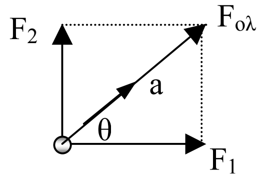
Λύσεις 4^{ης} εργασίας

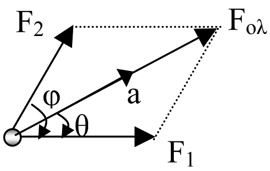
1. α) Η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 25\text{N}$ και η γωνία θ δίνεται από τη σχέση $\tan\theta = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \tan\theta = 0{,}75 \Rightarrow \theta \approx 36{,}9^o$

Άρα, η επιτάχυνση είναι ίση με: $a = \frac{F_{ολ}}{m} = 5\text{m}/\text{s}^2$



β) Η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi} = \sqrt{925}\text{N} \approx 30{,}4\text{N}$ και η γωνία θ δίνεται από τη σχέση $\sin\theta = \frac{\sin\varphi F_2}{F_{ολ}} \Rightarrow \sin\theta \approx 0{,}43 \Rightarrow \theta \approx 25{,}5^o$

Άρα, η επιτάχυνση είναι ίση με: $a = \frac{F_{ολ}}{m} \approx 6{,}1\text{m}/\text{s}^2$



2. Η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με $\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (3\vec{i} - 5\vec{j})\text{N} + (2\vec{i} + \vec{j})\text{N} = (5\vec{i} - 4\vec{j})\text{N}$

Η επιτάχυνση είναι ίση με $\vec{a} = (5\vec{i} - 4\vec{j})\text{N}/1{,}5\text{kg} = (3{,}33\vec{i} - 2{,}67\vec{j})\text{m}/\text{s}^2$ και έχει μέτρο ίσο με $a = \sqrt{3{,}33^2 + 2{,}67^2}\,\text{m}/\text{s}^2 \approx 4{,}27\text{m}/\text{s}^2$

Η μετατόπιση του σώματος στις τρεις διευθύνσεις δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}33t^2$$

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}\cdot 2{,}67t^2$$

$$z = 0$$

Άρα, οι συντεταγμένες της θέσης του την χρονική στιγμή t = 4s είναι:
(x,y,z) = (26,64, -21,36, 0)

3. Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ίση με:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = 0{,}9t^2\vec{i} + \left(0{,}3t^{-2/3} + 2t\right)\vec{j} \text{ σε m/s}$$

και η επιτάχυνση είναι ίση με:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 1{,}8t\vec{i} + \left(-0{,}2t^{-5/3} + 2\right)\vec{j} \text{ σε m/s}^2$$

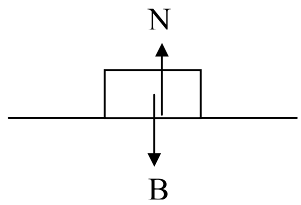
Το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t = 1s είναι ίσο με:

$\vec{R}(1) = 3{,}3\vec{i} - 4{,}1\vec{j}$ σε m

και το αντίστοιχο διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι ίσο με:

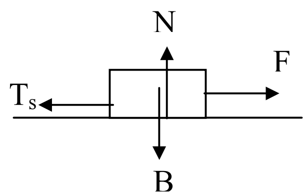
$\vec{V}(1) = 0{,}9\vec{i} + 2{,}3\vec{j}$ σε m/s

4. α) Στο κιβώτιο ασκούνται το βάρος του, B, και η αντίδραση του δαπέδου N, οι οποίες αλληλοεξουδετερώνονται. Καμιά άλλη δύναμη δεν ασκείται σ' αυτό, άρα και η τριβή, T, είναι ίση με μηδέν.



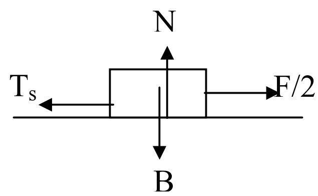
β) Το κιβώτιο αρχίζει να ολισθαίνει όταν η δύναμη F γίνει ίση με τη μέγιστη στατική τριβή. Δηλαδή:

$F = \mu_s N = \mu_s Mg$



γ) Η δύναμη F/2 είναι ανεπαρκής για να θέσει το σώμα σε κίνηση. Έτσι, η στατική τριβή θα είναι ίση και αντίθετη μ' αυτή τη δύναμη:

$T_s = F/2 = \mu_s N = \frac{1}{2}\mu_s Mg$



δ) Η επιτάχυνση του κιβωτίου προκύπτει από την σχέση:

$F - T_k = Ma \Rightarrow \mu_s Mg - \mu_k N = Ma \Rightarrow \mu_s Mg - \mu_k Mg = Ma \Rightarrow a = (\mu_s - \mu_k)g$

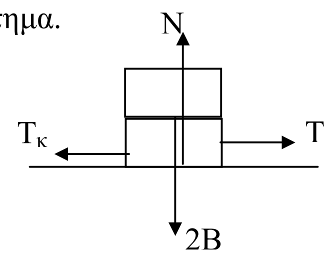
ε) Πριν το πάνω κιβώτιο αρχίσει να ολισθαίνει, κινείται μαζί με το κάτω λόγω της στατικής τριβής μεταξύ τους. Τα θεωρούμε ως ένα σύστημα.

Έτσι, θα έχουμε:

$N = 2B = 2Mg$

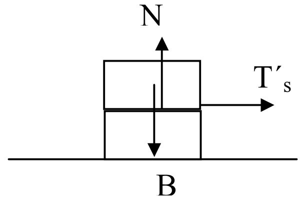
$T_k = \mu_k N = 2\mu_k Mg$

και $T - T_k = 2Ma \Rightarrow T - 2\mu_k Mg = 2Ma$ (1)



Τώρα, για να βρούμε πότε το πάνω κιβώτιο θα αρχίσει να ολισθαίνει ως προς το κάτω, θα το θεωρήσουμε ξεχωριστά. (Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο πάνω κιβώτιο)

Η επιτάχυνση του πάνω κιβωτίου οφείλεται στη δύναμη της στατικής τριβής T'_s.



Έτσι, $T_s' = Ma \overset{(1)}{\Rightarrow} T_s' = \dfrac{T - 2\mu_k Mg}{2}$ (2)

Επίσης, ισχύει: N = B = Mg (3)

Το πάνω κιβώτιο αρχίζει να ολισθαίνει ως προς το κάτω, όταν η στατική τριβή φτάσει στη μέγιστη τιμή της. Δηλαδή:

$$T_s' = \tau_s N \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} \frac{T - 2\mu_k Mg}{2} = \tau_s Mg \Rightarrow T = 2(\tau_s + \mu_k)Mg$$

Όταν το πάνω κιβώτιο αρχίσει να ολισθαίνει ως προς το κάτω, υπάρχει η τριβή ολίσθησης μεταξύ των δύο κιβωτίων, η οποία είναι μικρότερη της στατικής τριβής. Έτσι, το πάνω κιβώτιο θα επιταχύνεται με μικρότερη επιτάχυνση από το κάτω και θα ολισθαίνει με φορά αντίθετη από αυτήν της κίνησης του κάτω κιβωτίου.

5. α) Το νόμισμα αρχίζει να ολισθαίνει τη χρονική στιγμή t = 1s, που η επιτάχυνση του βαγονιού είναι ίση με:

$$a_B = \frac{dV}{dt} = (4m/s^3)\cdot(1s) = 4m/s^2$$

Στην οριζόντια διεύθυνση, η δύναμη που ασκείται στο νόμισμα μέχρι αυτή τη στιγμή είναι η στατική τριβή, T_s.

Άρα, $T_s = Ma = (4m/s^2)M$ (1)

Ισχύει όμως ότι: $T_s = \mu_s N = \mu_s B = \mu_s Mg$ (2)

(όπου M η μάζα του νομίσματος και N η αντίδραση του βάρους του νομίσματος που ασκείται από το πάτωμα στο νόμισμα).

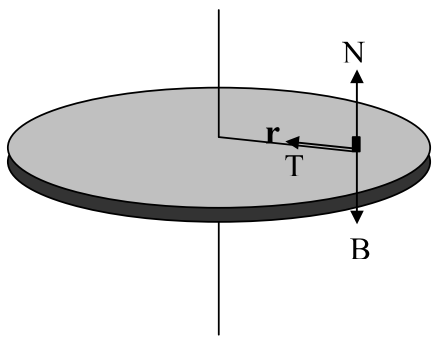
Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $\mu_s = (4m/s^2) / g = 0{,}4$

β) Μεταξύ των χρονικών στιγμών 1s και 3s, η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο νόμισμα είναι η τριβή ολίσθησης $T_k = \mu_k Mg$. Άρα, η επιτάχυνση του νομίσματος είναι ίση με $\mu_k g$. Επίσης, στις χρονικές στιγμές 1s και 3s, το νόμισμα δεν ολισθαίνει και έτσι έχει την ίδια ταχύτητα με αυτή του βαγονιού, η οποία είναι ίση με 2m/s την t = 1s και 8m/s την t = 3s. Άρα, η επιτάχυνση του νομίσματος μεταξύ αυτών των δύο χρονικών στιγμών είναι ίση με:

$$a_N = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{6m/s}{2s} = 3m/s^2$$

και επειδή όπως προαναφέραμε $a_N = \mu_k g$, παίρνουμε για το συντελεστή ολίσθησης ότι $\mu_k = (3m/s^2) / g = 0{,}3$

6. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Το βάρος, B, η αντίδραση από το δίσκο, N, και η τριβή μεταξύ σώματος και δίσκου, T.

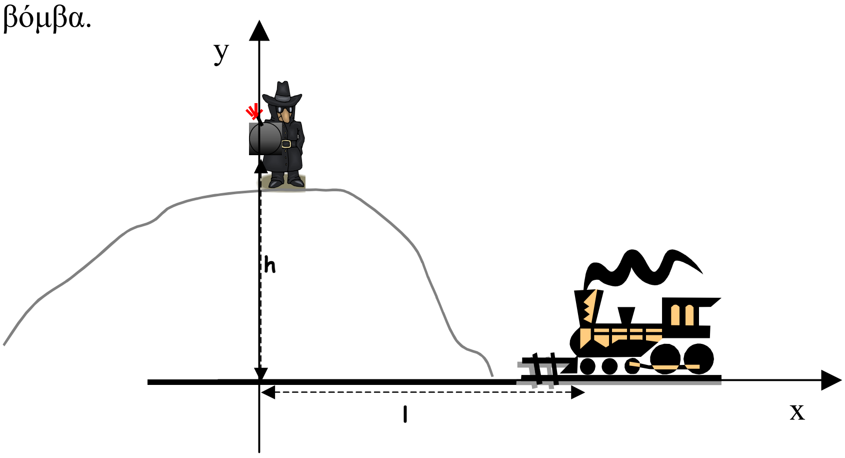


Στην κάθετη διεύθυνση έχουμε:
$$N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \qquad (1)$$
Στην οριζόντια διεύθυνση έχουμε:
$$T_s = \frac{m\upsilon^2}{r} \qquad (2)$$
όπου T_s η στατική τριβή μεταξύ σώματος και δίσκου, μιας και το σώμα δεν κινείται ως προς το δίσκο.

Όμως: $T_s \leq \mu_s N \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{m\upsilon^2}{r} \leq \mu_s N \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu_s \geq \frac{\upsilon^2}{gr} \qquad (3)$

Η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με:
$$\upsilon = \frac{33{,}3 \cdot 2\pi \cdot 10cm}{1min} = 0{,}349m/s \qquad (4)$$
Άρα τελικά από (3) και (4) έχουμε:
$$\mu_s \geq \frac{(0{,}349m/s)^2}{10m/s^2 \cdot 0{,}1m} = 0{,}12 \Rightarrow \mu_{s(min)} = 0{,}12$$

7. Θεωρούμε τους άξονες όπως στο σχήμα και ως t=0 τη στιγμή που ελευθερώνεται η βόμβα.



α) Η τροχιά του τρένου δίνεται από τις εξισώσεις:
$$x_t = l - Vt, \quad y_t = 0 \qquad (1)$$
και της βόμβας από τις εξισώσεις:
$$x_B = 0, \quad y_B = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

Η βόμβα θα φτάσει στο έδαφος όταν $y_B=0$ ή $t=(2h/g)^{1/2}$. Η μηχανή του τρένου θα είναι σ' αυτό το σημείο, στον ίδιο χρόνο, αν x=0 για $t=(2h/g)^{1/2}$. Άρα από την (1) έχουμε:
$$0 = l - V(2h/g)^{1/2} \Rightarrow l = V(2h/g)^{1/2} \qquad (3)$$
Συνεπώς ο πρώτος τρομοκράτης δεν πέτυχε το στόχο του.

β) Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα της βόμβας έχει επιπλέον μια συνιστώσα στη x διεύθυνση. Έτσι:

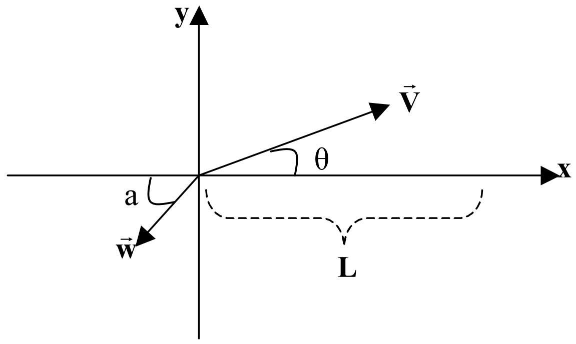
$x_B=wt$ (4)

Η σύγκρουση βόμβας και μηχανής τρένου θα συμβεί πάλι στο y=0, άρα και σε χρόνο $t=(2h/g)^{1/2}$. Η x συντεταγμένη της μηχανής του τρένου και της βόμβας θα πρέπει να είναι ίδια. Άρα από (1) και (4) έχουμε:

$$l-V(2h/g)^{1/2}=w(2h/g)^{1/2}\Rightarrow l=(V+w)(2h/g)^{1/2} \quad (5)$$

Συνεπώς, ούτε ο δεύτερος τρομοκράτης πέτυχε το στόχο του.

8.



Η ταχύτητα του αέρα ως προς το έδαφος είναι:

$$\vec{w}_{\alpha,\varepsilon}=-w\cdot \cos a\cdot \vec{i}-w\cdot \sin a\cdot \vec{j} \quad (1)$$

και του αεροπλάνου ως προς τον αέρα είναι:

$$\vec{V}_{\pi,\alpha}=V\cdot \cos\theta\cdot \vec{i}+V\cdot \sin\theta\cdot \vec{j} \quad (2)$$

Άρα, η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος είναι:

$$\vec{V}_{\pi,\varepsilon}=\vec{V}_{\pi,\alpha}+\vec{w}_{\alpha,\varepsilon}=(V\cos\theta-w\cos a)\vec{i}+(V\sin\theta-w\sin a)\vec{j} \quad (3)$$

Για να φτάσει το αεροπλάνο στο αεροδρόμιο θα πρέπει να μηδενιστεί η y συνιστώσα της ταχύτητάς του ως προς το έδαφος, αφού το αεροδρόμιο έχει y=0. Άρα από την (3) έχουμε:

$$V\sin\theta-w\sin a=0\Rightarrow \theta=\arcsin\left(\frac{w}{V}\sin a\right) \quad (4)$$

Για τη x συνιστώσα της ταχύτητας θα έχουμε:

$$V_{\pi,\varepsilon,x}=V\cos\theta-w\cos a=V\sqrt{1-\sin^2\theta}-w\cos a=V\sqrt{1-\left(\frac{w}{V}\right)^2\sin^2 a}-w\cos a=$$

$$=\sqrt{V^2-w^2\sin^2 a}-w\cos a$$

Το χρονικό διάστημα το οποίο θα χρειαστεί για να φτάσει στο αεροδρόμιο είναι ίσο με:

$$t=\frac{L}{V_{\pi,\varepsilon,x}}=\frac{L}{\sqrt{V^2-w^2\sin^2 a}-w\cos a} \quad (5)$$

9. α) Στεκούμενος στον εξωτερικό τοίχο, ο επιβάτης εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε κύκλο ακτίνας R_2, με ταχύτητα:

$$u = \frac{2\pi R_2}{T} \qquad (1)$$

και επιτάχυνση:

$$a = \frac{u^2}{R_2} = \frac{4\pi^2 R_2}{T^2} \qquad (2)$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι αυτή που του ασκεί ο τοίχος και τη συμβολίζουμε με N.

Έτσι:

$$N = ma = \frac{4\pi^2 R_2 m}{T^2} \qquad (3)$$

Για να αισθάνεται το ίδιο βάρος με αυτό στην γη, θα πρέπει:

$$\frac{4\pi^2 R_2 m}{T^2} = mg \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R_2}{g}} \qquad (4)$$

β) Ο αστροναύτης εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα υ, ως προς αδρανειακό παρατηρητή, ίση με:

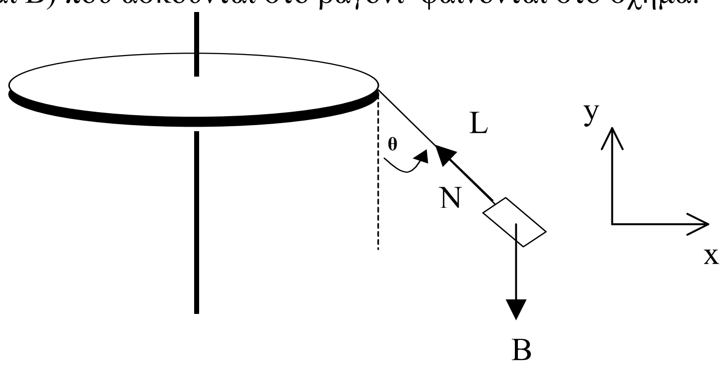
$\upsilon = V - u$ (η διεύθυνση της V όπως στο σχήμα) (5)

Το φαινομενικό του βάρος αλλάζει καθώς είναι ανάλογο της επιτάχυνσής του. Έστω Β και Β' το φαινομενικό βάρος στην περίπτωση (α) και (β), αντίστοιχα:

Θέλουμε:

$$B' = 1{,}2B \Rightarrow ma' = 1{,}2ma \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R_2} = 1{,}2\frac{u^2}{R_2} \overset{(5)}{\Rightarrow} (V-u)^2 = 1{,}2u^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} V = \left(\sqrt{1{,}2}+1\right)\frac{2\pi R_2}{T}$$

10. Οι δυνάμεις (Ν και Β) που ασκούνται στο βαγόνι φαίνονται στο σχήμα:



Το βαγόνι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R'=R+Lsinθ (1)

και ταχύτητας $V = \frac{2\pi R'}{T}$ (2)

Στον x άξονα ισχύει: $F_x = -N\sin\theta = -\frac{mV^2}{R'} \overset{(2)}{=} -\frac{4\pi^2 R' m}{T^2}$ (3)

Στον y άξονα ισχύει: $F_y = N\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$ (4)

Αντικαθιστώντας τις (4) και (1) στην (3) έχουμε:

$$-mg\tan\theta = -\frac{4\pi^2(R + L\sin\theta)m}{T^2} \Rightarrow T = \left(\frac{4\pi^2(R + L\sin\theta)}{g\tan\theta}\right)^{1/2}$$

11. Η μέση ταχύτητα $\overline{U}$ στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ είναι ίση με $\overline{U} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

και επειδή αναφερόμαστε σε ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\overline{U} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{U_0 t_2 + (1/2)at_2^2 - U_0 t_1 - (1/2)at_1^2}{t_2 - t_1} = U_0 + \frac{1}{2}a\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = U_0 + \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)$$

Η στιγμιαία ταχύτητα U στο μέσον του χρονικού διαστήματος $[t_1, t_2]$ είναι ίση με:

$$U = U_0 + at = U_0 + a\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) = U_0 + a\left(t_1 + \frac{t_2 - t_1}{2}\right) = U_0 + a\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Άρα οι δύο ταχύτητες είναι μεταξύ τους ίσες.

12. Με βάση την προηγούμενη άσκηση, η στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκινήτου στο B είναι ίση με τη μέση ταχύτητα μεταξύ των A και C, αφού το B είναι στο μέσον αυτού του χρονικού διαστήματος (απέχει 1s τόσο από το A όσο και από το C). Η στιγμιαία ταχύτητα λοιπόν στο B είναι ίση με:

$V_B = \Delta x/\Delta t = AC/(t_C - t_A) = 60\text{m}/2\text{s} = 30\text{m/s}$, με κατεύθυνση όπως αυτή του θετικού ημιάξονα x.

Για να βρούμε την επιτάχυνση στο σημείο B, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου τις χρονικές στιγμές 0,5s πριν και μετά το B. Η ταχύτητα στα 0,5s πριν το B είναι ίση με τη μέση ταχύτητα μεταξύ A και B, ενώ η ταχύτητα στα 0,5s μετά το B είναι ίση με τη μέση ταχύτητα μεταξύ B και C. Έτσι, έχουμε:

$V(t = t_B - 0{,}5\text{s}) = AB/(t_B - t_A) = 20\text{m}/1\text{s} = 20\text{m/s}$

$V(t = t_B + 0{,}5\text{s}) = BC/(t_C - t_B) = 40\text{m}/1\text{s} = 40\text{m/s}$

Άρα, η επιτάχυνση του αυτοκινήτου στο σημείο B, (η οποία είναι σταθερή στο διάστημα AC), είναι ίση με $a_B = \Delta V/\Delta t = (40-20)\text{m/s} / 1\text{s} = 20\text{m/s}^2$

Μετά το σημείο C, το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, το οποίο εύκολα υπολογίζεται από το διάστημα CD, αν διαιρέσουμε αυτή την απόσταση των 50m με το 1s. Έτσι, η ταχύτητα στο D θα είναι ίση με: $V_D = 50\text{m/s}$, με κατεύθυνση όπως αυτή του θετικού ημιάξονα x. Η επιτάχυνση στο D θα είναι φυσικά ίση με μηδέν, $a_D = 0$.

Στο σημείο E το αυτοκίνητο εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα σταθερού μέτρου, ίσου με $V_E = 50\text{m/s}$. Η ταχύτητα θα είναι εφαπτόμενη της τροχιάς, δηλαδή προς τα κάτω και προς τα δεξιά υπό γωνία 45^o. Η επιτάχυνση θα είναι ίση με:

$a_E = V^2/R = (50\text{m/s})^2 / 50\text{m} = 50\text{m/s}^2$, με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου, δηλαδή προς τα κάτω και προς τα αριστερά υπό γωνία 45^o.

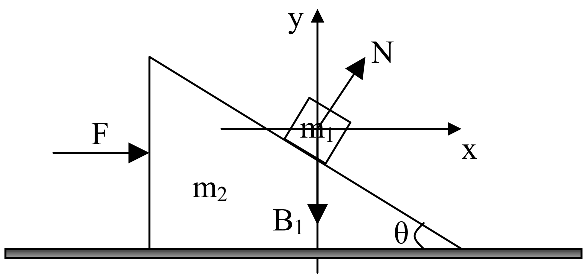
13. Με βάση το σχήμα έχουμε τα εξής:

Οι αρχικές ταχύτητες του βλήματος στους άξονες x και z είναι αντίστοιχα ίσες με:

$\upsilon_{0,x} = w\cos\theta$ και $\upsilon_{0,z} = w\sin\theta$

Λόγω όμως της κίνησης του βλήματος μαζί με το τρένο, θα έχει και μια αρχική ταχύτητα στην y διεύθυνση, ίση με $\upsilon_{0,y} = V$.
Στην x και y διεύθυνση δεν υπάρχει επιτάχυνση του βλήματος, άρα οι εξισώσεις μετατόπισης του βλήματος θα είναι οι εξής:
$x = \upsilon_{0,x}t = wt\cos\theta$ και $y = \upsilon_{0,y}t = Vt$.
Στην z διεύθυνση το βλήμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση υπό την επίδραση της βαρύτητας. Άρα: $z = \upsilon_{0,z}t - (1/2)gt^2 = w\sin\theta t - (1/2)gt^2$
Το βλήμα χτυπάει τον τοίχο όταν x = d, το οποίο συμβαίνει σε χρόνο:
$wt\cos\theta = d \Rightarrow t = d/w\cos\theta$.
Η δε συντεταγμένη y, όταν το βλήμα χτυπάει τον τοίχο είναι ίση με:
$y = Vt = Vd/w\cos\theta$.
Με δεδομένα τα θ και w, για να χτυπήσει το βλήμα τον τοίχο θα πρέπει να ισχύει επιπλέον του $x \geq d$ και $z \geq 0$.
Έτσι, έχουμε:
$z \geq 0 \Rightarrow w\sin\theta t - (1/2)gt^2 \geq 0 \Rightarrow w\sin\theta(d/w\cos\theta) - (1/2)g(d/w\cos\theta)^2 \geq 0 \Rightarrow$
$w \geq (gd/2\tan\theta\cos^2\theta)^{1/2}$

14. Όταν το κουτί δεν ολισθαίνει κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας, κινείται μαζί με το τριγωνικό αντικείμενο, (σαν ένα σύστημα), με την ίδια επιτάχυνση a. Άρα, θα ισχύει:
$F = (m_1+m_2)a$ (1)
Επίσης, για το κουτί m_1, με βάση το σχήμα έχουμε:
$N\sin\theta = m_1 a$ (3)
$N\cos\theta = B_1 = m_1 g$ (2)



Η (3) λόγω των (1) και (2) γίνεται: $(m_1 g/\cos\theta)\sin\theta = m_1(F/(m_1+m_2)) \Rightarrow$
$F = (m_1+m_2)g\tan\theta$

15. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τα σώματα μάζας m_1 και m_2 δίνει αντίστοιχα:
$2T - m_1 g = - m_1 a_1$ (1)
$T = m_2 a_2$ (2)
Τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και από το σχήμα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μετατόπιση του σώματος m_2 είναι διπλάσια αυτής του m_1, για το ίδιο χρονικό διάστημα. Αυτό συνεπάγεται ότι $a_2=2a_1$, και από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:
$2 m_2 a_2 - m_1 g = - m_1 a_1 \Rightarrow 4 m_2 a_1 - m_1 g = - m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = m_1 g/(m_1+4m_2)$
και $a_2=2m_1 g/(m_1+4m_2)$