβει το σκαλοπάτι. Θεωρείστε ότι κατά τη σύγκρουση η μπάλα δεν γλιστρά. Η ροπή αδρανείας της μπάλας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της είναι $I = 2/5MR^2$.

(12 μονάδες)



<u>Λύση:</u>

Έστω ότι ακριβώς πριν από τη σύγκρουση η γωνιακή ταχύτητα της μπάλας ως προς το κέντρο της μάζας της είναι ω και η στροφορμή της ως προς το σημείο πρόσκρουσης είναι L. Ας θεωρήσουμε ότι τα αντίστοιχα μεγέθη αμέσως μετά την σύγκρουση με το σκαλοπάτι είναι ω' και L'. Τότε έχουμε

$$L = mv(R-h) + \frac{2}{5}mR^2\omega,$$

Επειδή όμως η μπάλα κυλά χωρίς να ολισθαίνει έχουμε $v = \omega R$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$L = \frac{7}{5}mR^2 v - mvh.$$

Κατά την σύγκρουση θεωρούμε ότι το κέντρο μάζας της σφαίρας είναι στιγμιαία ακίνητο. Άρα

$$L' = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\omega' = \frac{7}{5}mR^2\omega'.$$

Λόγω διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$\frac{7}{5}mR^2\omega' = \frac{7}{5}mR^2 v - mvh$$

$$\Rightarrow \quad \omega' = \left(1 - \frac{5h}{7R^2}\right) v. \tag{16}$$

Για να μπορέσει η μπάλα να ανέβει το σκαλοπάτι πρέπει να να έχει αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να την μετατρέψει στην δυναμική ενέργεια που θα έχει πάνω στο σκαλοπάτι. Άρα:

$$\frac{1}{2} I' \omega'^2 = mgh, \tag{17}$$

όπου I' είναι η ροπή αδρανείας της μπάλας ως προς ένα οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο κρούσης,

$$I' = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2. \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας τις (16) και (18) στην (17) έχουμε:

$$\frac{7}{10} mR^2 \left(1 - \frac{5h}{7R^2}\right)^2 v^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{R\sqrt{70gh}}{7R^2 - 5h}.$$
