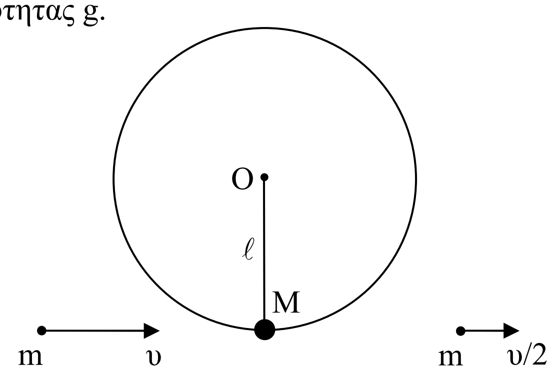
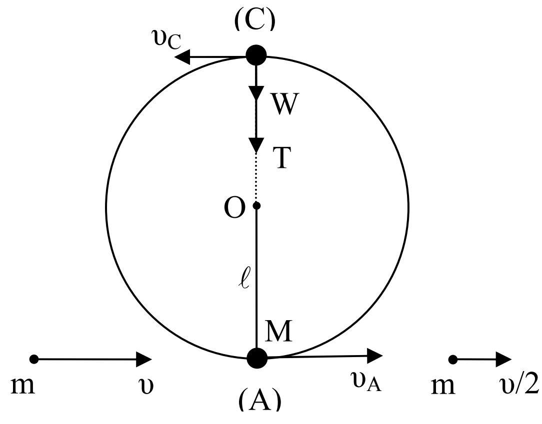
<u>4η εργασία</u>
Ημερομηνία αποστολής: 1 Απριλίου 2007
(Τα θέματα κάθε άσκησης θεωρούνται ισοδύναμα)

Άσκηση 1 (10 μονάδες)

1Α) Ένα βλήμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ διαπερνά τη σφαίρα ενός εκκρεμούς μάζας Μ και διαφεύγει με ταχύτητα υ/2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα του εκκρεμούς κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους ℓ. Ποια η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας υ, ώστε η σφαίρα του εκκρεμούς να διαγράψει πλήρη κύκλο; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Λύση
Έστω υ_A η ταχύτητα που αποκτά η σφαίρα του εκκρεμούς μετά την κρούση. Η σφαίρα του εκκρεμούς κινείται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση του βάρους της W και της τάσης του νήματος T, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς C, η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη, επομένως

$$F_k = Ma_k \Rightarrow W + T = M\frac{\upsilon_C^2}{\ell} \Rightarrow T = M\frac{\upsilon_C^2}{\ell} - Mg \qquad (1)$$

Η ελάχιστη ταχύτητα της μάζας Μ στο σημείο C έτσι ώστε να διαγράψει πλήρη κύκλο είναι όταν T=0. Επομένως από την (1) προκύπτει:

$$\upsilon_C = \sqrt{g\ell} \qquad (2)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τη σφαίρα του εκκρεμούς μεταξύ των θέσεων A και C προκύπτει:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_A^2 + 0 = \frac{1}{2}M\upsilon_C^2 + Mg2\ell \qquad (3)$$

Και με αντικατάσταση της (2) στη (3):

$$\upsilon_A^2 = 5g\ell \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{5g\ell} \qquad (4)$$

Τέλος εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση και αντικαθιστώντας την (4) έχουμε

$$P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon + 0 = M\upsilon_A + \frac{m\upsilon}{2} \Rightarrow \upsilon = \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

1B) Ένα ελατήριο δεν ακολουθεί το νόμο του Hooke αλλά ασκεί μία δύναμη επαναφοράς της μορφής $F_x(x) = -52x - 39x^2$, όταν εκτείνεται ή συμπιέζεται κατά μήκος x (σε m).
(α) Υπολογίστε το ολικό έργο που απαιτείται για να εκταθεί το ελατήριο από τη θέση ισορροπίας x=0 m στη θέση x=1 m.
(β) Είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου διατηρητική; Εξηγήστε.
(γ) Ενώ το ένα άκρο του ελατηρίου είναι σταθερό, στο άλλο άκρο του προσαρτάται αντικείμενο μάζας 2 kg όταν αυτό έχει εκταθεί προς τα δεξιά πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια κατά x=1 m. Αν αφήσουμε ελεύθερο το αντικείμενο από την ηρεμία, υπολογίστε την ταχύτητά του τη στιγμή που το ελατήριο έχει επιστρέψει στη θέση ισορροπίας.

Λύση
(α) Γνωρίζουμε ότι

$$W_{F_x} = \int_{x_1}^{x_2} F_x \mathrm{dx} = -52\int_0^1 x\mathrm{dx} - 39\int_0^1 x^2\mathrm{dx} = -52\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 39\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -39 \text{ J}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το έργο είναι δαπανώμενο.

(β) Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου είναι διατηρητική διότι το έργο που παράγει σε μία κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Πράγματι

$$W_{F_x} = \int_{x_1}^{x_2} F_x \mathrm{dx} = 0, \text{ όταν } x_1 = x_2 .$$

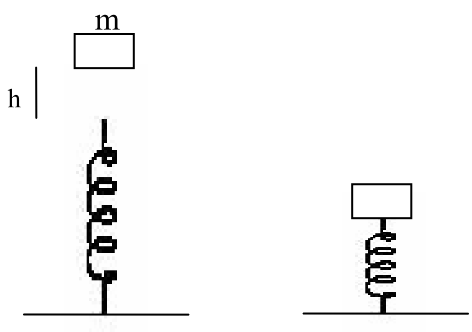
(γ) Γνωρίζουμε ότι

$$W_{F_x} = \int_1^0 F_x \mathrm{dx} = \Delta \mathrm{K} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2 = 39J \Rightarrow \upsilon = 6.24 \text{ m/s}.$$

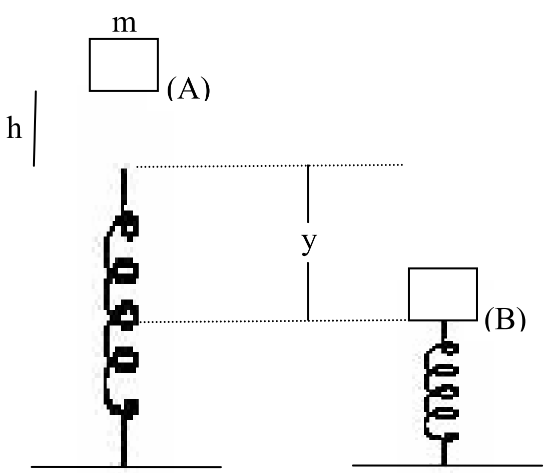
Άσκηση 2 (10 μονάδες)

2Α) Ένα αβαρές ελατήριο είναι στερεωμένο κατακόρυφα στο φυσικό του μήκος με το πάνω άκρο του ελεύθερο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Να υπολογιστεί η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου αγνοώντας τις τριβές. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η σταθερά k του ελατηρίου.

Λύση



Έστω y η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β (βλ. σχήμα) προκύπτει:



$$K_A + V_A = K_B + V_B \Rightarrow 0 + mg(h + y) = 0 + \frac{1}{2} ky^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ky^2 - mg(h+y) = 0 \Rightarrow ky^2 - 2mgy - 2mgh = 0$$

Οι λύσεις της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$y_{1,2} = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 8kmgh}}{2k}$$

όπου δεκτή είναι μόνο η θετική ρίζα, επομένως

$$y = \frac{2mg + \sqrt{4m^2g^2 + 8kmgh}}{2k}$$

2Β) Να δείξετε ότι σε ένα σύστημα όπου δρουν συντηρητικές δυνάμεις και δυνάμεις τριβής, ο ρυθμός μετατροπής της συνολικής μηχανικής ενέργειας είναι ίσος με το γινόμενο της δύναμης τριβής επί την ταχύτητα κίνησης του σώματος, δηλαδή $\frac{d(T+V)}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{\upsilon}$

Λύση
Ας υποθέσουμε ότι σε σώμα ενεργεί η μη συντηρητική δύναμη τριβής *f* καθώς και η συνολική συντηρητική δύναμη *F*. Σε κάποια χρονική στιγμή, η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής του ενέργειας,

$$E(t) = T(t) + V(t)$$

Σε χρόνο dt το σώμα μετατοπίζεται κατά dr και οι δυνάμεις παράγουν έργο

$$dW = (\vec{f} + \vec{F}) \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot d\vec{r} + \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της κινητικής ενέργειας το συνολικό έργο *dW* δίνει τη μεταβολή *dT* της κινητικής ενέργειας.

Επίσης το έργο της συντηρητικής δύναμης είναι αντίθετο της μεταβολής *dV* της δυναμικής ενέργειας. Συνεπώς

$$dT = \vec{f} \cdot d\vec{r} - dV \qquad \text{ή} \qquad d(T+V) = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Εξαιτίας της τριβής η μηχανική ενέργεια του σώματος μειώνεται, ο δε ρυθμός μεταβολής της με το χρόνο είναι

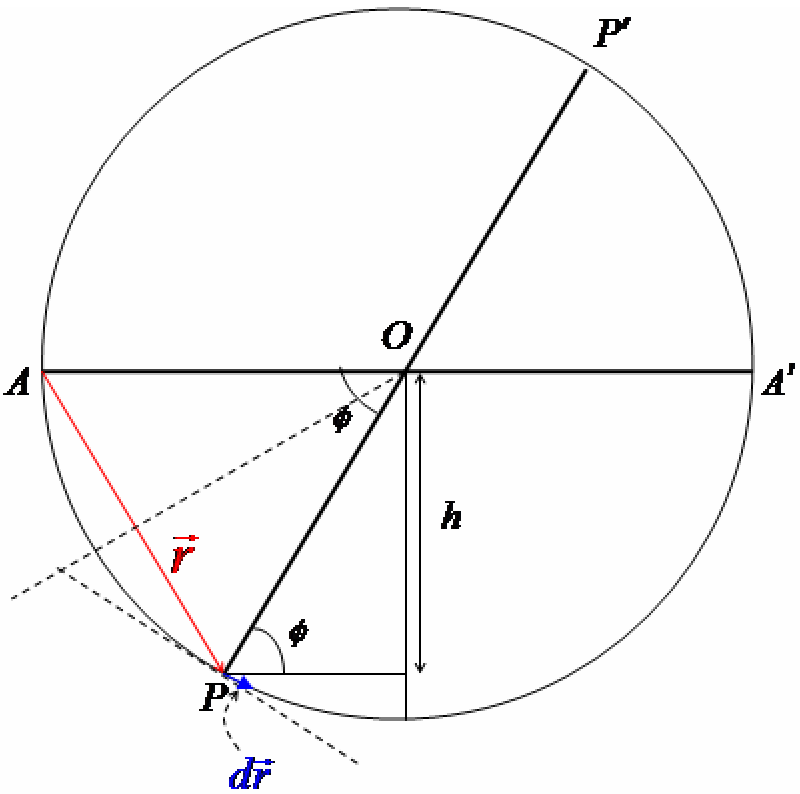
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+V)}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{\upsilon}$$

όπου dE < 0, γιατί τα *f, υ* έχουν αντίθετη φορά.

Άσκηση 3 (10 μονάδες)

3Α) Ένα σώμα σημειακών διαστάσεων μάζας m=0.1 kg μπορεί να γλιστράει χωρίς τριβή πάνω στην περιφέρεια ενός κατακόρυφου κύκλου που έχει ακτίνα R=1 m. Το σώμα έλκεται με δύναμη ανάλογη προς την απόστασή του από το κέντρο έλξης (με σταθερά αναλογίας k=1.2 Nm^{-1}). Το κέντρο αυτό βρίσκεται στη μία άκρη της οριζόντιας διαμέτρου του κύκλου. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του σώματος και να γίνει η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας. (g = 9.8 ms^{-2})

Λύση



Το σώμα μάζας m βρίσκεται μέσα σε δύο πεδία δυνάμεων, το πεδίο της βαρύτητας και το πεδίο που οφείλεται στο ελκτικό κέντρο A. Θεωρούμε σαν στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας και για τα δύο πεδία την AA'.
Έστω ότι το σώμα βρίσκεται στο σημείο P.

Η δυναμική ενέργεια του σώματος εξαιτίας του πεδίου βαρύτητας είναι

$V_1 = mgh = -mgR\sin\phi$ (1)

Η πρόσθετη δύναμη που ασκείται στο σώμα έχει τη μορφή $\vec{F} = -k\vec{r}$. Η δύναμη αυτή είναι συντηρητική οπότε θα ισχύει :

$$V_2 = \int_{AP} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -k \int_{AP} \vec{r} \bullet d\vec{r} \quad (2)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος για μια τυχαία θέση του διανύσματος $\vec{r}$ σε γωνία θ (εσωτερικά της φ) παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις :

$$r = 2R\sin(\theta/2), \quad dr = Rd\theta, \quad \cos(\vec{r}, d\vec{r}) = -\cos(\theta/2) \ (3)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (3) στη (2) καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα :

$$V_2 = kR^2 \int_0^{\phi} \sin\theta d\theta = ... = 2kR^2 \sin^2(\phi/2) \ \ (4)$$

Οπότε, η συνολική δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση :

$$V = V_1 + V_2 = \text{-}mgR\sin\phi \ + \ 2kR^2\sin^2(\phi/2)$$

Για τις θέσεις ισορροπίας η V παίρνει ακρότατες τιμές.

$$\frac{dV}{d\phi} = -mgR\cos\phi + 2kR^2\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = -mgR\cos\phi + kR^2\sin\phi$$

Για $\frac{dV}{d\phi} = 0$ βρίσκουμε

$$\tan\phi = \frac{mg}{kR} = \frac{0.1 \cdot 9.8}{1.2 \cdot 1} = 0.82$$

Απ' όπου προκύπτει $\phi_1 = 39.24^o$ και $\phi_2 = 219.24^o$

Η δεύτερη παράγωγος της V είναι

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = mgR\sin\phi + kR^2\cos\phi = 0.98\sin\phi + 1.2\cos\phi$$

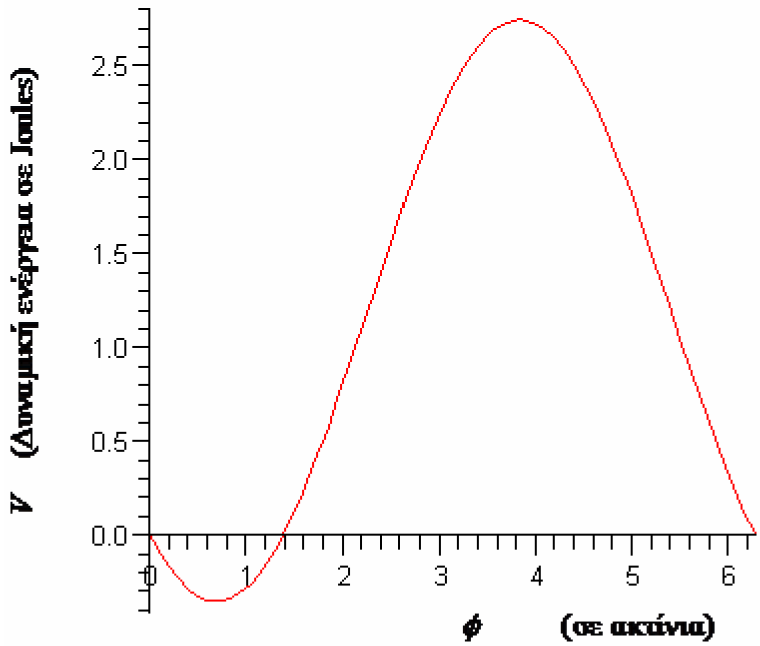
Για $\phi_1 = 39.24^o$ είναι $\frac{dV^2}{d\phi^2} = 1.55 > 0$

Άρα ελάχιστο (θέση P ευσταθούς ισορροπίας)

Για $\phi_2 = 219.24^o$ είναι $\frac{dV^2}{d\phi^2} = -1.55 < 0$

Άρα μέγιστο (θέση P' ασταθούς ισορροπίας)

Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας δίνεται στο ακόλουθο γράφημα.



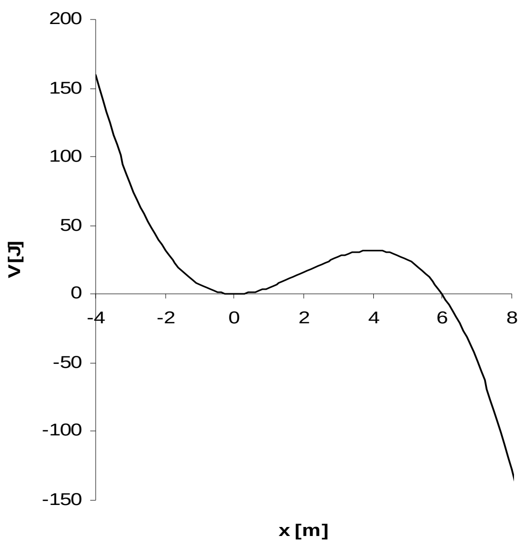
3Β) Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση $V(x) = 6x^2 - x^3$ (x σε m).

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα της $V(x)$.

(β) Ποια είναι η φορά της δύναμης που ασκείται πάνω στο σωματίδιο σε κατάλληλα διαστήματα της μεταβλητής x;

(γ) Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας σε κάθε θέση.

Λύση :



(β) Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο δίνεται από τη σχέση:

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dx}} = -12x + 3x^2 \Rightarrow \vec{F} = (3x^2 - 12x)\hat{\mathrm{i}}$$

Επομένως η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο έχει φορά αντίθετη από τη φορά του άξονα x στο διάστημα $0 < x < 4$, ενώ έχει τη φορά του άξονα x για οποιαδήποτε άλλη τιμή της μεταβλητής *x*.

(γ) Οι πιθανές θέσεις ισορροπίας είναι εκείνες για τις οποίες

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dx}} = -12x + 3x^2 = 0$$

Άρα υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις, για *x*=0 και *x*=4. Για το χαρακτηρισμό των θέσεων αυτών ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της $V(x)$.

$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{dx}^2} = 12 - 6x$ και για *x*=0 $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{dx}^2} = 12 > 0$. Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και επομένως η θέση *x*=0 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Για *x*=4, $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{dx}^2} = -12 < 0$. Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και επομένως η θέση *x*=4 είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

4Α) Πάνω σε ένα σωματίδιο εξασκείται η δύναμη : $\vec{F} = \left(y^2 - x^2\right)\hat{i} + 3xy\hat{j}$. Να βρεθεί το έργο που παράγεται όταν το σωματίδιο μετατοπίζεται από το σημείο (0,0) στο σημείο (2,4) πάνω σε καθεμιά από τις παρακάτω τροχιές:

1) πάνω στον άξονα x , από το σημείο (0,0) ως το σημείο (2,0) και στη συνέχεια παράλληλα με τον άξονα y έως το σημείο (2,4).

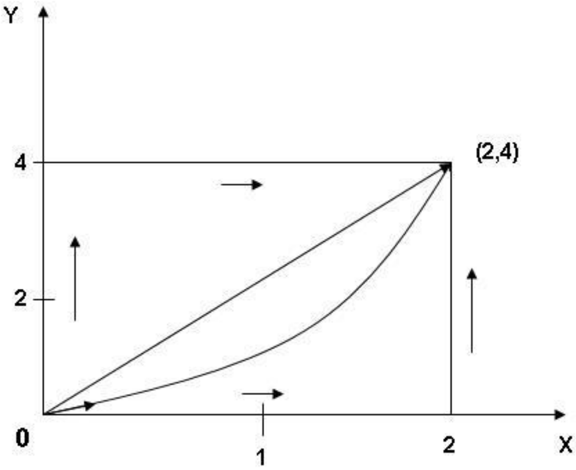
2) πάνω στον άξονα y από το σημείο (0,0) έως το σημείο (0,4) και στη συνέχεια παράλληλα με τον άξονα x έως το σημείο (2,4)

3) πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημεία (0,0) και (2,4)

4) πάνω στην παραβολή $y = x^2$.

Είναι η δύναμη διατηρητική;

Λύση:



Το στοιχειώδες έργο dW που παράγεται από τη δύναμη $\vec{F} = \left(y^2 - x^2\right)\hat{i} + 3xy\hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σωματιδίου κατά $d\vec{r}$ είναι:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \left(y^2 - x^2\right)dx + 3xydy \qquad (1)$$

1) Κατά τη μετατόπιση του σωματιδίου πάνω στον άξονα x είναι dy=0 και η εξίσωση (1) απλοποιείται:

$$dW_x = F_x dx = \left(y^2 - x^2\right)dx$$

Και συνεπώς το έργο θα είναι:

$$W_x = \int_{x=0}^{x=2}\left(y^2 - x^2\right)dx = \int_{x=0}^{x=2}\left(-x^2\right)dx \Rightarrow W_x = -\frac{8}{3}J \qquad (2)$$

Κατά τη μετατόπιση από το σημείο (2,0) μέχρι το σημείο (2,4) παράλληλα με τον άξονα y η εξίσωση (1) γίνεται:

$$dW_y = F_y dy = 3xydy = 6ydy$$

Και συνεπώς το έργο είναι:

$$W_y = 6\int_{y=0}^{y=4} ydy \Rightarrow W_y = 48J \qquad (3)$$

Άρα το ολικό έργο κατά τη διαδρομή (Α) είναι:

$$W = W_x + W_y = -\frac{8}{3} + 48 = 45.33J$$

2) Το έργο κατά τη μετατόπιση από το σημείο (0,0) έως το σημείο (0,4) πάνω στον άξονα y είναι:

$W_y = \int_{y=0}^{y=4} F_y dy = \int_{y=0}^{y=4} 3xydy = 0$ (διότι x=0)

Ενώ το έργο κατά τη μετατόπιση από το σημείο (0,4) έως το σημείο (2,4) παράλληλα με τον άξονα x είναι :

$$W_x = \int_{x=0}^{x=2} F_x dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(y^2 - x^2\right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(y^2 - x^2\right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(4^2 - x^2\right) dx = 29.33\ J$$

Άρα, το ολικό έργο κατά τη διαδρομή Β είναι 29.33 J

3) Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση γίνεται πάνω στην ευθεία y=2x. Επομένως το έργο είναι:

$$W = \int dW = \int \left(F_x dx + F_y dy\right) = \int \left(3x^2 dx + \frac{3}{2} y^2 dy\right) = 3\int_{x=0}^{x=2} x^2 dx + \frac{3}{2}\int_{y=0}^{y=4} y^2 dy = 40\ J$$

4) Το στοιχειώδες έργο κατά τη μετατόπιση πάνω στην παραβολή $y = x^2$ είναι:

$$dW = F_x dx + F_y dy = \left(y^2 - x^2\right) dx + 3xy dy = \left(x^4 - x^2\right) dx + 3y^{3/2} dy$$

Άρα το ολικό έργο είναι:

$$W = \int_{x=0}^{x=2} \left(x^4 - x^2\right) dx + 3\int_{y=0}^{y=4} y^{3/2} dy = 42.13\ J$$

Παρατηρούμε ότι το έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση του σωματιδίου μεταξύ των σημείων (0,0) και (2,4) εξαρτάται από τη διαδρομή. Συνεπώς η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο είναι μη-διατηρητική.

4B) Σώμα μάζας 5 kg βάλλεται προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση 37° ως προς το οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητα 14 m/s. Το σώμα αφού διανύσει απόσταση 10 m κατά μήκος του επιπέδου σταματάει και αρχίζει να γλιστράει προς τα κάτω φτάνοντας στο αρχικό σημείο. Με ποια ταχύτητα φτάνει στο αρχικό σημείο.

Λύση:

Έστω Α το αρχικό σημείο και Β το υψηλότερο σημείο όπου φτάνει το σώμα.
Η μηχανική ενέργεια στο σημείο Α είναι:

$$E_A = \left(K_A + U_A\right) = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + 0 = \frac{1}{2} \times 5 \times (14)^2 \left(kg \times \frac{m^2}{s^2}\right) = 490J$$

Αντίστοιχα στο σημείο Β:

$$E_B = \left(K_B + U_B\right) = 0 + mgh = mgs\sin(37^o) = 5 \times 9.81 \times 10 \sin(37^o)\left(kg \times \frac{m^2}{s^2}\right) = 295J$$

Η διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής μηχανικής ενέργειας είναι το έργο της δύναμης τριβής $W_f \equiv E_A - E_B = 195J$. Το ίδιο έργο θα καταναλώσει η δύναμη τριβής και κατά τη διαδρομή επιστροφής.
Έστω υ_1 η ταχύτητα επιστροφής του σώματος στο Α. Από το ισοζύγιο ενεργειών έχουμε :

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + U_A = E_B - W_f$$

$$2.5(kg)\upsilon_1^2 + 0 = 295(J) - 195(J)$$

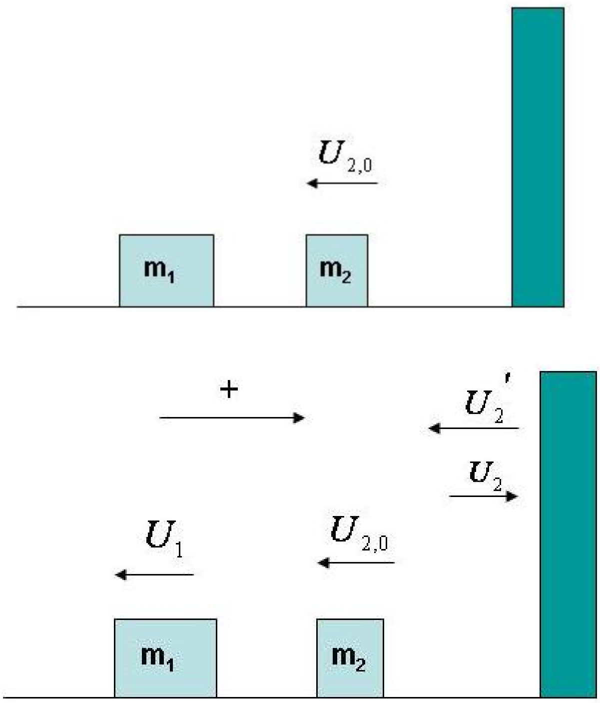
$$\upsilon_1^2 = 40\left(\frac{J}{kg}\right)$$

$$\upsilon_1 = 6.3\left(\frac{m}{s}\right)$$

Άσκηση 5 (10 μονάδες)

5A) Σώμα μάζας $m_1 = 100\ kg$ ακινητεί σε ένα χωρίς τριβή οριζόντιο επίπεδο που καταλήγει σε ένα τοίχο. Ένα άλλο σώμα μάζας m_2 κινείται με ταχύτητα $U_{2,0}$ όπως στο σχήμα. Υποθέτοντας ότι όλες οι κρούσεις είναι ελαστικές και ότι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι συγγραμμικά διανύσματα, βρείτε την τιμή της m_2 για την οποία και τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα μετά την κρούση του m_2 πρώτα με το m_1 και μετά με τον τοίχο.

Λύση:



Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των δύο σωμάτων έχουν μηδενική συνισταμένη και συνεπώς η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή:

$$m_1U_{1,0} + m_2U_{2,0} = m_1U_1 + m_2U_2 \Rightarrow m_2U_{2,0} = m_1U_1 + m_2U_2 \quad (1)$$

οπου $U_{1,0}$, $U_{2,0}$ είναι οι πριν την κρούση ταχύτητες των σωμάτων m_1 και m_2 αντιστοίχως, και U_1 , U_2 οι ταχύτητές τους μετά την κρούση τους (βλ. σχήμα). Επειδή η κρούση είναι ελαστική και οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι συγγραμμικά διανύσματα, οι παραπάνω ταχύτητες συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση (βλ. «Εισαγωγική Φυσική –Κλασσική Μηχανική Τόμος Β-Μέρος Β, σχέση 3.47 σελ. 58) :

$$U_1 = U_2 + U_{2,0} \qquad (2)$$

όπου οι U_1 και $U_{2,0}$ είναι αρνητικές ποσότητες και η U_2 θετική, σύμφωνα με το σχήμα.

Έστω U_2' η ταχύτητα του σώματος m_2 μετά την κρούση του με τον τοίχο. Είναι:

$$U_2 = -U_2' \qquad (3)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης :

$$U_1 = U_2' \qquad (4)$$

Συνδυασμός των εξισώσεων (2),(3) και (4) οδηγεί στις σχέσεις:

$$U_2 = \frac{-U_{2,0}}{2}$$

$$U_1 = \frac{U_{2,0}}{2}$$

Αντικατάσταση των τιμών των παραπάνω ταχυτήτων στη σχέση (1) δίνει τελικά:

$$m_2 = \frac{m_1}{3} = 33.3kg$$

5Β) Σφαίρα μάζας m και ταχύτητας υ σφηνώνεται πάνω σε κομμάτι συμπαγούς ξύλου μάζας M που αρχικά βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας πάνω σε μακρύ τραπέζι με συντελεστή τριβής ολισθήσεως μ. Τι απόσταση s θα διανύσει πάνω στο τραπέζι το κομμάτι του ξύλου με τη σφαίρα ; Θεωρείστε ότι η σφαίρα σταματά ακαριαία.

Λύση:

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για ένα απειροστό διάστημα αμέσως μετά το σφήνωμα της σφαίρας στο ξύλο. Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα ξύλου και σφαίρας αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα υ_0' έχουμε :

$$\upsilon_0' = \frac{\upsilon m}{M+m} \qquad (1)$$

Η κίνηση του συστήματος προκαλεί την εμφάνιση της τριβής ολίσθησης f_k η οποία δίνεται από τη σχέση :

$$f_k = f\mu N = \mu\left(\mathrm{M}+m\right)g \quad (2)$$

Η δύναμη αυτή προκαλεί μια σταθερή επιβράδυνση $a = \mu g$ στο σύστημα που μειώνει την ταχύτητα.

Αν θεωρήσουμε ως αρχή χρόνου $t=0$ τη στιγμή της σύγκρουσης η ταχύτητα του συστήματος για κάθε μεταγενέστερη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση :

$$\upsilon'(t) = \upsilon'_0 - \mu g t \qquad (3)$$

Όταν το σύστημα σταματήσει $\left(\upsilon'(t)=0\right)$ θα έχει παρέλθει χρόνος :

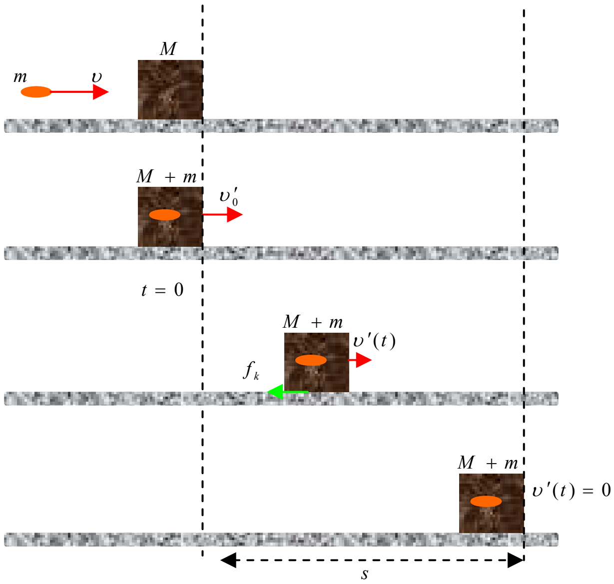
$$t = \frac{\upsilon'_0}{\mu g} \qquad (4)$$

Η απόσταση που θα διανύσει το σύστημα δίνεται από τη σχέση :

$$x(t) = \upsilon'_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) τις τιμές του υ'_0 και του t από τις (1),(4) παίρνουμε για τη συνολική απόσταση s:

$$s = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{\upsilon^2}{2\mu g} \qquad (6)$$



Εναλλακτικά μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα με ενεργειακή προσέγγιση ως ακολούθως :

Σύμφωνα με την ΑΔΕ για την αρχική και τελική θέση του σώματος όπου και σταματά: $\frac{1}{2}(m+M)\upsilon_0'^2 = f_k s \Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)\upsilon_0'^2 = \mu(m+M)gs \Rightarrow s = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0'^2}{\mu g} \quad (1')$

Με αντικατάσταση της (1) στην $(1')$ προκύπτει $\quad s = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{\upsilon^2}{2\mu g}$

Άσκηση 6 (10 μονάδες)

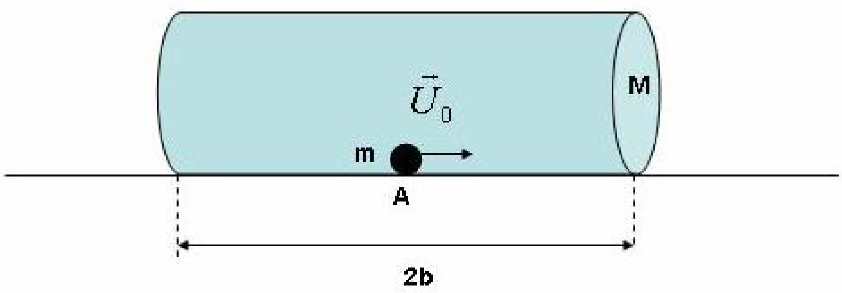
Σωματίδιο μάζας m κείται στο μέσον Α ενός σωλήνα μήκους 2b και μάζας Μ. Ο σωλήνας, που είναι κλειστός στα δύο του άκρα, κείται πάνω σε λείο τραπέζι. Ο συντελεστής αποκατάστασης μεταξύ των σωμάτων m και Μ είναι e. Έστω ότι το m έχει αρχική ταχύτητα $\vec{U}_o$ κατά τον άξονα του σωλήνα.

α) Να βρεθούν οι ταχύτητες των m και Μ κατά την πρώτη κρούση.

β) Να βρεθεί η απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια της πρώτης κρούσης

γ) Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται έτσι ώστε το σωματίδιο m να φτάσει πάλι στο σημείο Α κινούμενο κατά την αρχική του φορά

Σημείωση: Στην κεντρική κρούση δύο σωμάτων οι σχετικές ταχύτητες τους πριν και μετά την κρούση πληρούν την εξίσωση: $\vec{U}_1 - \vec{U}_2 = -e\left(\vec{U}_{1,0} - \vec{U}_{2,0}\right)$, όπου e είναι ένας συντελεστής (αποκατάστασης) με τιμές μεταξύ του μηδενός (πλαστική κρούση) και της μονάδος (τελείως ελαστική κρούση).



Λύση:

α)Έστω U_o' και V' οι ταχύτητες των m και Μ αντίστοιχα μετά την πρώτη κρούση. Από την αρχή διατήρησης ορμής θα ισχύει:

$$mU_o = mU_o' + MV' \quad (1)$$

Επίσης ο συντελεστής αποκατάστασης e θα είναι:

$$e = -\frac{\left(U_o' - V'\right)}{U_o} \quad (2)$$

Εκ των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει

$$U_o' = \frac{m - eM}{m + M} U_0 \quad \text{και} \quad V' = \frac{m}{m + M}(1 + e)U_0 \quad (3)$$

β) Εάν T' είναι η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την πρώτη κρούση θα είναι (αντικαθιστώντας τις τιμές των U_o' και V' όπως εκφράζονται από τις εξισώσεις (3) :

$$T' = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mU_0'^2 = \frac{mU_o^2}{2(m+M)^2}\left[m^2 + mM\left(1+e^2\right) + e^2M^2\right]$$

Επομένως η μεταβολή ΔΤ της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της πρώτης κρούσης θα ισούται με:

$$\Delta T = T' - T = T' - \frac{1}{2}mU_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)}\left(1-e^2\right)U_0^2$$

γ) Όπως προκύπτει από την εξίσωση (2), οι σχετικές ταχύτητες του m ως προς το M πριν και μετά την πρώτη κρούση θα είναι U_0 και $-eU_0$ αντίστοιχα. Εντελώς ανάλογα η σχετική ταχύτητα μετά τη δεύτερη κρούση θα είναι: e^2U_0. Επομένως, ο ολικός χρόνος που απαιτείται ώστε το m να βρεθεί πάλι στο σημείο Α κινούμενο κατά την αρχική του φορά είναι:

$$t = \frac{b}{U_0} + \frac{2b}{eU_0} + \frac{b}{e^2U_0} = \frac{b}{U_0}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$$

Άσκηση 7 (10 μονάδες) :

Υποθέστε ότι σε ένα στάσιμο σύννεφο υδρατμών δημιουργούνται κατάλληλες συνθήκες για να σχηματιστεί μια σταγόνα βροχής. Η σταγόνα ξεκινά από αρχική κατάσταση με μάζα $m_0=0$ και ταχύτητα $\upsilon_0=0$. Κάνουμε την παραδοχή ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και ότι η σταγόνα πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση α. Υποθέτουμε ότι στην πορεία της η μάζα της σταγόνας αυξάνει (καθώς οι υδρατμοί υγροποιούνται πάνω της) αναλόγως της απόστασης που έχει διανύσει ($m=kx$, $k>0$: σταθερά).
α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση α καθώς και η ταχύτητα, απόσταση και μάζα της σταγόνας μετά χρόνο t από την έναρξη του φαινομένου.
β) Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια της σταγόνας E_κ συνδέεται με το έργο που παράγεται από το πεδίο βαρύτητας W_g με τη σχέση $E_k = \frac{2}{3}W_g$ και δώστε μια ποιοτική ερμηνεία για τη σχέση αυτή.

Λύση :
(α) Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη μορφή

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\upsilon)}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

Η συνολική δύναμη όμως ισούται με τη δύναμη βαρύτητας , $F = mg$ οπότε η (1) γράφεται :

$$mg = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \quad (2)$$

Από τη σχέση $m = kx$ παίρνουμε $\frac{dm}{dt} = k\frac{dx}{dt} = k\upsilon$ και η (2) γίνεται :

$$xg = x\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon^2 \qquad (3)$$

Αφού η σταγόνα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση εκκινώντας από την ηρεμία θα έχουμε :

$$\upsilon(t) = at, \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (3) παίρνουμε από την (4) :

$$a = g/3 \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας από τη (5) στις (4) παίρνουμε :

$$\upsilon(t) = \frac{g}{3}t, \quad x(t) = \frac{g}{6}t^2 \qquad (6)$$

Από τη σχέση $m = kx$ παίρνουμε : $m(t) = \dfrac{kg}{6}t^2$

β) Το έργο που παράγεται από το πεδίο βαρύτητας στη διαδρομή *x(t)* είναι

$$W_g = \int_0^{x(t)} Fdx = g\int_0^{x(t)} mdx = kg\int_0^{x(t)} xdx = \frac{1}{2}kgx^2(t) \qquad (7)$$

Η κινητική ενέργεια της σταγόνας τη χρονική στιγμή t είναι :

$$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2(t) = \frac{1}{2}kx\left(\frac{g}{3}t\right)^2 = \frac{1}{3}kgx\left(\frac{1}{6}gt^2\right) = \frac{1}{3}kgx^2(t) = \frac{2}{3}W_g \qquad (8)$$

Κατά την κίνηση δεν μετασχηματίζεται όλη η δυναμική ενέργεια σε κινητική ενέργεια της σταγόνας γιατί ένα τμήμα αυτής καταναλίσκεται σε ανελαστικές συγκρούσεις της σταγόνας καθώς αυτή κινείται διαμέσου του σύννεφου των υδρατμών.

Παρατήρηση : Το πρόβλημα εντάσσεται σ’ εκείνη την κατηγορία φαινομένων όπου η μάζα μεταβάλλεται ως $m = \lambda t^{n-1}$ (όπου λ σταθερά) . Με αντικατάσταση του m στην (2) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για το υ: $\dfrac{d\upsilon}{dt} + (n-1)\dfrac{\upsilon}{t} - g = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει λύση την $\upsilon(t) = \dfrac{gt}{n}$.Από αυτή παίρνουμε τη σταθερή επιτάχυνση $a = \dfrac{g}{n}$.
Στην προκείμενη περίπτωση n=3.
Ο φυσικός λόγος της σταθερής επιτάχυνσης είναι η γραμμική εξάρτηση της πρόσθετης δύναμης από τη μάζα του σώματος. Από τη σχέση $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = mg - \upsilon\dfrac{dm}{dt}$

,παρατηρούμε ότι η ολική δύναμη $F_a \equiv m\frac{d\upsilon}{dt} = ma$, προκύπτει από το συνδυασμό της βαρύτητας και μιας επιβραδυντικής δύναμης, $F_\varepsilon = \upsilon\frac{dm}{dt} = ... = \frac{n-1}{n}mg$. Η ολική δύναμη F_a είναι και αυτή γραμμικός συνδυασμός της μάζας $F_a = mg - \frac{n-1}{n}mg = m\frac{g}{n}$, από όπου προκύπτει σταθερή επιτάχυνση $a = \frac{g}{n}$.

Άσκηση 8 (10 μονάδες) :

8Α) Σωματίδιο μάζας m_1 και ταχύτητας υ_1 συγκρούεται μετωπικά με σωματίδιο μάζας m_2 το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία $(\upsilon_2 = 0)$. Η σύγκρουση είναι πλαστική.

α) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων πριν την κρούση, μετά την κρούση καθώς και το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετασχηματίστηκε σε θερμότητα.

β) Υποθέστε ότι κάποιος παρατηρητής είναι ακίνητος πάνω στο κέντρο μάζας του συστήματος των δύο σωματιδίων. Υπολογίστε την ορμή που μετρά για κάθε σωματίδιο ο παρατηρητής και σχολιάστε το αποτέλεσμα. Ακολούθως υπολογίστε τις τιμές που εξάγει για τις αντίστοιχες ποσότητες του ερωτήματος α). Είναι τα ποσοστά μηχανικής ενέργειας που μετασχηματίζονται σε θερμότητα τα ίδια ;

Λύση:

α) Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$\mathrm{E}_{\kappa,\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}m_2 0} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \quad (1)$$

Μετά τη κρούση τα δύω σωματίδια κινούνται μαζί με ταχύτητα υ την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε από την αρχή διατήρησης ορμής :

$$m_1\upsilon_1 + \cancel{m_2 0} = (m_1 + m_2)\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2)$$

Η κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι :

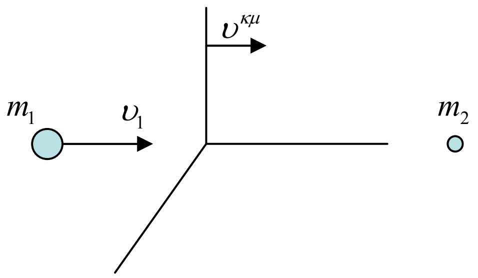
$$\mathrm{E}_{\kappa,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\upsilon_1^2 \quad (3)$$

Το ποσοστό Q της αρχικής ενέργειας που μετασχηματίστηκε σε θερμότητα δίνεται από σχέση :

$$Q = \frac{E_{\kappa,\pi\rho\iota\nu} - E_{\kappa,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{E_{\kappa,\pi\rho\iota\nu}} = ... = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

β) Έστω $\upsilon^{\kappa\mu}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Από τη σχέση (3.13) το βιβλίου έχουμε ότι

$$(m_1+m_2)\upsilon^{\kappa\mu}=m_1\upsilon_1+\cancel{m_2 0}\Rightarrow \upsilon^{\kappa\mu}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (5)$$



Η ταχύτητα που μετρά για το σωματίδιο 1 ακίνητος παρατηρητής πάνω στο κέντρο μάζας είναι $\upsilon_1^{\kappa\mu}=\upsilon_1-\upsilon^{\kappa\mu}$ και για το σωματίδιο 2 $\upsilon_2^{\kappa\mu}=\upsilon_2-\upsilon^{\kappa\mu}=0-\upsilon^{\kappa\mu}=-\upsilon^{\kappa\mu}$. Οπότε οι ορμές στο σύστημα κέντρου μάζας είναι :

$$p_1^{\kappa\mu}=m_1\upsilon_1^{\kappa\mu}=m_1(\upsilon_1-\upsilon^{\kappa\mu})=...=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (6)$$

και
$$p_2^{\kappa\mu}=m_2\upsilon_2^{\kappa\mu}=-m_2\upsilon^{\kappa\mu}=-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=-p_1^{\kappa\mu} \quad (7)$$

παρατηρούμε ότι στο σύστημα κέντρου βάρους ο παρατηρητής μετρά δύο ίσες κατά μέτρο και αντίθετες κατά φορά ορμές.

Η κινητική ενέργεια που μετρά πριν την κρούση είναι :

$$\mathrm{E}_{\kappa,\pi\rho\iota\nu}^{\kappa\mu}=\frac{1}{2}m_1\left(\upsilon_1^{\kappa\mu}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\upsilon_2^{\kappa\mu}\right)^2 \quad (8)$$

Μετά την κρούση ο παρατηρητής βλέπει τα δύο σωματίδια να κινούνται μαζί με ταχύτητα υ' οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημά του παίρνει λόγω των (6),(7):

$$p_1^{\kappa\mu}+p_2^{\kappa\mu}=(m_1+m_2)\upsilon'\Rightarrow p_1^{\kappa\mu}-p_1^{\kappa\mu}=(m_1+m_2)\upsilon'\Rightarrow \upsilon'=0 \quad (9)$$

Άρα στο σύστημα κέντρου μάζας το συσσωμάτωμα των δύο σωματιδίων που προκύπτει από την πλαστική κρούση τους είναι ακίνητο και η κινητική του ενέργεια μηδενική. Έτσι ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ότι το 100% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατράπηκε σε θερμότητα.

8Β) Πύραυλος μαζί με τα καύσιμά του έχει βάρος 80000 Ν και εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Ο πύραυλος εκτοξεύει αέρια με ρυθμό μ=65 kg/s και ταχύτητα υ=3000 m/s ως προς αυτόν. Τα καύσιμα εξαντλούνται μετά από 60 s. Να αποδειχθεί ότι η δύναμη που ασκείται στον πύραυλο από τα αέρια δίνεται από τη σχέση F=μυ. Να βρεθεί η αρχική κατακόρυφη επιτάχυνση και η επιτάχυνση στο τέλος των 30 s και 60 s. ($g=10\ m/s^2$)

Λύση:

Η δύναμη που ασκείται στον πύραυλο είναι αντίδραση στην δύναμη που αναπτύσσουν τα αέρια που εκτοξεύονται από το πίσω μέρος και ισούται με τη μεταβολή της ορμής των αερίων.

Η μεταβολή

Η μάζα αερίου m με σχετική ταχύτητα υ αποκτά ορμή mυ. Σε χρόνο Δt λόγω της μεταβολής της ορμής των αερίων που διαφεύγουν ($\Delta p = \upsilon \Delta m$), αναπτύσσεται δύναμη

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon = \mu\upsilon$$

Η δύναμη που ασκείται στον πύραυλο λόγω εκτόξευσης των αερίων είναι

$$F = \mu\upsilon = 65(kg/s)3000(m/s) = 195000N \quad (1)$$

Η δύναμη είναι αντίθετη του βάρους που αρχικά είναι 80000 N.
στα 30 s η μάζα του συστήματος θα είναι αυτή που μένει αν από το συνολικό αρχικό βάρος αφαιρέσουμε την απώλεια καυσίμων , δηλ. :

$$80000\ \mathrm{N} - 65\left(\frac{kg}{s}\right) \times 10\left(\frac{m}{s^2}\right) \times 30(s) = 60500\ N \quad (2)$$

Αντίστοιχα στα 60 s:

$$80000\ \mathrm{N} - 65\left(\frac{kg}{s}\right) \times 10\left(\frac{m}{s^2}\right) \times 60(s) = 41000\ N \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) υπολογίζουμε τη συνολική δύναμη που ασκείται στον πύραυλο στις τρεις χρονικές στιγμές.

$$\begin{aligned} 0\ s:&\quad F_0 = 195000N - 80000N = 115000N \\ 30\ s:&\quad F_{30} = 195000N - 60500N = 134500N \qquad (4) \\ 60\ s:&\quad F_{60} = 195000N - 41000N = 154000N \end{aligned}$$

Για τη μεταβλητή αυτή δύναμη F, ισχύει κάθε στιγμή η σχέση

$$F_t = ma \qquad (5)$$

Όπου m είναι η μάζα και α η επιτάχυνση στη στιγμή που αναφερόμαστε. Ισχύει όμως και η σχέση

$$B = mg \qquad (6)$$

Από τις (5),(6) παίρνουμε :

$$a = \frac{F_t}{B} g \qquad (7)$$

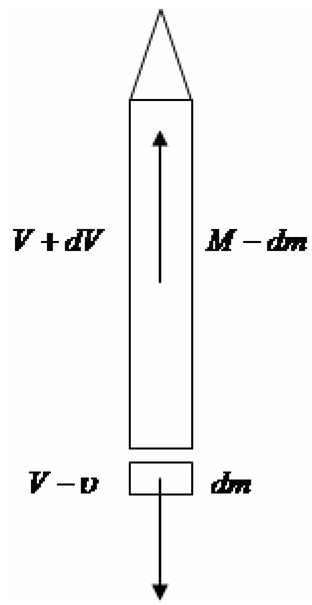
Από τις σχέσεις (4) βρίσκουμε το λόγο της συνολικής δύναμης προς το βάρος στους χρόνους 0 s, 30 s, 60 s και αντικαθιστώντας στην (7) παίρνουμε τις σχετικές επιταχύνσεις:

$$0\,s: \quad \alpha_0 = 1.44g$$

$$30\,s: \quad \alpha_{30} = 2.22g$$

$$60\,s: \quad \alpha_{60} = 3.76g$$

Παρατήρηση : Μια πιο αυστηρή απόδειξη των σχέσεων που χρησιμοποιούνται στην επίλυση του προβλήματος έχει ως ακολούθως :



Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια χρονική στιγμή t το σύστημα έχει ταχύτητα V και συνολική μάζα M. Αν εντός ενός απειροστού χρονικού διαστήματος dt εκτοξευτεί μάζα dm αερίων, μπορούμε να γράψουμε για τις ορμές του συστήματος πριν και μετά το dt :

$$P_t = MV \quad (1')$$

$$P_{t+dt} = \left(M - dM\right)(V + dV) + (V - \upsilon)dm \quad (2')$$

Από τις $(1')$ και $(2')$ παίρνουμε , αφού παραλείψουμε τα διαφορικά δεύτερης τάξης, για την μεταβολή ορμής του συστήματος

$$dP = P_{t+dt} - P_t = \; MdV \text{ - } \upsilon dm \;\; (3')$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$a(t) = \frac{dV}{dt} \text{ και } dm = \mu dt \;\; (4')$$

για την επιτάχυνση του πυραύλου και την μεταβολή των καυσίμων, παίρνουμε :

$$dP = \left(Ma - \mu\upsilon\right)dt \;\; (5')$$

Το dP/dt όμως στην σχέση αυτή μας δίνει την εξωτερική δύναμη $B = -Mg$ στο σύστημα. Έτσι από την σχέση $(4')$ παίρνουμε :

$$F_t \equiv Ma = -Mg + \mu\upsilon \;\; (6')$$

Η $(6')$ μπορεί να γραφεί επίσης με τη μορφή :

$$a = \frac{F_t}{M} = \frac{F_t}{B/g} = \frac{F_t}{B}g \quad (7')$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης ορμής για τη στοιχειώδη μάζα των αερίων παίρνουμε :

$$dp = (V - \upsilon)dm - Vdm = -\upsilon dm = -\upsilon\mu dt \Rightarrow F \equiv \frac{dp}{dt} = -\upsilon\mu$$

Τα αέρια ασκούν μια ίση και αντίθετη δύναμη στον πύραυλο.

Άσκηση 9 (10 μονάδες) :

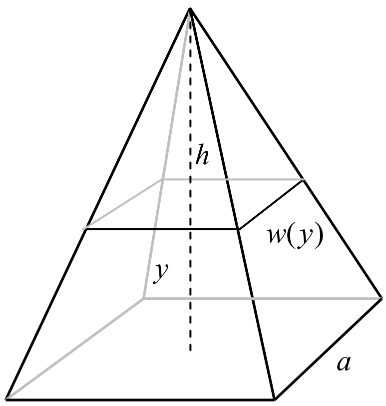
Όταν κατασκευάστηκε η Μεγάλη Πυραμίδα της Γίζας είχε ύψος $h = 150m$ και τετράγωνη βάση πλευράς $a = 230m$. Πρόκειται για μια συμπαγή κατασκευή από πέτρα πυκνότητας $\rho = 2.5gr/cm^3$ $\left(g = 9.81\dfrac{m}{s^2}\right)$.

α) Ποιό είναι το ελάχιστο έργο που απαιτήθηκε για να αναγερθεί η πυραμίδα ;

β) Ο Ηρόδοτος αναφέρει ότι για την ανέγερση εργάστηκαν 100,000 άνθρωποι επί 20 χρόνια. Υποθέστε ότι ο κάθε εργάτης τρέφονταν με φαγητό που του απέδιδε ενέργεια 1.2×10^7 J την ημέρα. Βρείτε την απόδοση του κάθε εργάτη στην εργασία ανέγερσης και εκτιμείστε αν ξόδευε το μεγαλύτερο μέρος της ημέρας στο να ανυψώνει πέτρες ; (Ως απόδοση ορίζουμε το πηλίκο του έργου ανά ημέρα ως προς την ενέργεια που κατανάλωνε. Θεωρείστε επίσης ότι ως ελάχιστο έργο τοποθέτησης είναι αυτό που προκύπτει από συνεχή τρόπο εναπόθεσης της πέτρας)

Λύση :

(α) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο έργο κατασκευής θεωρώντας την πυραμίδα ως μία υπέρθεση διαδοχικών μικρών κύβων με απειροστό ύψος dy και βάση πλευράς w που μειώνεται από $w = a$ μέχρι $w = 0$ και. Σε ύψος y από τη βάση η πλευρά του κύβου θα είναι $w(y) = a\left(1 - \dfrac{y}{h}\right)$.



Ο στοιχειώδης κύβος στο ύψος αυτό έχει μάζα

$$dm = \rho dV = \rho w^2(y)dy = \rho a^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy = \rho a^2 \left(1 - 2\frac{y}{h} + \frac{y^2}{h^2}\right)dy \quad (1)$$

Το στοιχειώδες έργο για να ανυψωθεί ο κύβος στο y είναι :

$$dW = gydm \quad (2)$$

Οπότε το συνολικό έργο είναι :

$$W = \int_0^h gydm = g\rho\alpha^2 \int_0^h \left(y - 2\frac{y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2}\right)dy \quad (3)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος δίνει :

$$W = \rho g a^2 h^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\rho g a^2 h^2 \quad (4)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των σταθερών παίρνουμε :

$$W = 2.43 \times 10^{12} J \quad (5)$$

(β) Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των 100,000 εργατών με τον αριθμό των ημερών σε 20 χρόνια παίρνουμε τον αριθμό των 730×10^6 ανθρωπω-ημερών που απαιτούνται για την ανέγερση της πυραμίδας . Η συνολική ενέργεια που κατανάλωσαν οι εργάτες είναι:

$$E = \left(730 \times 10^6\right) x \left(1.2 \times 10^7\right) J = 8.76 \times 10^{15} J \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5),(6) βρίσκουμε την ελάχιστη απόδοση ε κάθε εργάτη :

$$\varepsilon = \frac{2.43 \times 10^{12} J}{8.76 \times 10^{15} J} = 2.77 \times 10^{-4} \quad (7)$$

Η μικρή τιμή του ε δείχνει ότι οι εργάτες ξόδευαν σημαντικό τμήμα της εργασίας τους σε προπαρασκευαστικές δουλειές.

Παρατήρηση: Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο κατασκευής της πυραμίδας και από τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας της αποθηκευμένης στο κέντρο μάζας της. Το κέντρο μάζας μιας ομογενούς πυραμίδας βρίσκεται σε απόσταση $h' = h/4$ από τη βάση της.

Ο όγκος της πυραμίδας είναι : $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\times 230^2 \times 150^2 m^3 = 2.645\times 10^6 m^3$. Η μάζα της πυραμίδας είναι $m = \rho V = 2.5\times 10^3 \frac{kg}{m^3}\times 2.65\times 10^6 m^3 = 6.61\times 10^9 kg$. Οπότε το απαιτούμενο έργο είναι : $W = E_{\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{\eta}} = mgh' = 6.61\times 10^9 kg \times 9.81\frac{m}{s^2}\times\frac{150}{4}m = 2.43\times 10^{12} J$

Άσκηση 10 (10 μονάδες)

10 Α) α) Ένα αντικείμενο μάζας m, αρχικά σε ηρεμία, διασπάται σε δύο θραύσματα το ένα με μάζα m_1 και το άλλο με μάζα m_2 $\left(m = m_1 + m_2\right)$. Αν κατά τη διάσπαση απελευθερώνεται ενέργεια Q, η οποία μετασχηματίζεται σε κινητική ενέργεια των θραυσμάτων, υπολογίστε το ποσοστό του Q που μεταφέρει κάθε θραύσμα.

β) Νετρόνιο, σε ηρεμία, διασπάται σε ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο. Κατά τη διάσπαση απελευθερώνεται ενέργεια που μετασχηματίζεται σε κινητική ενέργεια του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου. Η μάζα του πρωτονίου είναι 1836 φορές μεγαλύτερη της μάζας του ηλεκτρονίου. Υπολογίστε το κλάσμα της απελευθερωθείσας ενέργειας που μετασχηματίζεται σε κινητική ενέργεια του πρωτονίου.

Λύσεις:

Αν υποθέσουμε ότι τα μέτρα των ορμών των θραυσμάτων είναι $m_1\upsilon_1$ και $m_2\upsilon_2$, από το θεώρημα διατήρησης ορμής θα πάρουμε :

$$m_1\upsilon_1 = -m_2\upsilon_2 \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας $m_1 = m - m_2$ παίρνουμε:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{-m_2}{m - m_2} \quad (2)$$

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι:

$$\frac{KE_1}{KE_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2} \quad (3)$$

Η σχέση (3) γράφεται με τη βοήθεια των σχέσεων (1),(2) :

$$\frac{KE_1}{KE_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_1}{m_2}\frac{m_2^2}{\left(m - m_2\right)^2} \quad (4)$$

Από την (4) και τη σχέση $KE_1 + KE_2 = Q$ παίρνουμε τελικά :

$$KE_1 = Q\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \quad (5)$$

$$KE_2 = Q\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \quad (6)$$

β) Η κινηματική του προβλήματος διάσπασης του νετρονίου είναι αυτή που αναλύσαμε στο ερώτημα α. Αν συμβολίσουμε με Q την απελευθερωθείσα ενέργεια, με m_p τη μάζα του πρωτονίου, με KE_p την κινητική του ενέργεια και με m_e τη μάζα του ηλεκτρονίου, παίρνουμε από τη σχέση (5):

$$KE_p = Q\left(\frac{m_e}{m_p + m_e}\right) = Q\frac{1}{\left(\frac{m_p}{m_e} + 1\right)} = \frac{Q}{1837} = 0.0055Q$$

10 Β) Σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα τα ενεργειακά νετρόνια που παράγονται κατά τη σχάση χάνουν την ενέργειά τους (θερμοποιούνται) μέσω ελαστικών κρούσεων με τα άτομα κατάλληλου υλικού, υγρού ή στερεού που λέγεται επιβραδυντής. Σαν επιβραδυντές χρησιμοποιούνται τόσο το βαρύ ύδωρ (D_2O, όπου D είναι το δευτέριο το οποίο έχει στον πυρήνα ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο) όσο και ο γραφίτης (άνθρακας). Να βρεθεί το ποσοστό της ενέργειας που χάνεται σε μια σκέδαση νετρονίου με ένα πυρήνα δευτερίου που έχει μάζα διπλάσια του νετρονίου καθώς και στην περίπτωση της σκέδασης με τον 12 φορές βαρύτερο πυρήνα άνθρακα. (θεωρείστε ότι ο πυρήνας του επιβραδυντή είναι ακίνητος πριν την σκέδαση)

Λύση:

Έστω m_1 (νετρόνιο) και m_2 (δευτέριο) οι μάζες, μ u_1 και u_2 οι αρχικές ταχύτητες και υ_1 και υ_2 οι ταχύτητες μετά την κρούση. Από τις αρχές διατήρησης ορμής και κινητικής ενέργειας παίρνουμε :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2^2 \quad (2)$$

Η (2) γράφεται :

$$m_1(u_1^2 - \upsilon_1^2) = -m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2)$$
$$m_1(u_1 - \upsilon_1)(u_1 + \upsilon_1) = -m_2(u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2) \qquad (3)$$

Από την (1) έχουμε

$$m_1(u_1 - \upsilon_1) = m_2(\upsilon_2 - u_2) \qquad (4)$$

Διαιρώντας τις (3)/(4)

$$u_1 + \upsilon_1 = \upsilon_2 + u_2 \qquad (5)$$

Θεωρώντας ότι το σώμα m_2 είναι αρχικά ακίνητο, $u_2 = 0$, έχουμε από τις (4),(5)

$$m_1 u_1 = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2$$
$$u_1 = \upsilon_2 - \upsilon_1$$

και τελικά

$$\upsilon_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad \text{και } \upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \qquad (6)$$

Από τις (6) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα των νετρονίων μετά την κρούση είναι :

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1} u_1 = -\frac{1}{3} u_1$$

Αν E_1 είναι η κινητική ενέργεια του νετρονίου πριν την κρούση και E_2 μετά, το ποσοστό απώλειας ενέργειας Q ισούται με :

$$Q = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{1}{2} m \upsilon_1^2}{\frac{1}{2} m u_1^2} = \ldots = 1 - \left(\frac{\upsilon_1}{u_1} \right)^2 = \frac{8}{9} \quad \text{η } 88.9\%$$

Για την περίπτωση του άνθρακα ($m_2 = 12 m_1$)βρίσκουμε από τις (6) ότι :

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - 12m_1}{m_1 + 12m_1} = -\frac{11}{13} u_1$$

Το ποσοστό απώλειας ενέργειας στην περίπτωση αυτή είναι 29%