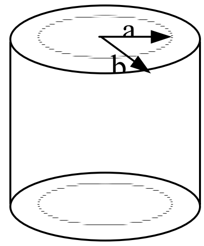
Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα :

Θέμα 1



A) Ένα απείρως μακρύ μονωτικό κυλινδρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής b έχει ομογενή πυκνότητα θετικού φορτίου ρ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του κυλινδρικού κελύφους. **50%**

B) Δύο αγώγιμες σφαίρες ακτίνων R_1 και R_2 με $R_1>R_2$ συνδέονται με ένα αγώγιμο σύρμα. Οι σφαίρες έχουν φορτίο q_1 και q_2 αντίστοιχα. Ποια από τις δύο σφαίρες έχει μεγαλύτερη επιφανειακή κατανομή φορτίου; **50%**

Λύση

A) Το σύστημα που εξετάζουμε έχει κυλινδρική συμμετρία επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου και το μέτρο του θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο. Η επιφάνεια Gauss που διαλέγουμε είναι κύλινδρος ύψους L με άξονα τον άξονα του φορτισμένου κυλίνδρου και ακτίνα r. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

α) r<a. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στις βάσεις και κάθετο στην κυλινδρική επιφάνεια το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\oint \vec{E}d\vec{S}$ έχει τιμή $\oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\substack{\kappa\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho\iota\kappa\eta \\ \varepsilon\pi\iota\phi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha}} \vec{E}d\vec{S} = \kappa \mathrm{E}(2\pi rL)$ όπου το κ έχει τιμή +1 ή –1 που καθορίζεται από το πρόσημο του φορτίου που περικλείεται από την επιφάνεια. Επειδή το φορτίο αυτό είναι μηδέν συμπεραίνουμε ότι E=0, δηλαδή στο εσωτερικό του κελύφους το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν.

β) a<r<b. Η επιφάνεια αυτή περικλείει φορτίο $q = \rho V = \rho\left(\pi r^2 L - \pi a^2 L\right)$ επομένως ο νόμος του Gauss δίνει $\oint \vec{E}d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \mathrm{E}(2\pi rL) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(\pi r^2 L - \pi a^2 L) \Leftrightarrow E = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{(r^2 - a^2)}{r}$

γ) b<r. Η επιφάνεια αυτή περικλείει φορτίο $q = \rho V = \rho\left(\pi b^2 L - \pi a^2 L\right)$ επομένως ο νόμος του Gauss δίνει $\oint \vec{E}d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \mathrm{E}(2\pi rL) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(\pi b^2 L - \pi a^2 L) \Leftrightarrow E = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{(b^2 - a^2)}{r}$

B) Οι σφαίρες επειδή συνδέονται με σύρμα βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό.
Το δυναμικό σφαιρικού αγωγού ακτίνας R και φορτίου Q μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Gauss ακτίνας r>R τότε έχουμε εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss:

$\oint \vec{E}(r)d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r)4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \mathrm{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$ με ακτινική διεύθυνση και φορά προς τα έξω αν το φορτίο είναι θετικό ή προς τα μέσα αν το φορτίο είναι αρνητικό.

Για r>R το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο με αυτό που θα προκαλούσε ένα σημειακό φορτίο q τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας οπότε το δυναμικό είναι $V(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$

Το δυναμικό λοιπόν μιας αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R και φορτίου q στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

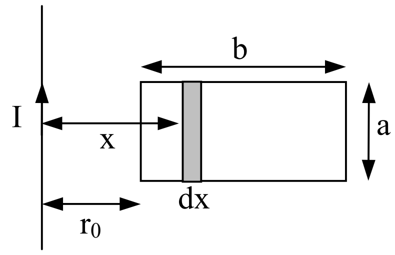
Επειδή οι σφαίρες βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό έχουμε:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} \Leftrightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \Leftrightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \Leftrightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Δηλαδή η σφαίρα με τη μεγαλύτερη ακτίνα έχει μικρότερη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

Θέμα 2

A) Ένα ορθογώνιο πλαίσιο πλευρών a και b βρίσκεται στη γειτονιά ευθύγραμμου αγωγού απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I. Ο αγωγός είναι παράλληλος σε μια πλευρά του πλαισίου μήκους a και βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου. Η πλησιέστερη πλευρά του πλαισίου απέχει από τον αγωγό r_0. Να βρεθεί η ολική μαγνητική ροή που διαπερνά το πλαίσιο. **70%**



B) Δύο φορτία 8μC και –5μC βρίσκονται σε απόσταση (σταθερή) d=0.45 m. Θεωρείστε σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το φορτίο 8μC και ακτίνα r. Ποια είναι η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια αν α) r=0.3m β) r=0.5 m. **30%**

Λύση

A) Το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε απείρου μήκους αγωγό είναι $B(r)=\dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}$ όπου r η απόσταση από τον αγωγό. Η διεύθυνσή του στο επίπεδο όπου βρίσκεται το πλαίσιο είναι από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Η ολική μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο είναι $\Phi_m=\int \vec{B}d\vec{S}$ Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε μια στενή λωρίδα σε απόσταση x από τον αγωγό και πλάτους dx τότε η στοιχειώδης μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια αυτή είναι $d\Phi_m=B(x)dS=B(x)adx$ Επομένως η ολική μαγνητική ροή είναι το ολοκλήρωμα της στοιχειώδους αυτής ροής από r_0 έως r_0+b.

$$\Phi_m=\int \vec{B}d\vec{S}=\int_{r_o}^{r_0+b}\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi x}adx=\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi}a\int_{r_o}^{r_0+b}\frac{1}{x}dx=$$

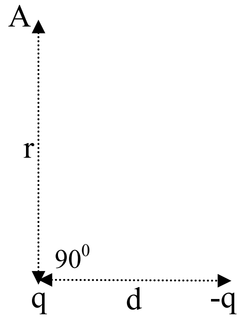
$$\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi}a\ln x\Big|_{r_0}^{r_0+b}=\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi}a\left(\ln(r_0+b)-\ln(r_0)\right)=\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi}a\ln\frac{r_0+b}{r_0}$$

B) Στην α) περίπτωση η επιφάνεια περικλείει φορτίο q=8μC επομένως η ηλεκτρική ροή είναι σύμφωνα με το νόμο του Gauss $\Phi_{\mathrm{E}}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}=\dfrac{8\ 10^{-6}}{8.85\ 10^{-12}}=0.9\ 10^{6}\ \mathrm{NC^{-1}}m^2$

Στη β) περίπτωση η επιφάνεια περικλείει φορτίο q=8μC-5μC=3μC επομένως η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια είναι $\Phi_{\mathrm{E}}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}=\dfrac{3\ 10^{-6}}{8.85\ 10^{-12}}=0.34\ 10^{6}\ \mathrm{NC^{-1}}m^2$

Θέμα 3

Α) Ένα ηλεκτρικό δίπολο έχει φορτία q και –q σε σταθερή απόσταση d. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και το δυναμικό στο σημείο Α που απέχει από το φορτίο q απόσταση $r = \sqrt{3}d$ (βλέπε σχήμα). **70%**



Β) Με το θάλαμο φυσαλίδων παρατηρούμε τις τροχιές των φορτισμένων σωματίων που εισέρχονται στο θάλαμο. Ο θάλαμος βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Μερικές τροχιές είναι ελικοειδείς και άλλες είναι ευθύγραμμες. α) Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας των σωματίων σε σχέση με τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου; Εξηγήστε. β) Δεδομένου του σημείου εισόδου ενός σωματίου στο μαγνητικό πεδίο, της διεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου και της ελικοειδούς τροχιάς, πως μπορούμε να συμπεράνουμε το πρόσημο του φορτίου; **30%**

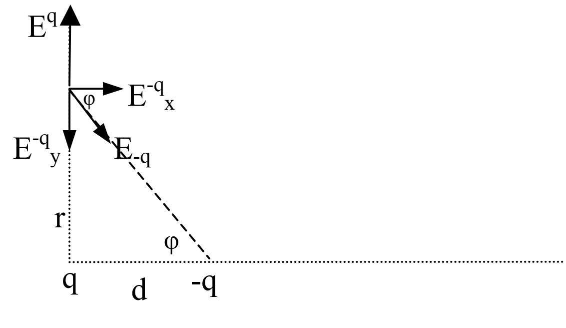
<u>Λύση</u>

Α) Αν θεωρήσουμε ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων το σημείο όπου βρίσκεται το θετικό φορτίο τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο Α (0,r) είναι $\vec{E}^q = \dfrac{q}{12\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{j}$ και

$$\vec{E}^{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d^2+3d^2)}\cos\phi\ \hat{\imath} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d^2+3d^2)}\sin\phi\ \hat{\mathrm{j}} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d^2+3d^2)}\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{(d^2+3d^2)}}\ \hat{\imath} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d^2+3d^2)}\frac{\mathrm{r}}{\sqrt{(d^2+3d^2)}}\ \hat{\mathrm{j}} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 4d^2}\frac{\mathrm{d}}{2d}\ \hat{\imath} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 4d^2}\frac{\mathrm{r}}{2d}\ \hat{\mathrm{j}} = \frac{q}{32\pi\varepsilon_0 d^2}\ \hat{\imath} - \frac{q}{32\pi\varepsilon_0 d^2}\sqrt{3}\ \hat{\mathrm{j}}$$



$$\vec{E}_{o\lambda} = \vec{E}^q + \vec{E}^{-q} = \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 d^2}\ \hat{\mathrm{j}} + \frac{q}{32\pi\varepsilon_0 d^2}\ \hat{\imath} - \frac{q}{32\pi\varepsilon_0 d^2}\sqrt{3}\ \hat{\mathrm{j}} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\hat{\mathrm{j}} + \frac{1}{8}\hat{\imath}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[\left(\frac{8-3\sqrt{3}}{24}\right)\hat{\mathrm{j}} + \frac{1}{8}\hat{\imath}\right]$$

Για τα δυναμικά έχουμε :

$V^q = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}d}$ $\quad V^{-q} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2d}$ οπότε το συνολικό δυναμικό είναι:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{V}$$

Β) α) Οι ελικοειδής τροχιές αναπαριστούν φορτισμένα σωματίδια τα οποία έχουν συνιστώσα της ταχύτητάς τους κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Οι ευθύγραμμες τροχιές αναπαριστούν φορτισμένα σωμάτια με ταχύτητα παράλληλη του μαγνητικού πεδίου.

β) Γνωρίζοντας την αρχική θέση του σωματίου και επομένως τη διεύθυνση και φορά της ταχύτητάς του και τη φορά του μαγνητικού πεδίου τότε από την δεξιόστροφή ή αριστερόστροφή τροχιά τους μπορούμε να καταλάβουμε το πρόσημο του φορτίου.