ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Ταλαντώσεις

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την αρμονική κίνηση ενός σώματος, η οποία γίνεται είτε σε ευθεία γραμμή, είτε γύρω από οριζόντιο άξονα, και θα γνωρίσουμε τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το είδος αυτό της κίνησης.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Μετά τη μελέτη του παρόντος κεφαλαίου θα είμεθα σε θέση:

- *Να περιγράψουμε τη γραμμική ταλάντωση και τη στροφική ταλάντωση σώματος.*
- *Να ορίσουμε τα μεγέθη τα οποία αφορούν αυτά τα είδη της κίνησης.*

Έννοιες κλειδιά

- *Αρμονική ταλάντωση*
- *Πλάτος της ταλάντωσης*
- *Κυκλική συχνότητα*
- *Φάση της ταλάντωσης*
- *Φθίνουσα ταλάντωση*
- *Ιδιοσυχνότητα*
- *Συντονισμός.*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Ταλάντωση σώματος είναι η παλινδρομική κίνηση αυτού γύρω από τη θέση της ευσταθούς ισορροπίας του. Επί πλέον, ταλάντωση λέγεται αρμονική, αν το αίτιο που την προκαλεί είναι ανάλογο στο αντίθετο της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε την αρμονική ταλάντωση σώματος, το οποίο κινείται σε ευθεία ή αιωρείται περί οριζόντιο άξονα. Για την κατανόηση της θεωρίας είναι απαραίτητη η γνώση των διαφορικών εξισώσεων.

Η διάταξη της ύλης έχει ως ακολούθως:

10.1 Απλή αρμονική ταλάντωση

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας m το οποίο κινείται πάνω στον άξονα yy' υπό την επίδραση της δυνάμεως

$$F = -Dy \tag{10.1.1}$$

όπου D είναι σταθερά και y είναι η απομάκρυνση του υλικού σημείου από τη θέση $y = 0$ κατά τη στιγμή t. Η θέση $y = 0$ ονομάζεται **θέση ισορροπίας** του σώματος, διότι εκεί $F = 0$, οπότε το σώμα παραμένει σε αυτήν εφόσον δεν έχει αρχική ταχύτητα. Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $F = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$, και αν θέσουμε $\omega_0^2 = \dfrac{D}{m}$ προκύπτει

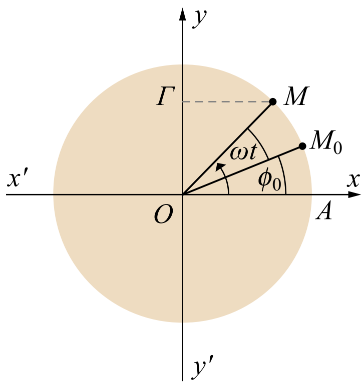
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \tag{10.1.2}$$

Αναζητώντας λύση της μορφής $y = e^{\rho t}$ λαμβάνουμε από την (10.1.2) την αλγεβρική εξίσωση $\rho^2 + \omega_0{}^2 = 0$ από όπου έχουμε $\rho = \pm\, i\omega_0$. Επομένως, η λύση της (10.1.2) θα είναι $y = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$. Αν περιοριστούμε σε πραγματικά y, η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$y = A\sin(\omega_0 t + \phi) \tag{10.1.3}$$

με κατάλληλο ορισμό των A και ϕ από τα c_1 και c_2. Αυτή είναι η γενική λύση της (10.1.2).

Από τη (10.1.3) προκύπτει ότι η απομάκρυνση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, γι' αυτό και το είδος αυτό της κινήσεως λέγεται **αρμονική ταλάντωση**. Η ταλάντωση αυτή χαρακτηρίζεται ως ελεύθερη, διότι εκτελείται απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Από την (10.1.3) επίσης, προκύπτει ότι η μέγιστη απομάκρυνση ισούται με $y_{\max} = A$. Η μέγιστη αυτή απομάκρυνση καλείται **πλάτος** της ταλάντωσης. Η γωνία $\omega t + \phi_0$ αποτελεί τη **φάση** της ταλάντωσης, ενώ το μέγεθος ϕ_0 συνιστά την **αρχική φάση** της κινήσεως, η οποία υπολογίζεται, αν στη γωνία της (10.1.3) τεθεί $t = 0$. Ο όρος $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ είναι η **κυκλική συχνότητα** της ταλάντωσης και έχει την ακόλουθη φυσική σημασία. Θεωρούμε κινητό M κινούμενο κατά την ορθή φορά επί κύκλου (O, A) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 (σχ. 10.1). Έστω M_0 η θέση του κινητού κατά την έναρξη της κινήσεως ($t = 0$) και M η θέση του κατά τη στιγμή t. Η προβολή του κινητού M στον άξονα yy' είναι το Γ και ισχύει



Σχήμα 10.1

$$O\Gamma = y = (OM)\sin(\Gamma \hat{M} O) \text{ ή } y = A\sin(\omega_0 t + \phi_0).$$

Συνεπώς, η κυκλική συχνότητα του κινητού που εκτελεί αρμονική ταλάντωση είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα ενός βοηθητικού κινητού που γράφει τον κύκλο (O, A). Παρατηρούμε ότι, όταν το κινητό M γράφει τον κύκλο (O, A), η προβολή του στον άξονα yy' εκτελεί αρμονική ταλάντωση. **Περίοδος** T της ταλάντωσης του κινητού είναι ο χρόνος εντός του οποίου το κινητό διαγράφει έναν πλήρη κύκλο. Από τις σχέσεις $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ και $T = 2\pi/\omega_0$ προκύπτει ότι $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{D}}$.

Στο σχήμα φαίνονται η γωνία φ_0, η οποία αντιστοιχεί στην αρχική φάση της ταλάντωσης και η γωνία $\omega_0 t + \phi_0$, η οποία αντιστοιχεί στην φάση της ταλάντωσης κατά τη στιγμή t. Με παραγώγιση της (10.1.3) ως προς τον χρόνο προκύπτει η ταχύτητα της ταλάντωσης

$$u = u_{\max}\cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{10.1.4}$$

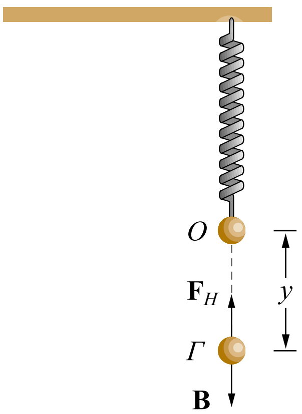
όπου $u_{\max} = \omega_0 A$ είναι η μέγιστη ταχύτητα του σώματος που εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

Σημείωση. Η σχέση (10.1.2) είναι ικανή και αναγκαία για να εκτελεί ένα υλικό σημείο γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Παράδειγμα 10.1

Στο κάτω άκρο κατακορύφου ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άνω άκρο είναι σταθερό, εξαρτάται σώμα $\Sigma(m)$ και ισορροπεί. Μετακινούμε το σώμα κατακορύφως προς τα κάτω κατά διάστημα A και το αφήνουμε ελεύθερο. Να περιγραφεί η κίνησή του.

Λύση



Σχήμα 10.2

Στη θέση O το σώμα ισορροπεί ακίνητο με το ελατήριο τεντωμένο κατά y_1 (σχ.10.2). Εκεί ισχύει $\sum \mathbf{F} = 0$.

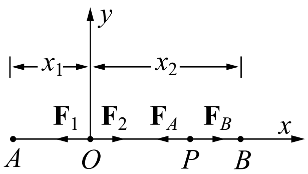
Άρα $\mathbf{B} + \mathbf{F}_{Hooke} = 0$ ή $-mg\mathbf{j} + ky_1\mathbf{j} = 0$. Δηλαδή $mg = ky_1$. Ασκώντας δύναμη φέρουμε το σώμα κάτω από τη θέση ισορροπίας και ακολούθως το αφήνουμε ελεύθερο. Σε μία τυχαία θέση $\Gamma(y)$ όπου $y = O\Gamma$ ισχύει $\sum \mathbf{F} = \mathbf{B} + \mathbf{F}_{Hooke} \Rightarrow ma\mathbf{j} = mg\mathbf{j} - k(y_1 + y)\mathbf{j}$. Από αυτήν, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ισορροπίας συμπεραίνουμε ότι $ma = -ky$. Άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η σταθερά k του ελατηρίου αντιστοιχεί στη σταθερά $D = m\omega_0^2$. Επομένως, $k = m\omega_0^2$, οπότε η περίοδος της κίνησης του σώματος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Η εξίσωση της κίνησης του σώματος είναι $y = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$, και η ταχύτητα $u = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi_0)$. Επίσης, οι αρχικές συνθήκες είναι $t = 0$:$y = -A$, $u = 0$. Θέτοντας $t = 0$ στις προηγούμενες εξισώσεις, βρίσκουμε $-A = A\sin\phi_0$ και $0 = \cos\phi_0$.

Άρα $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$. Η δεκτή λύση είναι η $y = A\sin\left(\omega_0 t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Παράδειγμα 10.2

Σώμα $\Sigma(m = 1\ \text{kg})$ βρίσκεται στη θέση O, μεταξύ των σημείων A και B, πάνω στον άξονα x και ισορροπεί. Τα σημεία A και B έλκουν το σώμα με δυνάμεις που έχουν μέτρο $F_1 = 5x_1$, $F_2 = 20x_2$, όπου x_1 και x_2 είναι οι αποστάσεις των A και B από το σώμα Σ. Αν εκτρέψουμε το σώμα κατά x από τη θέση ισορροπίας του, να εξεταστεί, αν θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Δεν υπάρχουν τριβές (σχ. 10.3).

Λύση



Σχήμα 10.3

Έστω O η θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας ισχύει $\sum F_x = 0$, οπότε $20(OB)\mathbf{i} - 5(AO)\mathbf{i} = 0$ ή $20x_2 = 5x_1$.

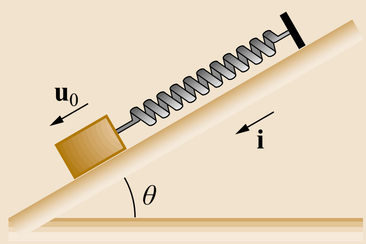
Φέρουμε το σώμα στη θέση P, όπου $OP = x$, και το αφήνουμε ελεύθερο. Στη θέση αυτή ισχύει $\sum \mathbf{F} = 20(PB)\mathbf{i} - 5(PA)\mathbf{i}$. Αλλά $PB = OB - OP = x_2 - x$ και $PA = x + x_1$. Άρα

$$\sum \mathbf{F} = 20(x_2 - x)\mathbf{i} - 5(x + x_1)\mathbf{i} = (20x_2 - 20x - 5x - 5x_1)\mathbf{i} \Rightarrow \sum \mathbf{F} = -25x\mathbf{i}$$

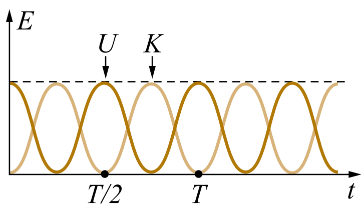
οπότε $ma = -25x$. Επομένως το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά ταλάντωσης $D = 25\ \text{N/m}$ και με κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 5\ \text{rad/s}$. Η εξίσωση της κίνησης είναι $x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$, ενώ η εξίσωση για την ταχύτητα είναι $u = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ και οι αρχικές συνθήκες είναι $t = 0$:$x = A$, $u = 0$. Θέτοντας $t = 0$ στην εξίσωση της κίνησης, βρίσκουμε $A = A\sin\phi_0$, $0 = \cos\phi_0$. Άρα $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Επομένως $x = A\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 10.1

Πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, το οποίο σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\theta = 30°$, ισορροπεί ακίνητο σώμα μάζας 2 kg, συνδεδεμένο στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N / m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι σταθερό. Δίδουμε στο σώμα, στη θέση που ισορροπεί, αρχική ταχύτητα u_0 = 2 m/s, με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα του ελατηρίου. Να εξεταστεί αν το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να γραφεί η εξίσωση της κινήσεως.



10.2 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή



Σχήμα 10.5

Όταν σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ασκείται σε αυτό δύναμη επαναφοράς $F = -Dx$, όπου x είναι η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του $x = 0$. Κατά τη μετατόπιση του σώματος από την θέση $x = x_1$ ως τη θέση $x = x_2$, η δύναμη F παράγει έργο

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -Dx dx = \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}Dx_2^2 \qquad (10.2.1)$$

Κατά τη μετατόπιση αυτή μεταβάλλεται η ταχύτητα του σώματος από u_1 σε u_2 και ισχύει το γνωστό θεώρημα έργου–κινητικής ενέργειας

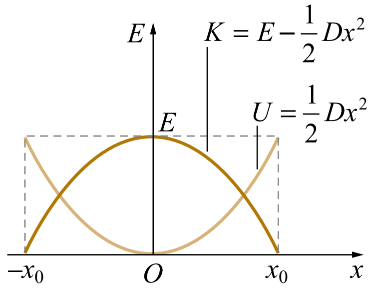
$$W = \frac{1}{2}mu_2^2 - \frac{1}{2}mu_1^2 \qquad (10.2.2)$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 \qquad (10.2.3)$$

Ο όρος $\frac{1}{2}Dx^2 = U$ καλείται **δυναμική ενέργεια** του απλού αρμονικού ταλαντωτή, ενώ ο όρος $\frac{1}{2}mu^2 = K$ είναι η κινητική ενέργειά του. Η σχέση (10.2.3) φανερώνει ότι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή, είναι σταθερό. Το σταθερό αυτό άθροισμα αποτελεί την ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ενέργεια αυτή ισούται με $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mu_{max}^2$. Αν επίσης θέσουμε $x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$ και $u = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ βρίσκουμε ότι

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = E\sin^2\left(\omega_0 t + \phi_0\right) \text{ και } U = \frac{1}{2}Dx^2 = E\sin^2\left(\omega_0 t + \phi_0\right).$$



Σχήμα 10.6

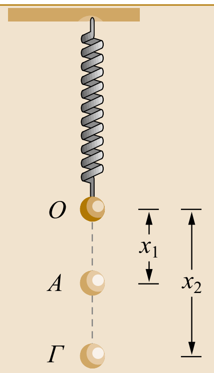
Στο σχήμα 10.5 έχουν σχεδιαστεί τα U και K ως συναρτήσεις του t για $\phi_0 = 0$. Επίσης, στο σχήμα 10.6 έχουν σχεδιαστεί τα U και K ως συναρτήσεις της απομάκρυνσης x.

Παρατήρηση. Δεν πρέπει να συγχέουμε τη δυναμική ενέργεια U της ταλάντωσης με τη δυναμική ενέργεια $U_{ελ}$ ενός παραμορφωμένου ελατηρίου. Υπενθυμίζεται ότι η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης εξαρτάται από την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας, ενώ η δυναμική ενέργεια παραμορφώσεως ενός ελατηρίου εξαρτάται από την παραμόρφωση του ελατηρίου. Για παράδειγμα, έστω σώμα εξαρτημένο από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k. Το σώμα ισορροπεί ακίνητο και το ελατήριο είναι τεταμένο κατά x_1, άρα έχει δυναμική ενέργεια $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx_1^2$. Ακολούθως το σώμα τίθεται σε κατακόρυφη ταλάντωση πλάτους A. Όταν το σώμα βρίσκεται στο κατώτατο σημείο της τροχιάς του, το ελατήριο είναι τεταμένο κατά $x_1 + A$. Άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση αυτή είναι $U_{ελ} = \frac{1}{2}k\left(x_1 + A\right)^2$.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι όμως $U = \frac{1}{2}kA^2$.

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 10.2

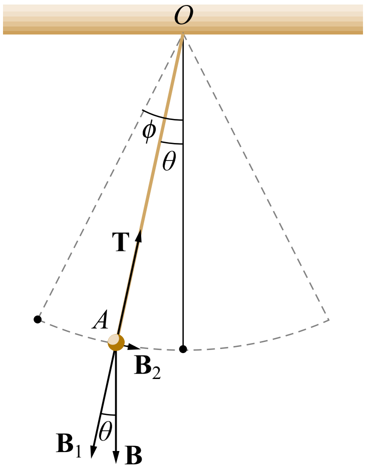
Σώμα μάζας m είναι εξαρτημένο στο ελεύθερο άκρο κατακορύφου ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου–κινητικής ενέργειας της παρ. (5.6) και γνωρίζοντας ότι οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι το βάρος του και η δύναμη Hooke, να αποδείξετε τη σχέση (10.2.3) όταν το σώμα μετακινείται από τη θέση x_1 στη θέση x_2, όπου x είναι η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.



Άσκηση αυτοαξιολόγησης 10.3

Σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό. Το σώμα ταλαντώνεται οριζοντίως. Αν κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης συγκρουστεί πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m, τι θα συμβεί στο πλάτος της ταλάντωσης του νέου σώματος; Θα γίνει μεγαλύτερο ως προς πριν, θα μειωθεί ή θα μείνει αμετάβλητο;

10.3 Απλό εκκρεμές. Γωνιακή ταλάντωση



Σχήμα 10.7

Έστω μη εκτατό νήμα μήκους l με σταθερό το ένα άκρο του O. Στο άλλο άκρο του προσδένουμε σώμα Σ μικρών διαστάσεων, το οποίο θεωρούμε ως υλικό σημείο. Το σύστημα νήματος – σώματος αποτελεί το απλό εκκρεμές. Εκτρέπουμε το σώμα κατά μικρή γωνία ϕ από τη θέση ισορροπίας έχοντας το νήμα τεντωμένο και ακολούθως το αφήνουμε ελεύθερο να αιωρείται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο περί οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο O του νήματος (σχ. 10.7). Το σώμα κινείται γράφοντας κυκλικό τόξο υπό την επίδραση του βάρους του B και της δύναμης T του νήματος. Αν σε μία τυχαία θέση A η ακτινική και εγκάρσια συνιστώσα του βάρους είναι αντιστοίχως $B_1 = B\cos\theta$ και $B_2 = B\sin\theta$, οι εξισώσεις της κινήσεως σε πολικές συντεταγμένες σύμφωνα με τη σχέση (2.4.2) είναι

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r\right) = -T + B\cos\theta \qquad (10.3.1)$$

$$m\left(2\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right) = -B\sin\theta \qquad (10.3.2)$$

όπου $\omega = \dot{\theta}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του σφαιριδίου, καθώς κινείται στο κυκλικό τόξο και η τελεία (.) δηλώνει παράγωγο ως προς τον χρόνο.

Στο παρόν παράδειγμα $r = l = σταθερό$, οπότε $\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$.Η (10.3.1) παρέχει την κεντρομόλο επιτάχυνση ως συνάρτηση της γωνίας θ. Η (10.3.2) γράφεται

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (10.3.3)$$

όπου $\ddot{\theta}$ η γωνιακή επιτάχυνση του σφαιριδίου. Για πολύ μικρές γωνίες ισχύει $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$. Επομένως, η (10.3.3) για πολύ μικρές γωνίες θ, γίνεται $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$.

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι η εξίσωση της κίνησης του απλού εκκρεμούς και έχει λύση την $\theta = A\,\sin(\omega_0 t + \phi_0)$. Οι σταθερές A και ϕ_0 εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες, ενώ η κυκλική συχνότητα ω_0 προκύπτει από την $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$ σε αντιστοιχία με τη σχέση $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$.

Η περίοδος του απλού εκκρεμούς για μικρές ταλαντώσεις ισούται με $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Είναι δηλαδή ανεξάρτητη από το πλάτος A της ταλάντωσης και από τη μάζα m του σώματος. Το απλό εκκρεμές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον πειραματικό προσδιορισμό της τιμής του g.

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 10.4

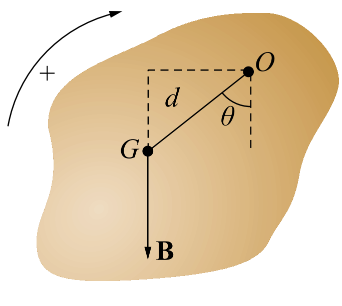
Δύο απλά εκκρεμή A και B έχουν ίσα μήκη και κοινό σημείο εξαρτήσεως των νημάτων τους. Εκτρέπουμε τα δύο εκκρεμή δεξιά και αριστερά ως προς την κατακόρυφο, το μεν A κατά 1° το δε B κατά 2°. Ακολούθως, τα αφήνουμε ελεύθερα. Που θα συγκρουστούν; Δίδεται $m_A > m_B$.

α) Στη θέση όπου τα νήματα είναι κατακόρυφα;

β) Αριστερά ως προς την κατακόρυφο;

10.4 Φυσικό εκκρεμές

Οποιοδήποτε σώμα το οποίο μπορεί να αιωρείται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο βάρους του σώματος, αποτελεί **φυσικό εκκρεμές**. Στη θέση ευσταθούς ισορροπίας, το κέντρο βάρους G βρίσκεται κατακορύφως κάτω από το σημείο περιστροφής O. Έστω d η απόσταση GO (σχ. 10.8). Εκτρέπουμε το σώμα κατά μικρή γωνία και ακολούθως το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα κινείται, διότι το βάρος του σώματος έχει ροπή ως προς τον άξονα αιωρήσεως.



Σχήμα 10.8

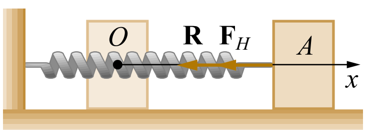
Στην τυχαία γωνιακή θέση θ του σώματος η ροπή αυτή έχει τιμή $\tau = -mgd \sin\theta$. Αλλά $\tau = I\alpha = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ όπου I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Άρα $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + mgd\sin\theta = 0$

Αυτή είναι και η εξίσωση της κινήσεως του σώματος. Για μικρή γωνία θ ισχύει ότι $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ οπότε έχουμε $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + mgd\theta = 0$ ή $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgd}{I}\theta = 0$

δηλαδή το σώμα εκτελεί αρμονική στροφική ταλάντωση. Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι $\theta = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$, όπου το πλάτος A της ταλάντωσης και η αρχική φάση ϕ_0 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Επίσης έχουμε $\omega_0^2 = \dfrac{mgd}{I}$,

οπότε η περίοδος της αιώρησης του φυσικού εκκρεμούς είναι $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$.

10.5 Φθίνουσα ταλάντωση



Σχήμα 10.9

Ας θεωρήσουμε υλικό σημείο με μάζα m, το οποίο βρίσκεται στην άκρη ελατηρίου, ο άξονας του οποίου βρίσκεται πάνω στον άξονα x. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο. Το σώμα έχει θέση ισορροπίας την αρχή O των αξόνων και μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα x χωρίς τριβές με το δάπεδο στηρίξεως (σχ. 10.9).

Στη θέση $A(x)$ οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι η δύναμη Hooke $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$ και η αντίσταση $\mathbf{R}$ από το μέσο εντός του οποίου κινείται το σώμα. Η αντίσταση $\mathbf{R}$ δεν είναι η τριβή μεταξύ σώματος και δαπέδου. Ασκείται από το μέσο που περιβάλλει το σώμα. Έστω ότι η αντίσταση είναι ανάλογη προς την ταχύτητα u του σώματος.

Άρα $\mathbf{R} = -b\mathbf{u}$, όπου $\mathbf{u} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} = \dot{x}\mathbf{i}$, οπότε και $\mathbf{R} = -b\dot{x}\mathbf{i}$. Η σταθερά b καλείται συντελεστής απόσβεσης. Η εξίσωση της κίνησης είναι

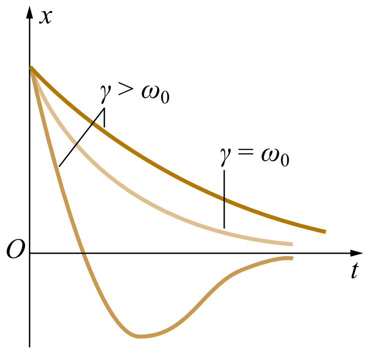
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (10.5.1)$$

Θέτουμε $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ και $\gamma = \dfrac{b}{2m}$, οπότε η (10.5.1) γράφεται

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad (10.5.2)$$

Παρατηρούμε ότι για $b = 0$, αναγόμεθα στην κλασική εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$. Η λύση της (10.5.2) ανάγεται στη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2+2\gamma\rho+\omega_0^2=0$, η οποία έχει ρίζες $\rho_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$. Επομένως, το είδος της κινήσεως του σώματος εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $\gamma^2-\omega_0^2$.

α) $\gamma > \omega_0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση της (10.5.2) είναι η $x=c_1e^{\rho_1 t}+c_2e^{\rho_2 t}$, όπου $\rho_1=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$, $\rho_2=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$. Η κίνηση του σώματος είναι ισχυρώς φθίνουσα και απεριοδική, διότι $\rho_1 < 0$ και $\rho_2 < 0$ (σχ. 10.10).



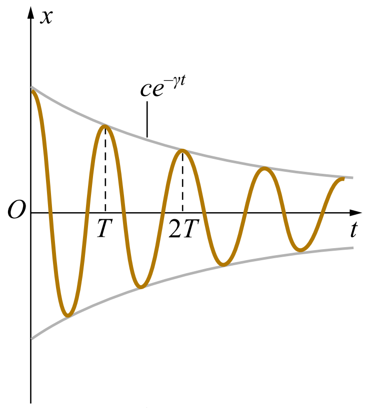
Σχήμα 10.10

β) $\gamma = \omega_0$. Η λύση της (10.5.2) είναι η $x = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$. Η κίνηση είναι πάλι φθίνουσα απεριοδική (σχ. 10.10).

γ) $\gamma < \omega_0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση γράφεται

$$x=e^{-\gamma t}\left(c_1\sin\lambda t+c_2\cos\lambda t\right)=ce^{-\gamma t}\left(\cos\lambda t-\phi_0\right).$$

Η κίνηση είναι φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\lambda}=$*σταθερή*, όπου $\lambda=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ είναι η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης. Το πλάτος c και η αρχική φάση ϕ_0 της ταλάντωσης προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες (σχ. 10.11).



Σχήμα 10.11

Η ενέργεια που χάνει ο ταλαντωτής μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ισούται με $E=\int_{t_1}^{t_2} bu^2\,dt$.

10.6 Εξαναγκασμένη ταλάντωση. Συντονισμός

Έστω απλός αρμονικός ταλαντωτής, ο οποίος κινείται σύμφωνα με την εξίσωση

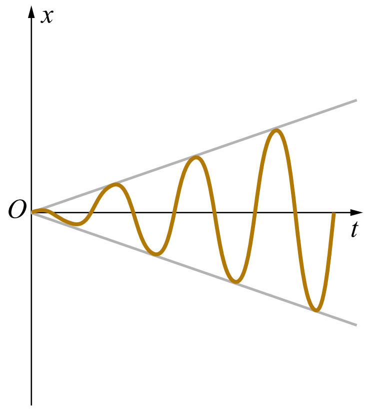
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F(t) \qquad (10.6.1)$$

δηλαδή, εκτός από τη δύναμη επαναφοράς ασκείται στο σώμα και μία εξωτερική δύναμη $F(t)$ κατά τη διεύθυνση της κίνησης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Η λύση της (10.6.1) είναι η

$$x = \frac{F_0 \cos \omega t}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} + D\cos\left(\omega_0 t + \phi_0\right) \qquad (10.6.2)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Οι σταθερές D και ϕ_0 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες της κίνησης.

Παρατηρούμε ότι, όταν το $\omega \to \omega_0$, το δεξιό μέλος της (10.6.2) γίνεται άπειρο. Από πρακτικής απόψεως αυτό σημαίνει ότι το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται πολύ μεγάλο, οπότε η λύση (10.6.2) δεν είναι λύση της (10.6.1). Στην περίπτωση που η κυκλική συχνότητα του διεγέρτη είναι ίση με την κυκλική συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης, η εξίσωση της κίνησης γράφεται



Σχήμα 10.12

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_0 t \qquad (10.6.3)$$

και έχει λύση

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin\omega_0 t + D\cos\left(\omega_0 t + \phi_0\right) \qquad (10.6.4)$$

Από τη (10.6.4) παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο (σχ. 10.12).

Άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή της εξαναγκασμένης ταλάντωσης με απόσβεση. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \;\; \text{ή}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \qquad (10.6.5)$$

όπου $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Αν $\gamma < \omega_0$, η λύση της (10.6.5) είναι

$$x = A\cos\left(\omega t - \theta\right) + De^{-\gamma t}\cos\left(\lambda t + \phi_0\right) \qquad (10.6.6)$$

όπου D και ϕ_0 σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες, και

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}}, \quad \tan\theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

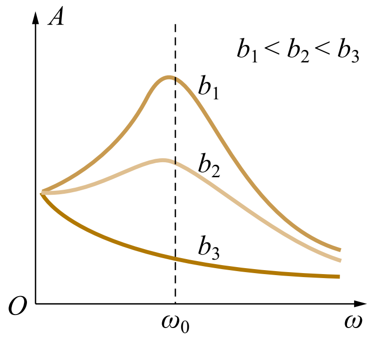
$$\lambda = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \qquad (10.6.7)$$

Είναι φανερό ότι ουσιαστικό ρόλο στη διαμόρφωση του πλάτους παίζει ο πρώτος προσθετέος του δεξιού μέλους της (10.6.6). Ο άλλος προσθετέος, που λέγεται **παροδικός** ή **μεταβατικός** όρος, φθίνει εκθετικά με τον χρόνο. Το πλάτος A γίνεται μέγιστο όταν

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \qquad (10.6.8)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε **συντονισμό** και η συχνότητα $f = \frac{2\pi}{\omega}$ ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού**. Με αντικατάσταση της (10.6.8) στην (10.6.7) προκύπτει ότι το μέγιστο πλάτος είναι $A_{\max} = \frac{F_0}{2\gamma m\lambda}$.

Από την έκφραση αυτή του μέγιστου πλάτους φαίνεται ότι το πλάτος αυξάνεται για μικρές αποσβέσεις. Επίσης το μέγιστο της καμπύλης A – ω μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές του ω, όταν το ω αυξάνει. Στην περίπτωση μεγάλων αποσβέσεων η (10.6.8) γίνεται φανταστική, οπότε δεν υπάρχει συχνότητα συντονισμού. Τέλος παρατηρούμε ότι, όταν υπάρχουν αποσβέσεις, το πλάτος δεν απειρίζεται. Τούτο σημαίνει ότι η δύναμη εξαναγκασμού δεν μπορεί να αυξήσει απεριορίστως το πλάτος της μόνιμης ταλάντωσης (σχ. 10.13).



Σχήμα 10.13

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 10.5

Ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L αιωρείται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το ένα άκρο της O_1. Αν στο άλλο άκρο της O_2 προσαρτήσουμε ένα υλικό σημείο μάζας M, η περίοδος του συστήματος θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί ως προς την περίοδο της ράβδου;

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 10.6

Ο τύπος της περιόδου ενός απλού εκκρεμούς είναι δυνατόν να προκύψει από τον τύπο της περιόδου του φυσικού εκκρεμούς;

10.7 Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Σωματίδιο μάζας m κινείται επί του άξονα Ox με την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F = -kx$. Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης του.

2. Σωματίδιο μάζας m ευρισκόμενο αρχικά σε ισορροπία στο κέντρο O εξαγώνου $ABCDEF$, μετατοπίζεται σε γειτονικό σημείο P. Αν, για κάθε θέση του P, το σωματίδιο υπόκειται σε δυνάμεις από τις κορυφές του εξαγώνου της μορφής $\mu\,\mathbf{PA}$, $\mu\,\mathbf{PB}$, $\mu\,\mathbf{PC}$, $\mu\,\mathbf{PD}$, $\mu\,\mathbf{PE}$, $\mu\,\mathbf{PF}$ όπου $\mu > 0$, να αποδειχθεί ότι αν αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση περί το σημείο O με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{m/6\mu}$.

3. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί ταλάντωση επί του άξονα Ox με την επίδραση της δύναμης επαναφοράς $F = -kx$ και της αντίστασης $R = -b\dot{x}$. Να προσδιοριστεί η εξίσωση της κίνησης για

(ι) $t = 0$: $x = 0$, $\dot{x} = u_0$

(ιι) $t = 0$: $x = x_0$, $\dot{x} = 0$

(ιιι) $t = 0$: $x = x_0$, $\dot{x} = u_0$.

4. Σε σωματίδιο μάζας m, το οποίο εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις στον άξονα x με περίοδο $T = 2\pi/n$, ασκείται η δύναμη $F\cos pt$ στον άξονα της κίνησης. Αν για $t = 0$ το σωματίδιο ακινητεί σε απόσταση d από το κέντρο της ταλάντωσης, να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του.

5. Υλικό σημείο μάζας m κινείται επί του άξονα Ox υπό την επενέργεια δύναμης επαναφοράς $F_1 = -kx$, αντίστασης $R = -b\dot{x}$ και δύναμης

(ι) $F = F_0 e^{-\alpha t}$

(ιι) $F = F_0 \cos pt e^{-\alpha t}$.

Να μελετηθεί η κίνηση του.

6. Σωματίδιο μάζας m κινείται επί του άξονα Ox με την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_1 = -kx$, αντίστασης $R = -b\dot{x}$ και δύναμης $F\cos pt$. Να βρεθεί η τιμή του p για την οποία (ι) Το πλάτος της μόνιμης κατάστασης γίνεται μέγιστο. (ιι) Το πλάτος της ταχύτητας της μόνιμης κατάστασης γίνεται μέγιστο.

7. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης υλικού σημείου είναι

$m\ddot{x} + kx = \alpha\cos pt + b\cos npt$.

Αν για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\dot{x} = u_0$ να προσδιοριστεί η κίνηση του υλικού σημείου.

Λύσεις των επαναληπτικών ασκήσεων

1.

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι η $m\ddot{x} = -kx$ η οποία γράφεται $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, με $\omega^2 = k/m$.

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (1)$$

Έστω πως κατά τη στιγμή t το κινητό βρίσκεται στη θέση x_A και έχει ταχύτητα με μέτρο u_A. Χωρίς να χάνεται η γενικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η χρονική στιγμή t αποτελεί την αρχή μέτρησης του χρόνου. Παραγωγίζουμε την (1) και παίρνουμε

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t. \qquad (2)$$

Θέτουμε στις (1) και (2) τις αρχικές συνθήκες

$$t = 0:\ x = x_A,\ u = u_A \ \text{ οπότε: } \ x_A = A,\ u_A = B\omega.$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$x = x_A\cos\omega t + \frac{u_A}{\omega}\sin\omega t. \qquad (3)$$

Στη σχέση αυτή γράφουμε $\frac{u_A}{\omega} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}x_A$ Επομένως η (3) γίνεται:

$$x = x_A\left[\cos\omega t + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin\omega t\right] = \frac{x_A}{\cos\phi}\cos(\omega t - \phi) \Rightarrow x = x_A\sqrt{1+\tan^2\phi}\,\cos(\omega t - \phi)$$

και τελικά $x = \dfrac{\sqrt{x_A^2\omega^2 + u_A^2}}{\omega}\cos(\omega t - \phi).$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $x_0 = \sqrt{{x_A}^2\omega^2 + u_A^2}\,/\omega$ και το ϕ είναι η αρχική φάση.

2.

Αρχικά, όταν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση O, ισορροπεί, οπότε ισχύει:

$$\sum \mathbf{F}_0 = 0 \Rightarrow \mu(\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} + \mathbf{OE} + \mathbf{OF}) = 0 \qquad (1)$$

Όταν το σωματίδιο βρεθεί στο P, η συνισταμένη δύναμη θα ισούται με

$$\sum \mathbf{F} = \mu\left(\mathbf{PA}+\mathbf{PB}+\mathbf{PC}+\mathbf{PD}+\mathbf{PF}+\mathbf{PE}\right) \tag{2}$$

όπου $\mathbf{PA}=\mathbf{PO}+\mathbf{OA}$, $\mathbf{PB}=\mathbf{PO}+\mathbf{OB}$ κ.ο.κ. Επομένως και λόγω της (1) η (2) γράφεται

$$\sum \mathbf{F} = 6\mu\mathbf{PO}$$

Αν λοιπόν $\mathbf{OP}=\mathbf{r}$ τότε $\mathbf{PO}=-\mathbf{r}$ οπότε: $\sum \mathbf{F}=-6\mu\mathbf{r}$ ή $m\ddot{\mathbf{r}}+6\mu\mathbf{r}=0$. Η τελευταία γράφεται $\ddot{\mathbf{r}}+\frac{6\mu}{m}\mathbf{r}=0$ και είναι η εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης του σωματιδίου γύρω από τη θέση O με περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$, όπου $\omega^2=\frac{6\mu}{m}$. Άρα

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{6\mu}}.$$

3.

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι η $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$ ή $\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0.$ Θέτουμε $\frac{b}{m}=2\gamma$, $\frac{k}{m}=\omega_0^2$ οπότε έχουμε την εξίσωση της κίνησης με τη μορφή

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \tag{1}$$

Η λύση της (1) είναι η

$$x=De^{-\gamma t}\cos\left(\omega_1 t-\theta\right) \tag{2}$$

όπου $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$, και D και θ σταθερές, η τιμή των οποίων εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Από την (2) έχουμε

$$\dot{x}=-D\gamma e^{-\gamma t}\cos\left(\omega_1 t-\theta\right)-D\omega_1 e^{-\gamma t}\sin\left(\omega_1 t-\theta\right) \tag{3}$$

(ι) $t=0$: $x=0$, $u=u_0$. Οι (2) και (3) δίδουν

$0=D\cos\theta$ και $u_0=-D\gamma\cos\theta+D\omega_1\sin\theta$ οπότε: $\theta=\pi/2$. Άρα: $D=\frac{u_0}{\omega_1}$.

(ιι) $t=0$: $x=x_0$, $u=0$. Οι (2) και (3) δίδουν

$x_0=D\cos\theta,\ 0=-D\gamma\cos\theta+D\omega_1\sin\theta$ οπότε:

$$\tan\theta=\frac{\gamma}{\omega_1},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{\omega_1}{\omega_0} \text{ και } D=\frac{x_0\omega_0}{\omega_1}.$$

(ιιι) $t = 0$: $x = x_0$, $u = u_0$. Οι (2) και (3) δίδουν

$x_0 = D\cos\theta,\ u_0 = -D\gamma\cos\theta + D\omega_1\sin\theta$ οπότε

$\tan\theta = \left(\dfrac{u_0}{x_0} + \gamma\right)\dfrac{1}{\omega_1}$ και $D = \dfrac{x_0}{\cos\theta}$.

4.

Η εξίσωση της ταλάντωσης είναι

$$\ddot{x} + n^2 x = \frac{F}{m}\cos pt \tag{1}$$

Η λύση της εξίσωσης (1) είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς $\ddot{x} + n^2 x = 0$ και της μερικής λύσης. Η ομογενής έχει λύση

$$x = C\cos(nt + \delta) \tag{2}$$

και η μερική λύση της (1) είναι η $x = A\cos pt + B\sin pt$ (3)

Άρα: $x = C\cos(nt + \delta) + A\cos pt + B\sin pt$ (4)

Από τη μερική λύση έχουμε

$x = A\cos pt + B\sin pt.$

$\dot{x} = -Ap\sin pt + pB\cos pt.$

$\ddot{x} = -Ap^2\cos pt - p^2 B\sin pt.$

Αντικαθιστώντας στην (1) τη μερική λύση και εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων τριγωνομετρικών όρων προκύπτει: $A = \dfrac{F}{m(n^2 - p^2)}$ και $B = 0$. Επομένως η γενική λύση είναι η

$$x = C\cos(nt + \delta) + A\cos pt \tag{5}$$

Ακολούθως από την (5) αν θέσουμε $t = 0$, $x = d$ και $\dot{x} = 0$, βρίσκουμε $C = d - A$ και $\delta = 0$. Άρα η απομάκρυνση δίδεται από τη σχέση

$$x = d\cos nt + \frac{F}{m(n^2 - p^2)}(\cos pt - \cos nt).$$

5.

(ι) Η διαφορική εξίσωση της κίνησης γράφεται $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 e^{-\alpha t}$ και κατόπιν διαίρεσης με τη μάζα $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=\frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}$ (1) όπου $2\gamma=b/m$, $k/m=\omega^2$.

Η μερική λύση της (1) είναι η $x=Ae^{-\alpha t}$. Επομένως αντικαθιστώντας αυτήν στην (1) βρίσκουμε $A=\frac{F_0}{m\left(\alpha^2-2\gamma\alpha+\omega^2\right)}$. Η λύση της ομογενούς $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=0$ είναι $x=De^{-\gamma t}\cos(\omega t-\theta)$.

Επομένως η γενική λύση της (1) είναι η $x=De^{-\gamma t}\cos(\omega t-\theta)+Ae^{-\alpha t}$.

(ιι) Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=\frac{F_0}{m}\cos pt\cdot e^{-\alpha t}$ (2)

Η μερική λύση της (2) είναι της μορφής $x=\left(A\cos pt+B\sin pt\right)e^{-\alpha t}$. Αντικαθιστώντας το x με το ίσο του στην (2) και εξισώνοντας τους αντίστοιχους τριγωνομετρικούς όρους των δύο μελών της (2) βρίσκουμε τις σταθερές A, B και δ.

Η λύση της ομογενούς $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=0$ είναι $x=De^{-\gamma t}\cos(\omega t-\theta)$.

Η γενική λύση της (2) είναι $x=De^{-?t}\cos(\omega t-\theta)+(A\cos pt+B\sin pt)e^{-\alpha t}$.

6.

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F\cos pt$. Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=\frac{F}{m}\cos pt \tag{1}$$

όπου $\frac{b}{m}=2\gamma$ και $\frac{k}{m}=\omega^2$.

Η λύση της ομογενούς $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=0$ είναι $x=De^{-\gamma t}\cos(\omega t-\theta)$ και η μερική λύση της (1) είναι η $x=A\cos(pt-\delta)$, όπου $A=\frac{F/m}{\sqrt{4\gamma^2p^2+\left(\omega^2-p^2\right)^2}}$ (2) και $\tan\delta=\frac{2\gamma p}{\omega^2-p^2}$.

Επομένως η γενική λύση της (1) είναι $x=De^{-\gamma t}\cos(\omega t-\theta)+A\cos(pt-\delta)$ (3)

και οι σταθερές D και θ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Παρατηρούμε ότι στη γενική λύση ο πρώτος προσθετέος μειώνεται εκθετικώς με τον χρόνο. Γι' αυτό ο όρος αυτός λέγεται παροδικός όρος σε αντίθεση με τον άλλο, ο οποίος λέγεται μόνιμος. Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη τιμή του πλάτους A, παραγωγίζουμε την (2) ως προς p και θέτουμε την παράγωγο ίση προς μηδέν με την προϋπόθεση ότι η τιμή του p, για την οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, καθιστά τη β′ παράγωγο του A ως προς p αρνητική. Τελικά έχουμε

$$A_{\max} = \frac{F}{b\omega_1}, \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \;\; \text{για} \;\; p = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}.$$

Η ταχύτητα της μόνιμης ταλάντωσης είναι

$$u = \dot{x} = -Ap\sin(pt - \delta)$$

οπότε το πλάτος της ταχύτητας είναι $u_0 = Ap$.

Ακολουθώντας την ίδια όπως και προηγουμένως διαδικασία για τον υπολογισμό του μέγιστου πλάτους ως συνάρτηση του p βρίσκουμε ότι το πλάτος της ταχύτητας γίνεται μέγιστο για $p = \omega$. Η μέγιστη τιμή του πλάτους της ταχύτητας ισούται με

$u_{0,\max} = F/b$.

7.

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης γράφεται $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\alpha}{m}\cos pt + \frac{b}{m}\cos npt$ (1)

Η μορφή του δεξιού μέλους συνιστά να αναζητηθεί η μερική λύση

$$x = A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + A_2 \cos npt + B_2 \sin npt.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) και εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων τριγωνομετρικών αριθμών προκύπτει

$$B_1 = B_2 = 0,\; A_1 = \frac{\alpha}{m(\omega^2 - p^2)},\; A_2 = \frac{b}{m(\omega^2 - n^2 p^2)}.$$

Η λύση της ομογενούς $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ είναι $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

Επομένως η γενική λύση της (1) είναι

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\alpha}{m(\omega^2 - p^2)}\cos pt + \frac{b}{m(\omega^2 - n^2 p^2)}\cos npt. \qquad (2)$$

Για να προσδιορίσουμε τα A και B χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες

$$t = 0: x = 0,\; \dot{x} = u_0.$$

Παραγωγίζουμε τη (2) ως προς t και προκύπτει

$$\dot{x}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t-\frac{\alpha p\sin pt}{m\left(\omega^2-p^2\right)}-\frac{bnp\sin npt}{m\left(\omega^2-n^2p^2\right)}. \qquad (3)$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες στις (2) και (3) οπότε βρίσκουμε

$$B=\frac{u_0}{\omega} \text{ και } A=-\frac{\alpha}{m\left(\omega^2-p^2\right)}-\frac{b}{m\left(\omega^2-n^2p^2\right)}.$$

Τελικά:

$$x=\frac{\alpha\cos pt}{m\left(\omega^2-p^2\right)}+\frac{b\cos npt}{m\left(\omega^2-n^2p^2\right)}-\left[\frac{\alpha}{m\left(\omega^2-p^2\right)}+\frac{b}{m\left(\omega^2-n^2p^2\right)}\right]\cos\omega t+\frac{u_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Σύνοψη

- *Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους γύρω από μία θέση ισορροπίας όταν η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι ανάλογη προς το αντίθετο της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας. Αν υπάρχουν αντιστάσεις, η ταλάντωση είναι φθίνουσα, περιοδική ή μη, αναλόγως προς την τιμή του συντελεστή αποσβέσεως. Τέλος, όταν ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, η συχνότητά του είναι ίση με την συχνότητα του διεγέρτη και το πλάτος της εξαρτάται από τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στην ταλάντωση.*

Βιβλιογραφικός Οδηγός για περαιτέρω μελέτη

(Στοιχεία για τις Εκδόσεις, *βλ. Βιβλιογραφία* στο τέλος του βιβλίου)

Στο κεφάλαιο 13 της Φυσικής Ι του R.A. Serway και της Φυσικής Ι του H.D. Young υπάρχουν αρκετά παραδείγματα και δύο πολύ ενδιαφέροντα δοκίμια που αφορούν τις ταλαντώσεις.

Γλωσσάριο

Αρμονική ταλάντωση. Η παλινδρομική κίνηση ενός σώματος περί μία θέση ισορροπίας, όπου η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση αυτή είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

Πλάτος της ταλάντωσης. Η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.

Ελεύθερη ταλάντωση. Είναι η ταλάντωση ενός σώματος απουσία εξωτερικών δυνάμεων.

Ιδιοσυχνότητα ή φυσική συχνότητα. Είναι η συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης ενός σώματος.

Αμείωτη αρμονική ταλάντωση. Η αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους.

Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση. Η αρμονική ταλάντωση με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.

Εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η ταλάντωση υπό την επίδραση εξωτερικού διεγέρτη.

Συντονισμός. Το φαινόμενο κατά το οποίο το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με μέγιστο πλάτος.

Φάση της ταλάντωσης είναι η γωνία $\omega t + \phi_0$ που δείχνει τη γωνιακή θέση του κινητού στον περιοδικό κύκλο κατά τη στιγμή t.

Ασκήσεις

1. Σώμα μάζας $m = 1$ kg κρέμεται από το άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 10^2$ N / m. Αν για $t = 0$ το σώμα έχει $y = 0.005$ m και $u = 0.15$ m/s, να βρεθεί η εξίσωση $y = y(t)$.

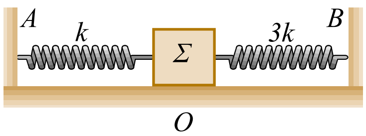
[*Απ.* $y = A\sin(\omega t + \phi_0)$, όπου $\omega = 10$ rad/s και $\tan\phi_0 = 1/3$]

2. Σώμα με μάζα $m = 0.5$ kg είναι δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k = 200$ N / m και εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Αν για $t = 0$ το σώμα έχει $x = 0.05$ m και $u = 3$ m/s, να γραφούν οι εξισώσεις $x = x(t)$ και $a = a(t)$ και να υπολογιστεί η ενέργεια της ταλάντωσης.

[*Απ.* $x = A\sin(\omega t + \phi_0)$ με $A = \sqrt{\frac{1}{40}}$ m,

$\omega = 20$ rad/s και $\tan\phi_0 = 1/3$, $a = -\omega^2 x$, $E = 2.5$ J]

3. Σώμα Σ φέρει στις πλευρές του δύο ελατήρια που έχουν το καθένα μήκος l_0 και σταθερές k και $3k$ αντιστοίχως. Τα ελατήρια εξαρτώνται από τα σημεία A και B και το σώμα ισορροπεί. Να βρεθεί η θέση ισορροπίας O του σώματος και η παραμόρφωση καθενός ελατηρίου. Αν μετατοπίσουμε το σώμα κατά μικρή μετατόπιση να αποδειχθεί ότι θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί η περίοδός της. (σχ. 10.14) Δίδεται ότι $AB = 3\,l_0$.



Σχήμα 10.14

[*Απ.* $AO = \frac{7l_0}{4}$, $\Delta l_k = \frac{3l_0}{4}$, $\Delta l_{3k} = \frac{l_0}{4}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$]

4. Σώμα Σ με μάζα $m = 0.5$ kg είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N / m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητο. Το σώμα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι και μεταξύ σώματος και τραπεζιού υπάρχει τριβή με συντελεστή $\mu = 0.1$. Αρχικά το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα ηρεμεί. Μετακινούμε το σώμα κατά $x_1 = 10$ cm κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Τι κίνηση εκτελεί το σώμα; β) Αν ο συντελεστής της στατικής τριβής είναι ίσος με τον συντελεστή της τριβής ολίσθησης, πόση συνολικά διαδρομή θα διανύσει το σώμα ώσπου να σταματήσει; Τι παρατηρούμε ως προς τον τρόπο με τον οποίο μειώνεται το πλάτος;

(*Υπόδειξη:* Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου–κινητικής ενέργειας μεταξύ δύο ακραίων θέσεων βρίσκουμε ότι σε κάθε απλή διαδρομή το πλάτος του σώματος ελαττώνεται κατά σταθερή ποσότητα ίση με $\Delta x_0 = 1$ cm. Το σώμα θα μπορούσε να ισορροπήσει ακίνητο στη θέση x όπου $kx = T$ δηλαδή στη θέση $x = 0.5$ cm. Επειδή όμως το πλάτος ελαττώνεται κατά 1 cm σε κάθε απλή διαδρομή, συμπεραίνεται ότι οι ακραίες απομακρύνσεις του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι διαδοχικά 9 cm, 8 cm, …, 1cm. Στη θέση $x = 1$ cm ισχύει $F_{Hooke} > T$. Τελικά το σώμα θα ακινητήσει στη θέση $x = 0$).

[*Απ*: α) Μη αρμονική ταλάντωση, β) $x_{ολ} = 1$m]

5. Υλικό σημείο μπορεί να κινείται χωρίς τριβή στο εσωτερικό κοίλου ημισφαιρίου. Η κίνησή του αυτή είναι αρμονική ταλάντωση; Πότε είναι;

[*Απ*: Η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση, αν έχει μικρό πλάτος και γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο].

6. Ομογενής ράβδος μήκους l εκτελεί αιώρηση μικρού γωνιακού πλάτους γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το ένα άκρο της. α) Ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων; β) Σε ποιο σημείο πρέπει να βρίσκεται ο άξονας της αιώρησης, ώστε η ράβδος να ισοδυναμεί με απλό εκκρεμές μήκους l;

[*Απ.* α) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$, β) $d = \dfrac{l\left(3 \pm \sqrt{6}\right)}{6}$]

7. Ομογενής δίσκος ακτίνας R μπορεί να αιωρείται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος απέχει κατά d από το κέντρο του C. Ποια είναι η σχέση μεταξύ της περιόδου των μικρών ταλαντώσεων του δίσκου και της απόστασης d; Υπάρχει τιμή του d για την οποία η περίοδος γίνεται ελάχιστη; Το d μπορεί να μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών $0 < d \le R$.

[*Απ.* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$, όπου $I = I_C + md^2 = \dfrac{1}{2}mR^2 + md^2$,

$T_{\min} = 2\pi\sqrt{2d/g}$, όπου $d = R/\sqrt{2}$]

8. Σε σώμα με μάζα $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg, που μπορεί να κινηθεί στον άξονα x, δρουν δύο δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$, όπου $\mathbf{F}_1 = -20 \cdot 10^{-5}\, x\mathbf{i}$ και $\mathbf{F}_2 = -2 \cdot 10^{-2}\, u\mathbf{i}$. Αν το σώμα ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα από τη θέση $x = 20 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$, να περιγραφεί η κίνησή του.

(*Υπόδειξη:* Η εξίσωση της κινήσεως είναι $x = c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t}$

και της ταχύτητας $u = \rho_1 c_1 e^{\rho_1 t} + \rho_2 c_2 e^{\rho_2 t}$ όπου ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\rho^2 + 4\rho + 4 \cdot 10^{-2} = 0$. Οι σταθερές c_1 και c_2 βρίσκονται, αν τεθεί $t = 0$, $x = 0.2$ και $u = 0$. Επομένως βρίσκονται από τη λύση των εξισώσεων $0 = c_1\rho_1 + c_2\rho_2$ και $0.2 = c_1 + c_2$).

[*Απ*: Το σώμα εκτελεί απεριοδική φθίνουσα κίνηση, διότι $\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$ (περίπτωση (α) της παραγράφου 10.5)].

9. Κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά k έχει το κάτω άκρο του σταθερό και στο άνω άκρο του φέρει αβαρή δίσκο επί του οποίου υπάρχει σώμα Σ με μάζα m. Το σύστημα εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση πλάτους A. Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα με την οποία μπορεί το σύστημα να ταλαντώνεται χωρίς να χάνεται η επαφή του σώματος με τον δίσκο;

[*Απ.* $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{A}}$]