

Όνοματεπώνυμο _____

Τμήμα _____

Θέμα 1

1^ο Ερώτημα

Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $Q_1 = 2.4 \cdot 10^{-10} C$ και $Q_2 = -1.2 \cdot 10^{-10} C$ αντίστοιχα στερεώνονται στον άξονα x. Το Q_1 τοποθετείται στην αρχή των αξόνων ($x_1 = 0$) ενώ το Q_2 στη θέση με $x_2 = 1m$. Ένα ηλεκτρόνιο αφήνεται με μηδενική ταχύτητα στη θέση $x_3 = 1.5m$. Ποια η ταχύτητά του όταν βρεθεί στη θέση $x_4 = 3m$; Αγνοείστε την επίδραση της βαρύτητας.

Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου στο $x_3 = 1.5 m$ είναι

$$U(x_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 q_e}{x_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 q_e}{x_3 - x_2} = k_{ηλ} \left(\frac{Q_1 q_e}{x_3} + \frac{Q_2 q_e}{x_3 - x_2} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 Nm^2 C^{-1} \left(-\frac{2.4 \cdot 10^{-10} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} C^2}{1.5m} + \frac{1.2 \cdot 10^{-10} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} C^2}{0.5m} \right) = 11.7 \cdot 10^{-20} J$$

Η δυναμική ενέργεια στη θέση $x_4 = 3m$ είναι:

$$U(x_4) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 q_e}{x_4} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 q_e}{x_4 - x_2} = k_{ηλ} \left(\frac{Q_1 q_e}{x_4} + \frac{Q_2 q_e}{x_4 - x_2} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 Nm^2 C^{-1} \left(-\frac{2.4 \cdot 10^{-10} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} C^2}{3m} + \frac{1.2 \cdot 10^{-10} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} C^2}{2m} \right) =$$

$$= -11.53 \cdot 10^{-20} J + 8.65 \cdot 10^{-20} J = -2.88 \cdot 10^{-20} J$$

Η διαφορά της δυναμικής ενέργειας ισούται με την κινητική ενέργεια που θα έχει αποκτήσει το ηλεκτρόνιο στη θέση x_4 . Δηλαδή:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = 14.58 \cdot 10^{-20} J \Rightarrow v = \sqrt{\frac{29.16 \cdot 10^{-20} J}{9.1 \cdot 10^{-31} kg}} = 56.6 \cdot 10^4 m/s$$

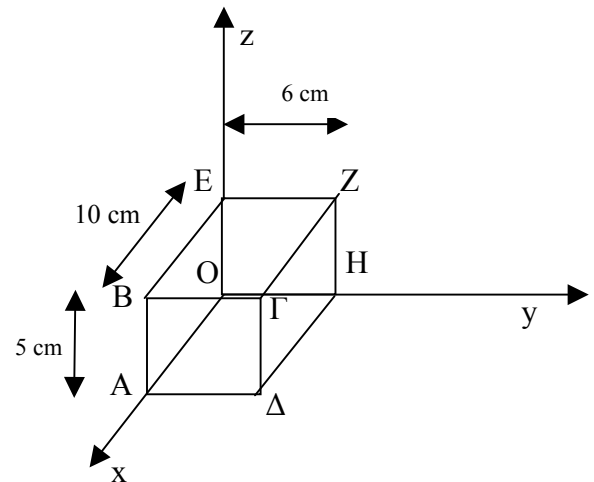
2^ο Ερώτημα

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοποθετείται με την μια κορυφή του στην αρχή των αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο της

$$\text{μορφής: } \vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} 5 \cdot 10^4 \hat{i} N/C, & \text{στη θέση } x=0 m \\ 3 \cdot 10^4 \hat{i} N/C, & \text{στη θέση } x=0.1 m \\ 0, & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } x \neq 0.1 m \end{cases}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από φορτία έξω από το παραλληλεπίπεδο καθώς επίσης και από φορτία μέσα σε αυτό.

Προσδιορίστε το ολικό φορτίο που περικλείεται από το



παραλληλεπίπεδο.

Απάντηση

Η ολική ηλεκτρική ροή που περνάει μέσα από την κλειστή επιφάνεια του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου είναι

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow Q = \epsilon_0 \cdot \Phi_E \quad (1), \text{ όπου } Q \text{ το φορτίο που περικλείεται μέσα στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Η ολική ροή}$$

όμως Φ είναι ίση με το άθροισμα των ροών κάθε επιφανείας του παραλληλεπίπεδου. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι κατά την διεύθυνση του άξονα x , μόνο δύο πλευρές συνεισφέρουν στην ολική ροή. Συγκεκριμένα οι πλευρές $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ που έχουν εμβαδόν $S=3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Επομένως:

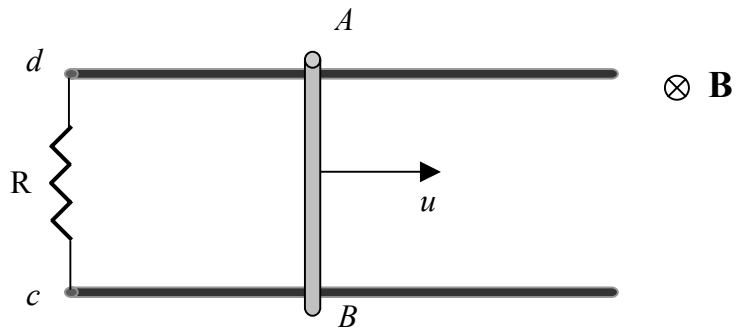
$$\begin{aligned} \Phi_E &= \Phi_{AB\Gamma\Delta} + \Phi_{EZH\Theta} = -E_{x=0}S + E_{x=0.1}S = S(E_{x=0.1} - E_{x=0}) = \\ &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 (3 \cdot 10^4 \text{ N/C} - 5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) = -60 \text{ Nm}^2 / \text{C} \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά από την (1) έχουμε } Q = \epsilon_0 \cdot \Phi_E = -8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2 \cdot 60 \text{ Nm}^2 / \text{C} = -531 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

Θέμα 2

1^ο Ερώτημα

Μια ράβδος AB μηδενικής αντίστασης και μήκους $L = 1 \text{ m}$, κινείται χωρίς τριβές πάνω σε αγωγικές ράγες όπως δείχνει το σχήμα. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με κατεύθυνση προς τα μέσα και με μέτρο $B = 0.60 \text{ T}$. Εξασκούμε δύναμη F και η ράβδος κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα 4.0 m/sec . Πόση αντίσταση R πρέπει να έχει το κύκλωμα αν η δύναμη F που κινεί τη ράβδο παράγει έργο με ρυθμό 200 W ;



Απάντηση

Επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων με το x άξονα στη διεύθυνση της ταχύτητας, και y άξονα παράλληλο στη κινούμενη ράβδο τότε $\vec{B} = -B\hat{k}$ όπου \hat{k} το μοναδιαίο στο z -άξονα. Στη ράβδο επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη που είναι ίση με $E = BuL$ με το σημείο A να είναι σε υψηλότερο δυναμικό από το σημείο B . Έτσι στο κύκλωμα κυκλοφορεί ρεύμα I αριστερόστροφο (κανόνας του Lenz). Αφού η ράβδος διαρρέεται με ρεύμα και κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, ασκείται πάνω της δύναμη

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = -ILB\hat{i} \text{ όπου } \hat{i} \text{ το μοναδιαίο στον άξονα } x.$$

Για να κινηθεί η ράβδος με σταθερή ταχύτητα, ασκούμε δύναμη αντίθετη της \vec{F} . Επομένως η μηχανική ισχύς που προσφέρουμε είναι

$$P = (-\vec{F}) \cdot \vec{u} = IBLu = \frac{E}{R} BLu = \frac{(BLu)^2}{R}$$

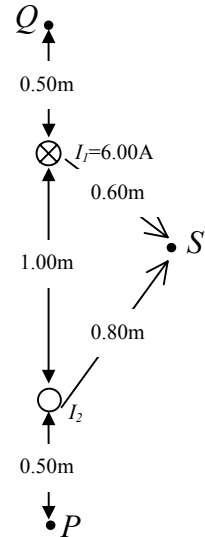
Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε την αντίσταση R

$$R = \frac{(BLu)^2}{P} = \frac{(2.4V)^2}{200W} = 0.0288\Omega$$

2^ο Ερώτημα

Δύο ευθύγραμμα και μεγάλου μήκους παράλληλα σύρματα απέχουν μεταξύ τους 1 m. Η διεύθυνση των συρμάτων είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας όπως φαίνεται στο σχήμα. Το επάνω σύρμα διαρρέεται από ρεύμα $I_1 = 6.00 \text{ A}$ με φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα.

- (α) Ποιο πρέπει να είναι το I_2 , σε μέτρο και φορά, ώστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P να είναι μηδέν;
- (β) Πόσο είναι τότε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Q ;
- (γ) Πόσο είναι τότε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο S ;



Απάντηση

α) Τα \vec{B}_1 και \vec{B}_2 πρέπει να είναι αντίθετα για να δίνουν $\vec{B}_{ολ} = 0$ στο P . Επειδή το I_1 δίνει \vec{B}_1 προς τα αριστερά, το I_2 πρέπει να έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη για να δώσει \vec{B}_2 προς τα δεξιά.

Εξισώνοντας τα μέτρα των \vec{B}_1 και \vec{B}_2 βρίσκουμε το ρεύμα I_2

$$B_1 = B_2 \Leftrightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \Leftrightarrow I_2 = I_1 \frac{r_2}{r_1} = 6A \frac{0.5m}{1.5m} = 2A$$

β) Το ολικό μαγνητικό πεδίο στο Q είναι

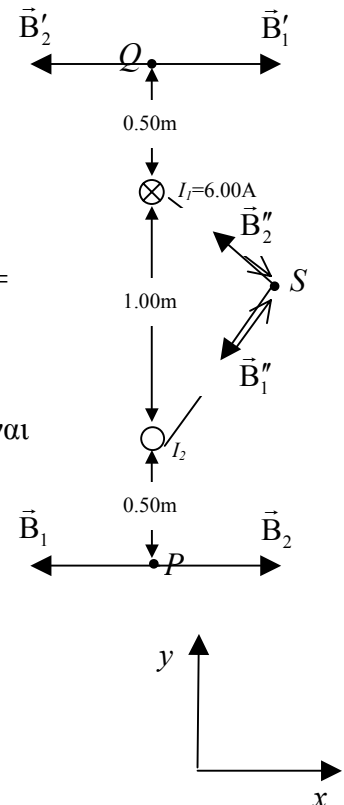
$$\vec{B}'_{ολ} = \vec{B}'_1 + \vec{B}'_2 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \hat{i} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \hat{i} = -2 \cdot 10^{-7} Tm/A \frac{6A}{0.5m} + 2 \cdot 10^{-7} Tm/A \frac{2A}{1.5m} = -2.4 \cdot 10^{-6} \hat{i} T + 0.267 \cdot 10^{-6} \hat{i} T = -2.13 \cdot 10^{-6} \hat{i} T$$

γ) Το τρίγωνο που σχηματίζεται από το σημείο S και τα σημεία A και B είναι ορθογώνιο. Επομένως

$$B''_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = 2 \cdot 10^{-7} Tm/A \frac{6A}{0.6m} = 2 \cdot 10^{-6} T$$

$$B''_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = 2 \cdot 10^{-7} Tm/A \frac{2A}{0.8m} = 5 \cdot 10^{-7} T$$

$$B''_{ολ} = \sqrt{B_1''^2 + B_2''^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-6} T)^2 + (5 \cdot 10^{-7} T)^2} = 2.06 \cdot 10^{-6} T$$



Σημείωση

Όπου σας χρειαστεί θεωρείστε γνωστά τα παρακάτω:

$g=10\text{m/s}^2$	q_e (φορτίο ηλεκτρονίου) $= -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
$\epsilon_0=8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	q_p (φορτίο πρωτονίου) $= 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
$k_{ηλ}=1/4\pi\epsilon_0=9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}$	m_p (μάζα πρωτονίου) $=1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
$\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/Am}$	m_e (μάζα ηλεκτρονίου) $=9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Να απαντηθούν και τα 2 πλήρη θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα ενώ τα ερωτήματα των θεμάτων έχουν ίση συνεισφορά στην βαθμολογία του κάθε θέματος. Υπενθυμίζεται ότι θα πρέπει να συμπληρώσετε το βαθμό 5 σε κάθε εξέταση και ότι ο συνολικός σας βαθμός των γραπτών εξετάσεων θα είναι $0.5 \times (\text{βαθμός Μηχανικής}) + 0.3 \times (\text{βαθμός στα Μαθηματικά}) + 0.2 \times (\text{βαθμός στον Ηλεκτρομαγνητισμό})$.

Καλή Επιτυχία