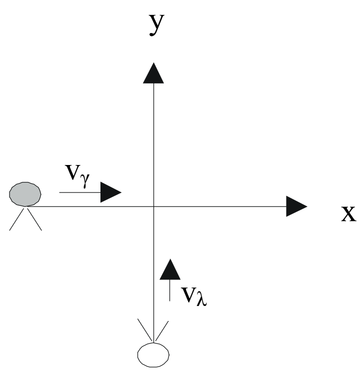
$4^η$ Εργασία
(Ημερομηνία Παράδοσης: 10-5-2004)

Άσκηση 1 (Μονάδες 10)

Α) Αστροναύτης μάζας 60 *Kg* βρίσκεται μέσα σε διαστημόπλοιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τον Άρη. Σε κάποιο σημείο του ταξιδιού βρίσκεται αιωρούμενος στο μέσο του διαστημόπλοιου με μηδενική ταχύτητα (ως προς το διαστημόπλοιο) και ανήμπορος να πλησιάσει προς τα τοιχώματα του σκάφους. Έτσι επινοεί να ρίξει προς το πίσω μέρος του διαστημόπλοιου μολύβι μάζας 0.0055 *Kg* με ταχύτητα 5 *m/s* (ως προς το διαστημόπλοιο). Με τι ταχύτητα θα κινηθεί ο αστροναύτης; **(Μονάδες 5)**

Β)

Δύο παίκτες του χόκεϋ επί πάγου στη προσπάθειά τους να πλησιάσουν προς το μπαλάκι συγκρούονται μεταξύ τους και κατόπιν κινούνται μαζί. Ο παίκτης της γκρι ομάδας έχει μάζα 75 *Kg* και έτρεχε με ταχύτητα 11 *m/s* ενώ ο παίκτης της λευκής ομάδας έχει μάζα 68 *Kg* και έτρεχε με ταχύτητα 8.5 *m/s*, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόσο γρήγορα και σε ποιά διεύθυνση κινούνται οι παίκτες αμέσως μετά τη σύγκρουση; **(Μονάδες 5)**



Λύση

Α) Θεωρούμε το σύστημα αστροναύτης-μολύβι. Επειδή το σύστημα ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα ως προς τα άστρα, η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα αστροναύτης-μολύβι. Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς σε ηρεμία ως προς το διαστημόπλοιο και επιλέγουμε τον *x*-άξονα κατά τη διεύθυνση της κίνησης του μολυβιού. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$m_α v_α + m_μ v_μ = m_α v'_α + m_μ v'_μ$$

όπου $m_α$, $v_α$ είναι η μάζα και η ταχύτητα του αστροναύτη πριν τη ρίψη του μολυβιού, $m_μ$, $v_μ$ είναι η μάζα και η ταχύτητα του μολυβιού πριν τη ρίψη του και $v'_α$, $v'_μ$ είναι η ταχύτητα του αστροναύτη και του μολυβιού αντίστοιχα, μετά τη ρίψη του μολυβιού. Όμως

$$0+0=m_\alpha v'_\alpha + m_\mu v'_\mu$$

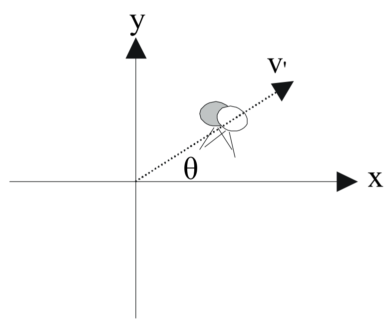
όπου $v_\alpha = v_\mu = 0$, διότι ο αστροναύτης και το μολύβι ήταν αρχικά σε ηρεμία ως προς το διαστημόπλοιο.
Λύνοντας ως προς την ταχύτητα του αστροναύτη μετά τη ρίψη του μολυβιού βρίσκουμε:

$$v'_\alpha = -4.58\cdot 10^{-4}\ m/s$$

Επομένως, η ρίψη του μολυβιού βοηθάει τον αστροναύτη να κινηθεί κατά την αντίθετη κατεύθυνση και τελικά θα έρθει σε επαφή με τα τοιχώματα του σκάφους.

B)

Λύση



Οι ορμές των παικτών πριν τη κρούση είναι:

$$\vec{P}_\gamma = m_\gamma \vec{v}_\gamma = (75\ Kg)(11\ m/s)\ \vec{i}\ =\ 825\ Kg\cdot m/s\ \vec{i}$$

$$\vec{P}_\lambda = m_\lambda \vec{v}_\lambda = (68\ Kg)(8.5\ m/s)\ \vec{j} = 578\ Kg\cdot m/s\ \vec{j}$$

Από το θεώρημα διατήρησης της ορμής, η τελική ορμή, $\vec{P}'$ ισούται με την αρχική:

$$\vec{P}' = \vec{P}_\gamma + \vec{P}_\lambda = (825\vec{i} + 578\vec{j})\ Kg\cdot m/s$$

Το μέτρο της τελικής ορμής είναι:

$$P' = \sqrt{P'^2_x + P'^2_y} = \sqrt{(825\ Kg\cdot m/s)^2 + (578\ Kg\cdot m/s)^2} = 1007.3\ Kg\cdot m/s$$

Η ταχύτητα του ζευγαριού μετά την κρούση είναι:

$$v' = \frac{P'}{m_\gamma + m_\lambda} = 7.04\ m/s$$

Η διεύθυνση του ζευγαριού μετά την κρούση σχηματίζει γωνία

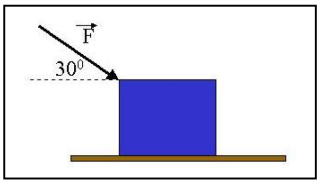
$$\theta = \arctan\left(\frac{P'_y}{P'_x}\right) = 35^{0}$$

με την αρχική διεύθυνση του παίκτη της γκρι ομάδας.

Άσκηση 2 (Μονάδες 10)

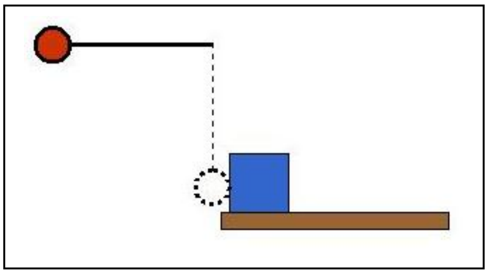
Α) Ένα σώμα με μάζα m=80 *Kg* κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε δάπεδο με την επίδραση δύναμης *F* που ενεργεί σχηματίζοντας γωνία 30^0, όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής είναι μ=0.25. Πόσο έργο καταναλώνεται κατά τη μετακίνηση του σώματος κατά 20 m ; Δίνεται g=9.8 m/s^2

(Μονάδες 5)



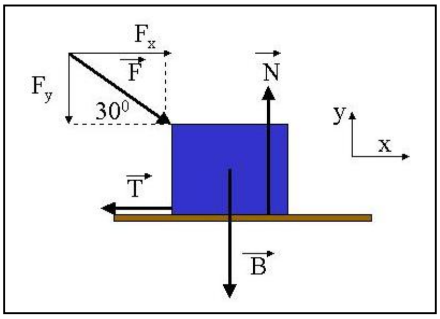
Β) Χαλύβδινη σφαίρα μάζας 0.5 *Kg* στερεώνεται σε ένα νήμα μήκους 70 *cm* και αφήνεται ελεύθερη, όταν το νήμα είναι οριζόντιο. Στο κατώτατο σημείο της τροχιάς της, η σφαίρα χτυπά ένα χαλύβδινο κύβο μάζας 2.5 *Kg* ο οποίος αρχικά ηρεμεί πάνω σε λεία επιφάνεια (βλ. σχήμα). Η κρούση είναι ελαστική. Βρείτε τη ταχύτητα της σφαίρας και την ταχύτητα του κύβου, ακριβώς μετά την κρούση. Δίδεται g=9.8 m/s^2

(Μονάδες 5)



Λύση:

Α) Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα άρα:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F\cos 30^0 - T = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - F\sin 30^0 - B = 0 \, (2)$$

Επιπλέον ισχύει:

$T = \mu N$ (3)

Από τις (1), (2) και (3) έπεται:

$$F = \frac{\mu B}{\cos 30^0 - \mu \sin 30^0} = \frac{\mu m g}{\cos 30^0 - \mu \sin 30^0} = 264.5 N$$

Το έργο για τη μετακίνηση του σώματος κατά 20 m είναι:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\cos 30^0 \cdot s = 4581.1\,J$$

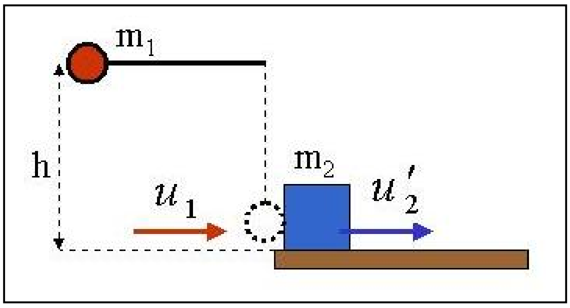
και καταναλώνεται για την υπερνίκηση της τριβής.

Β) Από τη διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε ότι η ταχύτητα της σφαίρας πριν από την κρούση είναι:

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = m_1gh \Rightarrow u_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

όπου m_1 είναι η μάζα της σφαίρας και h το μήκος του νήματος.
Η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση (u_1') και η ταχύτητα του κύβου (u_2') προσδιορίζονται από την αρχή διατήρησης της ορμής και της ενέργειας του συστήματος σφαίρα-κύβος :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 \\ &m_1u_1 = m_1u_1' + m_2u_2' \end{aligned} \quad (2)$$



Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε:

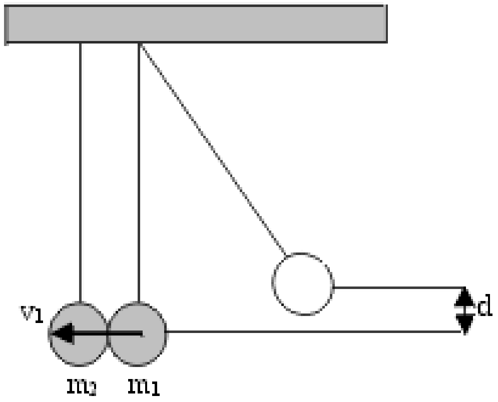
$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 \\ u_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Το τελευταίο σύστημα με χρήση της (1) και με αριθμητική αντικατάσταση δίνει:

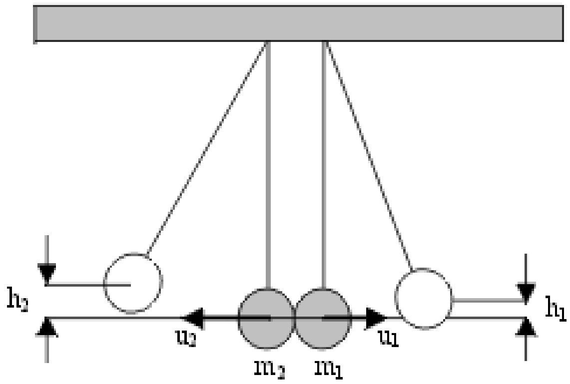
$$u_1' = -2.5\,{}^m/_s$$
$$u_2' = 1.2\,{}^m/_s$$

Άσκηση 3 (Μονάδες 8)

Οι μάζες των δύο σφαιρών του σχήματος είναι m_1 και m_2. Η m_1 ανυψώνεται κατά d και αφήνεται ελεύθερη. Αρχικά η μάζα m_2 είναι ακίνητη, ενώ η ταχύτητα της m_1 όταν συγκρούεται με τη m_2 είναι v_1. Ζητούνται τα ύψη των δύο σφαιρών ύστερα από την κρούση, όταν η κρούση είναι α) ελαστική και β) πλαστική.



Λύση



Θεωρούμε σα στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας του βαρυτικού πεδίου το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τα κέντρα μάζας των σωμάτων όταν αυτά βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους. Με αυτές τις προϋποθέσεις, όταν η μάζα m_1 συγκρούεται με τη m_2 έχει ταχύτητα v_1 που προσδιορίζεται από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd}$$

Επειδή πριν και μετά την κεντρική και μετωπική κρούση των σωμάτων οι ταχύτητες έχουν την οριζόντια διεύθυνση, στην εξίσωση διατήρησης της ορμής μπορούμε αντί των διανυσμάτων να χρησιμοποιήσουμε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων.

α) Όταν η κρούση είναι ελαστική (βλ. σχήμα) εφαρμόζουμε τις αρχές διατήρησης της ορμής και κινητικής ενέργειας:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Με επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων προκύπτουν οι ταχύτητες μετά την κρούση:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{και} \qquad u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

όπου για $m_1 < m_2$ η ταχύτητα u_1 έχει τη φορά του σχήματος.
Το ύψος στο οποίο ανέρχονται τα δύο σώματα υπολογίζεται για το καθένα ξεχωριστά από την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Θα πρέπει δηλαδή όλη η κινητική τους ενέργεια να μετατραπεί σε δυναμική. Έτσι προκύπτει:

$$m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 \Rightarrow h_1 = \frac{u_1^2}{2g} \qquad \text{και} \qquad m_2gh_2 = \frac{1}{2}m_2u_2^2 \Rightarrow h_2 = \frac{u_2^2}{2g}$$

β) Όταν η κρούση είναι πλαστική, τα δύο σώματα μετά την κρούση ενώνονται και αποκτούν ταχύτητα, u, που υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την κρούση. Έτσι προκύπτει:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow u = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

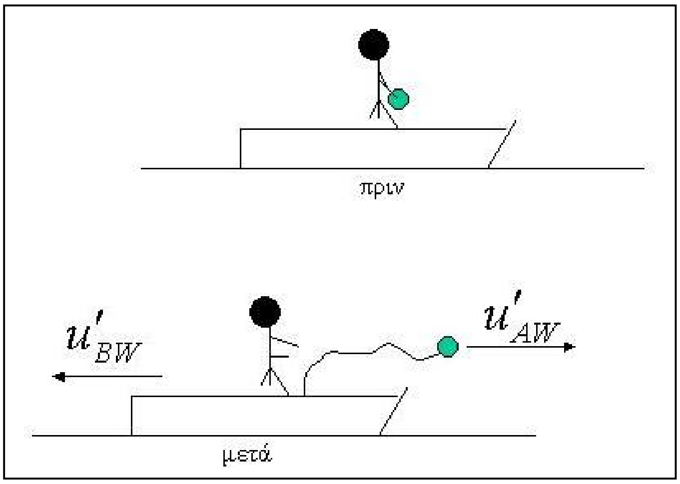
Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι δύο σφαίρες ανέρχονται σε ύψος $h = \dfrac{u^2}{2g}$

Άσκηση 4 (Μονάδες 10)

Ένας βαρκάρης, μάζας 75 *Kg*, στέκεται ακίνητος πάνω σε μια βάρκα μάζας 50 *Kg* (η οποία αρχικά είναι ακίνητη πάνω στο νερό) και ρίχνει οριζόντια την άγκυρα, μάζας 10 *Kg*. Δίδεται ότι εάν ο βαρκάρης πέταγε οριζόντια την άγκυρα βρισκόμενος στη στεριά και καταβάλλοντας την ίδια προσπάθεια η ταχύτητα της άγκυρας ως προς τον βαρκάρη θα ήταν 2 *m/s*. Να βρεθεί α) η ταχύτητα, ως προς την επιφάνεια του νερού, με την οποία θα ανακρουστεί το σύστημα βάρκα-βαρκάρης και β) η ταχύτητα της άγκυρας ως προς την επιφάνεια του νερού. Θεωρείστε ότι η αντίσταση του νερού είναι αμελητέα.

Λύση
α) Θεωρούμε τη βάρκα και τον βαρκάρη σαν ένα σώμα μάζας $m_B = 125Kg$
Έστω u_{BW} η ταχύτητα της βάρκας και του βαρκάρη ως προς το νερό και u_{AW} η ταχύτητα της άγκυρας ως προς το νερό.
Επειδή στο σύστημα βάρκα-βαρκάρη και άγκυρας δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις η ορμή του συστήματος διατηρείται. Κατά τη διεύθυνση της κίνησης ισχύει:

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_B u_{BW} + m_A u_{AW} = m_B u'_{BW} + m_A u'_{AW} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 + 0 = m_B u'_{BW} + m_A u'_{AW} \qquad (1)$$



Η ταχύτητα της άγκυρας ως προς το νερό (u'_{AW}) ισούται με τη ταχύτητά της ως προς τον βαρκάρη (u'_{AB}) συν την ταχύτητα του βαρκάρη ως προς το νερό (u'_{BW}):
$u'_{AW} = u'_{AB} + u'_{BW}$ (2).

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$0 = m_B u'_{BW} + m_A \left(u'_{AB} + u'_{BW}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u'_{BW} = -\frac{m_A}{m_A + m_B} u'_{AB} = -\frac{10Kg}{125Kg + 10Kg} 2 \, {}^{m}\!/\!{}_{s} = -0.148 \, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

β) από τη σχέση (2) η ταχύτητα της άγκυρας ως προς την επιφάνεια του νερού είναι :

$$u'_{AW} = u'_{AB} + u'_{BW} = 2 \, {}^{m}\!/\!{}_{s} + \left(-0.148 \, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right) = 1.85 \, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Άσκηση 5 (Μονάδες 9)

Δύο σωματίδια Α, Β έχουν μάζες m_1=m, m_2=3m (αντίστοιχα) και ταχύτητες $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v}_2 = -6\vec{i}$ (αντίστοιχα) ως προς ακίνητο παρατηρητή, κάποια χρονική στιγμή t_1. Μία άλλη χρονική στιγμή t_2 η μάζα m_1 έχει ταχύτητα $\vec{u}'_1 = 6\vec{j}$ ως προς τον παρατηρητή που κινείται μαζί με το κέντρο μάζας. Ζητείται η ταχύτητα της μάζας m_2 ως προς τον ακίνητο παρατηρητή τη χρονική στιγμή t_2. Στο σύστημα των σωματιδίων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.

Λύση

Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(2\vec{i} + 3\vec{j}) + 3m(-6\vec{i})}{m + 3m} = -4\vec{i} + 0.75\vec{j}$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, η ταχύτητα του κέντρου μάζας διατηρείται (σταθερή). Έτσι τη χρονική στιγμή t_2, η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι πάλι:

$$\vec{v}_{CM} = -4\vec{i} + 0.75\vec{j} \tag{1}$$

Αν $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ οι ταχύτητες των m_1, m_2 τη χρονική στιγμή t_2 ως προς τον ακίνητο παρατηρητή, τότε είναι:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m\vec{u}_1 + 3m\vec{u}_2}{m + 3m} \Rightarrow -4\vec{i} + 0.75\vec{j} = 0.25\vec{u}_1 + 0.75\vec{u}_2 \tag{2}$$

Όμως τη χρονική στιγμή t_2 η ταχύτητα της m_1 ως προς ακίνητο παρατηρητή είναι:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_1' = -4\vec{i} + 0.75\vec{j} + 6\vec{j} = -4\vec{i} + 6.75\vec{j}$$

όπου $\vec{u}_1'$ η ταχύτητα της m_1 ως προς τον παρατηρητή του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή t_2. Με αντικατάσταση του $\vec{u}_1$ στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$-4\vec{i} + 0.75\vec{j} = 0.25(-4\vec{i} + 6.75\vec{j}) + 0.75\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_2 = -4\vec{i} - 1.25\vec{j}$$

Άσκηση 6 (Μονάδες 10)

Ένα άδειο όχημα που αρχικά έχει μάζα M_0 και αρχική ταχύτητα u_0 κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει στο όχημα άμμος με σταθερό ρυθμό λ $^{Kg}\!/\!_{s}$. Βρείτε τη θέση του οχήματος σα συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

Έστω ότι κάποια τυχαία χρονική στιγμή η μάζα της άμμου που βρίσκεται στο όχημα είναι m. Επειδή στο σύστημα δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις ισχύει:

<u>α΄ τρόπος</u>

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\left(M_0 + m\right)\cdot\vec{u}\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\left(M_0 + m\right)\cdot d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}\cdot dm}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{d\vec{u}}{\vec{u}} = \frac{dm}{M_0 + m} \Rightarrow -\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u} = \int_0^m \frac{dm}{M_0 + m} \Rightarrow u = \frac{M_0}{M_0 + m}u_0 \tag{1}$$

<u>β΄τρόπος</u>

Αρχή διατήρησης της ορμής

$M_0 u_0 = (M_0 + m)\, u \Leftrightarrow u = \frac{M_0}{M_0 + m}u_0$

Γνωρίζουμε ότι: $u = \frac{dx}{dt}$ και από τις συνθήκες του προβλήματος έχουμε: $\frac{dm}{dt} = \lambda \Rightarrow m = \lambda t$

Άρα η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M_0}{M_0 + \lambda t} u_0 \Rightarrow dx = M_0 u_0 \frac{dt}{M_0 + \lambda \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = M_0 u_0 \int_0^t \frac{dt}{M_0 + \lambda \cdot t} \Rightarrow x(t) = \frac{M_0 u_0}{\lambda} \cdot \ln \frac{M_0 + \lambda \cdot t}{M_0}$$

Άσκηση 7 (Μονάδες 13)

Ένας άνθρωπος μάζας *m* βρίσκεται ακίνητος στο άκρο Α μιας βάρκας που έχει μάζα *M*. Αρχικά η βάρκα είναι ακίνητη. Ο άνθρωπος μετακινείται στο άλλο άκρο Β του σκάφους. Ζητείται η μετατόπιση του σκάφους. Η αντίσταση του νερού είναι αμελητέα. Δίνεται το μήκος l του σκάφους.

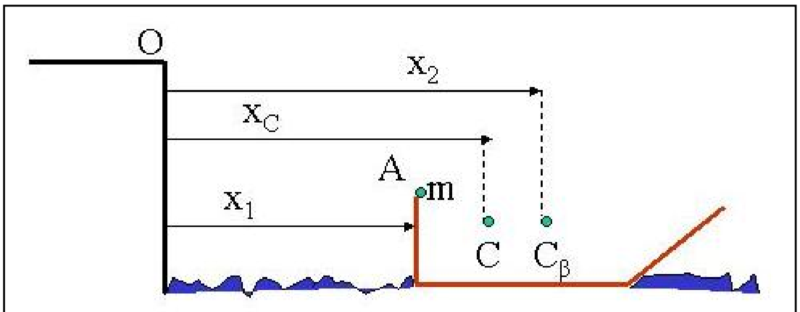
Λύση

Στο σύστημα άνθρωπος-σκάφος δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (η αντίσταση του νερού θεωρείται αμελητέα ενώ το βάρος και η άνωση έχουν μηδενική συνισταμένη). Έτσι η ταχύτητα του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή και ίση με μηδέν. Άρα η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος δεν αλλάζει.

Θεωρούμε αρχή αξόνων ένα σταθερό σημείο Ο στην προκυμαία. Όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στο άκρο Α της βάρκας, η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος ανθρώπου-βάρκας(x_C) είναι:

$$x_C = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M} \quad (1),$$

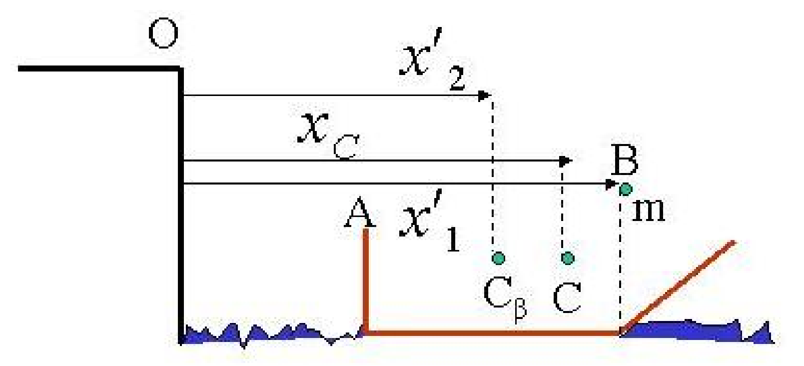
όπου x_1 είναι η θέση του ανθρώπου και x_2 η θέση του κέντρου μάζας της βάρκας (βλ. σχήμα 1)



Σχήμα 1

Όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στο άκρο Β της βάρκας, η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος είναι:

$x_C{}' = x_C = \dfrac{mx_1' + Mx_2'}{m+M}$ (2), όπου x'_1 είναι η νέα θέση του ανθρώπου και x'_2 η νέα θέση του κέντρου μάζας της βάρκας (βλ. σχήμα 2)



Σχήμα 2

Ο άνθρωπος διένυσε το μήκος της βάρκας $(AB) = l = (AC_\beta) + (C_\beta B)$ (3)

Αλλά $(AC_\beta) = x_2 - x_1$ (από το σχήμα 1) (4)
και $(C_\beta B) = x_1' - x_2'$ (από το σχήμα 2) (5)

Από τις παραπάνω σχέσεις, η σχέση (3) γράφεται: $l = x_2 - x_1 + x_1' - x_2'$ (6)

Η βάρκα μετακινήθηκε κατά $x_2' - x_2$. Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει $mx_1 + Mx_2 = mx_1' + Mx_2' \Rightarrow x_2' - x_2 = \dfrac{m}{M}(x_1 - x_1')$ (7)

Όμως από τη σχέση (6) έχουμε: $x_1 - x_1' = x_2 - x_2' - l$, οπότε η (7) δίνει:

$$x_2' - x_2 = \frac{m}{M}(x_2 - x_2' - l) \Rightarrow x_2' - x_2 = -\frac{m}{M+m}\cdot l$$

Το πρόσημο (-) σημαίνει ότι η μετακίνηση της βάρκας έγινε προς τ` αριστερά.

Άσκηση 8 (Μονάδες 12)

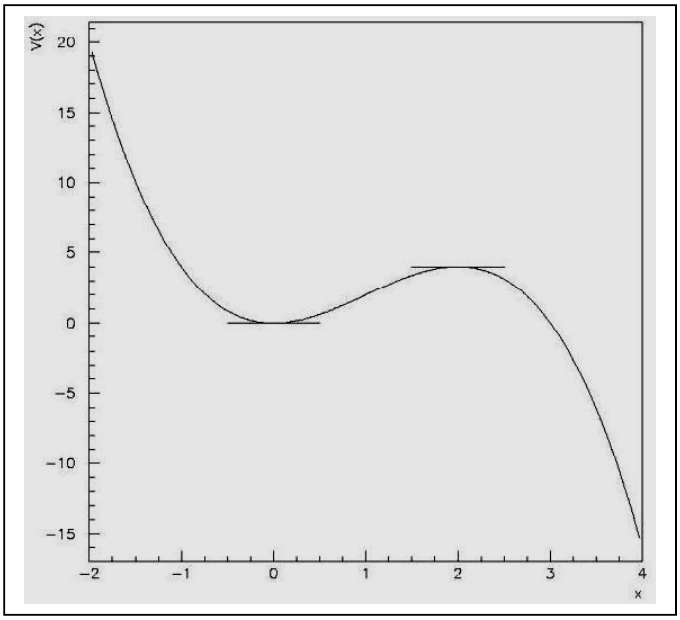
Α) Ένα σωματίδιο δέχεται μια διατηρητική δύναμη που συνδέεται με τη δυναμική του ενέργεια, η οποία ακολουθεί τη σχέση: $V(x) = 3x^2 - x^3$ (x σε m).
i) Δώστε το διάγραμμα της $V(x)$.

ii) Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο. Ποιά είναι η φορά της σε κατάλληλα διαστήματα της μεταβλητής x ;
iii) Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας σε κάθε θέση. **(Μονάδες 6)**

Β) Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της διατηρητικής δύναμης: $F(x) = -kx + \frac{k}{a}x^2$, όπου k και a είναι θετικές σταθερές.
i) Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και να καθοριστούν οι θέσεις ισορροπίας του υλικού σημείου.
ii) Αν το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση $x = -a$ χωρίς αρχική ταχύτητα, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία περνά από τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη. **(Μονάδες 6)**

Λύση:

Α) i) Το διάγραμμα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας δίδεται στο σχήμα:



ii) Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο δίδεται από τη σχέση:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -6x + 3x^2 \Rightarrow \vec{F} = \left(-6x + 3x^2\right)\hat{x}$$

Άρα η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο έχει φορά αντίθετη από τη φορά του άξονα x στο διάστημα $0 \prec x \prec 2$, ενώ έχει τη φορά του άξονα x για οποιαδήποτε άλλη τιμή της μεταβλητής x .
iii) Οι πιθανές θέσεις ισορροπίας είναι εκείνες όπου $F(x) = -\frac{dV}{dx} = -6x + 3x^2 = 0$.
Άρα υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις, για $x = 0$ και για $x = 2$.

Η πρώτη είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας ενώ η δεύτερη ασταθούς ισορροπίας. Πράγματι: $\frac{d^2V}{dx^2} = 6-6x$ και για $x=0$ $\frac{d^2V}{dx^2} \succ 0$ άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο, ενώ για $x=2$ $\frac{d^2V}{dx^2} \prec 0$ άρα η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο.

Β)

i) Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V(x) = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x \left(-kx + \frac{k}{a}x^2\right)dx \Rightarrow V(x) = k\frac{x^2}{2} - \frac{k}{3a}x^3$$

Οι θέσεις ισορροπίας αντιστοιχούν στα τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας. Άρα:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow kx - \frac{k}{a}x^2 = 0 \Rightarrow kx\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$$

Άρα οι θέσεις ισορροπίας είναι τα σημεία $x=0$ και $x=a$.

ii) Η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη στη θέση $x=a$. Πράγματι:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k - \frac{2k}{a}x. \quad \text{Και για } x=a \ : \ \frac{d^2V}{dx^2} = k - \frac{2k}{a}a = -k \prec 0$$

Η ζητούμενη ταχύτητα υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων $x=-a$ και $x=a$:

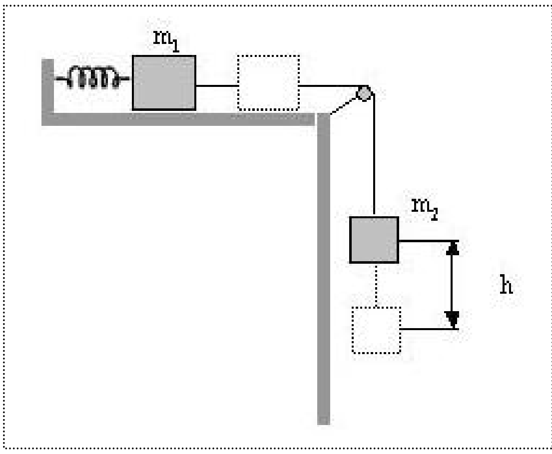
$$V(-a)+K(-a) = V(a)+K(a) \Rightarrow \frac{k}{2}a^2 + \frac{k}{3a}a^3 + 0 = \frac{k}{2}a^2 - \frac{k}{3a}a^3 + \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \frac{2k}{3}a^2 \Rightarrow u = 2a\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

Άσκηση 9 (Μονάδες 8)

Δύο σώματα συνδέονται με ένα ελαφρύ νήμα που περνάει γύρω από μία τροχαλία χωρίς τριβές, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα με μάζα m_1 κείται πάνω σε τραχιά επιφάνεια και είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο ενώ ήταν ακίνητο και το ελατήριο δεν είχε εκταθεί. Υπολογίστε τον συντελεστή τριβής ολισθήσεως ανάμεσα στο σώμα m_1 και την επιφάνεια, όταν το σώμα m_2 κατεβεί αφού διανύσει απόσταση h προτού σταματήσει.

Δίνονται m_1=0.5 Kg, m_2=0.3 Kg, k=50 N/m, h=5 cm, g=9.8 m/s^2



Λύση

Καθώς το σύστημα κινείται από το μεγαλύτερο ύψος του m_2 στο μικρότερο, το σύστημα χάνει βαρυτική δυναμική ενέργεια αλλά κερδίζει δυναμική ελαστική ενέργεια, που αποθηκεύεται στο ελατήριο. Υπάρχουν όμως απώλειες μηχανικής ενέργειας λόγω της τριβής ανάμεσα στο m_1 και την επιφάνεια. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s \qquad (1)$$

όπου W_{nc} είναι το έργο που παράγουν οι μη διατηρητικές δυνάμεις, δηλ. η τριβή:

$$W_{nc} = -fh = -\mu m_1 gh \qquad (2)$$

ΔK είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος, η οποία είναι μηδέν διότι η αρχική και η τελική ταχύτητα του συστήματος είναι μηδέν,
ΔU_g είναι η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας που προέρχεται μόνο από το σώμα m_2, επειδή η κατακόρυφη συνιστώσα του m_1 δεν μεταβάλλεται. Επομένως

$$\Delta U_g = -m_2 gh \qquad (3)$$

ΔU_s είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου:

$$\Delta U_s = \frac{1}{2}kh^2 \qquad (4)$$

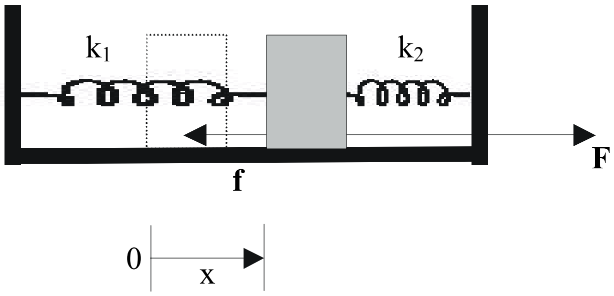
Θέτοντας τις (2), (3), (4) στην (1) βρίσκουμε:

$$-\mu m_1 gh = -m_2 gh + \frac{1}{2}kh^2 \Rightarrow \mu = \frac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$$

και με αριθμητική αντικατάσταση βρίσκουμε μ=0.345.

Άσκηση 10 (Μονάδες 10)

Σώμα μάζας m=1 Kg ισορροπεί πάνω σε τραπέζι όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής είναι μ=0.2 και οι σταθερές των ελατηρίων k_1=40 N/m και k_2=10 N/m. Μία οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει ισοταχώς το σώμα κατά x=50 cm από την αρχική θέση ισορροπίας. α) Υπολογίστε το έργο της δύναμης. β) Αν στη συνέχεια αφήσουμε ελεύθερο το σώμα, ποια είναι η ταχύτητά του όταν περνά από τη θέση ισορροπίας όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος; Δίδεται g=9.8 m/s^2



Λύση

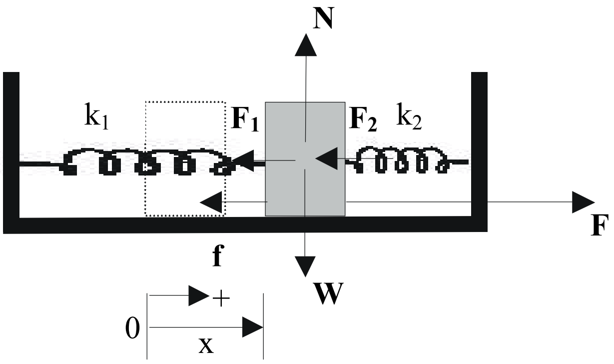
α) Υποθέτουμε ότι η μετατόπιση του σώματος γίνεται κατά τη φορά που δείχνεται στο σχήμα. Τότε κατά τη διάρκεια της μετατόπισης, επάνω στο σώμα στη διεύθυνση της κίνησης ενεργούν η δύναμη $\vec{F}$ που το μετατοπίζει, η τριβή $\vec{f}$ και οι δύο ελαστικές δυνάμεις (τάσεις) $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ που προέρχονται από την παραμόρφωση των ελατηρίων. Επειδή η μετατόπιση γίνεται ισοταχώς οι δυνάμεις ισορροπούν,

$$\vec{F}+\vec{f}+\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$$

Οι ελαστικές δυνάμεις $F_1=-k_1x$ και $F_2=-k_2x$

είναι διατηρητικές δυνάμεις, ενώ η τριβή $f=\mu N=\mu mg$ είναι μη διατηρητική.

Από τη σχέση ισορροπίας των δυνάμεων προκύπτει ότι η $\vec{F}$ ως αντίθετη του αθροίσματος διατηρητικών και μη διατηρητικών δυνάμεων, είναι και αυτή μη διατηρητική. Από αυτές τις δυνάμεις μόνο η τριβή έχει σταθερή τιμή κατά τη διάρκεια της μετατόπισης.



Για στοιχειώδη μετατόπιση dx το έργο όλων των δυνάμεων είναι μηδέν, δηλ. δεν παρατηρείται μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος. Αυτό συμφωνεί με την ισοταχή μετατόπισή του. Λαμβάνοντας υπόψη τη φορά των δυνάμεων ως προς τη φορά της μετατόπισης (ds=dx), έχουμε για το έργο την ακόλουθη έκφραση:

$$W(0 \to x) = \int_0^x F dx - \int_0^x f dx - \int_0^x F_1 dx - \int_0^x F_2 dx = 0$$

Συνεπώς το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = \int_0^x F dx = \int_0^x f dx + \int_0^x F_1 dx + \int_0^x F_2 dx = \mu m g x + \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ δαπανάται για την εξουδετέρωση της τριβής και για την παραμόρφωση των ελατηρίων, η οποία παραμόρφωση δίνει και τη δυναμική ενέργεια που έχει το σύστημα μετά τη μετατόπιση του σώματος. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκουμε:

$$W_F = 7.23\ J$$

β) Όταν στη συνέχεια αφήσουμε ελεύθερο το σύστημα, το σώμα ξεκινά από την ηρεμία και κινείται προς την αρχική του θέση. Η δύναμη $\vec{F}$ δεν υπάρχει, υπάρχουν όμως οι ελαστικές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και η τριβή $\vec{f}$. Η φορά της τριβής $\vec{f}$ τώρα έχει αλλάξει, είναι αντίθετη της προηγούμενης και φυσικά η φορά της είναι αντίθετη της μετατόπισης (ds=-dx). Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ διατηρούν τη φορά τους, που είναι η φορά της μετατόπισης, την οποία άλλωστε και προκαλούν. Συνεπώς έχουμε:

$$W(x \to 0) = \int_x^0 f dx + \int_x^0 -F_1 dx + -\int_x^0 F_2 dx = \frac{1}{2} m v^2$$

όπου v η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από τη θέση ισορροπίας. Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \mu m g x \Rightarrow v = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)x^2 - 2\mu m g x}{m}}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος μετατράπηκε αφ' ενός σε κινητική ενέργεια του σώματος και αφ' ετέρου δαπανήθηκε για την εξουδετέρωση του έργου της τριβής.
Με αντικατάσταση των δεδομένων προκύπτει ότι $v = 3.25\ m/s$