2^{η} Εργασία

Ημερομηνία Αποστολής : 21 Ιανουαρίου 2007

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L' Hopital:

α. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - x + 5}{6x^2 + 2x - 3}$

β. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

(Υπόδειξη: χωρίς να την αποδείξετε, χρησιμοποιήστε την σχέση $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right) = 1$).

(9 βαθμοί)

Λύση

1α) Εφαρμόζοντας τον Κανόνα L' Hopital δύο φορές (πρώτη και δεύτερη παράγωγος της αρχικής συνάρτησης) έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - x + 5}{6x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2 - x + 5)'}{(6x^2 + 2x - 3)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{10x - 1}{12x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(10x-1)'}{(12x+2)'} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

1β) $$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

1γ) Στην περίπτωση αυτή είναι χρονοβόρο να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L' Hopital κατ' ευθείαν. Θα μετατρέψουμε την αρχική συνάρτηση σε μια πιο πρόσφορη μορφή:

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

Εδώ αρκεί να αναγνωρίσουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$ και βεβαίως ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right)$$

Στην τελική αυτή μορφή μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του L' Hopital (θα το βρείτε γραμμένο σε μερικά βιβλία και ως L' Hospital):

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)'=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}\right)'=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x-\cos 2x}{12x^2}\right)'=\lim_{x\to0}\left(\frac{4\sin 2x}{24x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{4\sin 2x}{24x}\right)'=\lim_{x\to0}\left(\frac{8\cos 2x}{24}\right)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

Άσκηση 2.

Ένα σωματίδιο ακολουθεί μια κυκλοειδή τροχιά:

$$\vec{r}(t) = (t - sint)i + (1 - cost)j \quad \text{για} \quad 0 \le t < \frac{5\pi}{2}.$$

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ και την επιτάχυνση $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ του σωματιδίου για $t=\pi/2$.

Τη χρονική στιγμή $t=5\pi/2$ το σωματίδιο εγκαταλείπει την τροχιά στη διεύθυνση της εφαπτομένης και στη συνέχεια ακολουθεί μια ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα.

β) Πού βρίσκεται το σωματίδιο όταν $t=4\pi$;

γ) Να σχεδιάσετε στο (x, y) επίπεδο την πορεία του σωματιδίου από $t=0$ μέχρι $t=4\pi$.

δ) Να αποδείξετε ότι
$\sin(2\alpha+\beta) = \cos^2\alpha\ [2\tan\alpha\cos\beta + (1-\tan^2\alpha)\sin\beta]$

(12 βαθμοί)

Λύση

2α) Η ταχύτητα του σωματιδίου στην κυκλοειδή είναι

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(1-\cos t\right)\vec{i} + \sin t\ \vec{j} \underset{t=\pi/2}{=} 1\vec{i} + 1\vec{j}$$

και η επιτάχυνση

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\ \vec{j} \underset{t=\pi/2}{=} 1\vec{i}.$$

2β) Τη χρονική στιγμή $t=5\pi/2$ το σωματίδιο εγκαταλείπει την κυκλοειδή τροχιά. Βρίσκεται εκείνη τη στιγμή στο σημείο

$$\vec{r}(t) \underset{t=5\pi/2}{=} \left(\frac{5\pi}{2}-1\right)\vec{i} + 1\vec{j}$$

με ταχύτητα

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \underset{t=5\pi/2}{=} 1\vec{i} + 1\vec{j}.$$

Άρα η ευθεία γραμμή που θα ακολουθήσει είναι

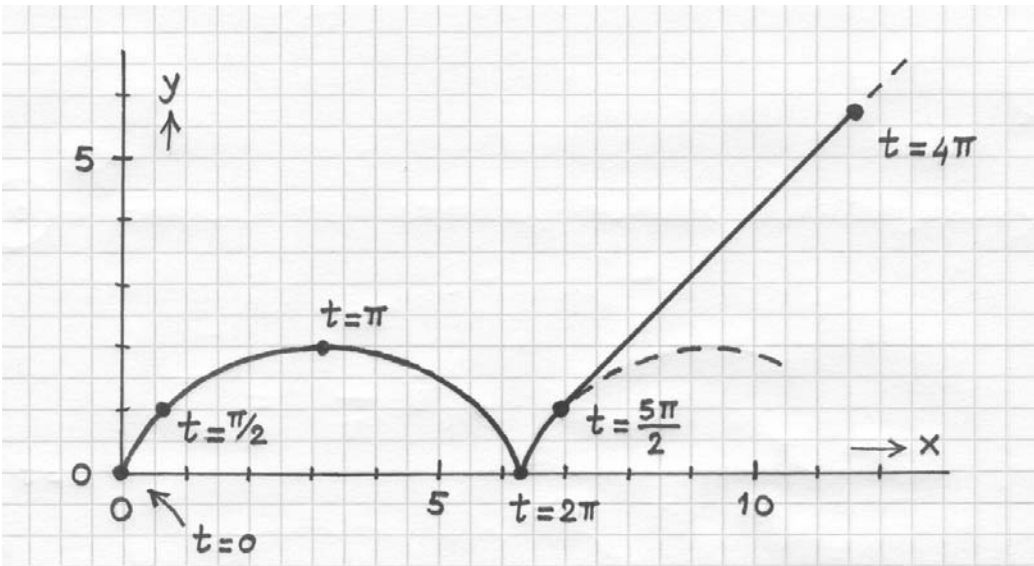
$$\vec{r}_{\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta}(t) \;=\; [\;(\frac{5\pi}{2}-1) \;+(t-\frac{5\pi}{2})]\,\vec{i} \;+\; [1+(t-\frac{5\pi}{2})]\,\vec{j} \qquad \text{για}$$

$$t \;\geq\; \frac{5\pi}{2}\;,$$

και τη χρονική στιγμή $t = 4\pi$ βρίσκεται δηλαδή στο σημείο

$$\vec{r}_{\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta}(t) \underset{t=4\pi}{=} [4\pi - 1]\,\vec{i} \;+\; [1+\frac{3\pi}{2}]\,\vec{j} \;\approx\; 11{,}57\,\vec{i} \;+\; 5{,}71\,\vec{j}$$

2γ) Το σχέδιο:



2δ) $$\sin(2\alpha+\beta) \;=\; \sin 2\alpha\cos\beta \;+\; \cos 2\alpha\sin\beta$$
$$=\; 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta \;+\; (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\beta$$
$$=\; \cos^2\alpha\,[\,2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\beta \;+\; (1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})\sin\beta\,]$$
$$=\; \cos^2\alpha\;[2\tan\alpha\cos\beta + (1-\tan^2\alpha)\sin\beta]$$

Άσκηση 3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ για $x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τα $g(\,f\,(\,g\,(1)))$ και $f(\,g\,(\,f\,(1)))$.

β) Να υπολογίσετε το πλευρικό όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ και επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+} h'(x)$ για τη σύνθετη

συνάρτηση $h(x) = x\,f(\sqrt{x}\,)\,g'(x) + f(\,f(g(x)))$

γ) Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\cos 2\alpha \;=\; 1-2\sin^2\alpha$ για να βρείτε την ακριβή τιμή του $\sin(-\pi/8)$

(9 βαθμοί)

Λύση .

3α) Υπολογίζουμε

$$g(f(g(1))) = \ln(e^{\ln 1}) = \ln(e^0) = \ln 1 = 0 \quad \text{και}$$

$$f(g(f(1))) = e^{\ln(e^1)} = e^1 = e \qquad (=2.718\ldots).$$

3β) Πρώτα γράφουμε την συνάρτηση σε μια πιο βολική μορφή [με $g'(x) = 1/x$ και $f(g(x)) = x$]:

$$\begin{aligned} h(x) &= x\, f(\sqrt{x})\, g'(x) + f(f(g(x))) \\ &= e^{\sqrt{x}} + e^x \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$h'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + e^x \ .$$

Έπειτα τα (πλευρικά) όρια είναι απλά:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = e^0 + e^0 = 2 \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + e^x \right) = \infty + 1 = \infty \ .$$

3γ) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, και αυτό μας δίνει (χρησιμοποιούμε τη σχέση $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$):

$$\cos(-\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 - 2\sin^2(-\pi/8) .$$

Άρα:

$$\sin^2(-\pi/8) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

και συνεπάγεται ότι $\sin(-\pi/8) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})}$.
Επειδή το $\sin(-\pi/8)$ είναι αρνητικό [αφού $\sin(-x) = -\sin x$], η ζητούμενη λύση είναι η αρνητική:

$$\sin(-\pi/8) = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \qquad (= -0{,}38268\ldots) .$$

[Η θετική λύση αντιστοιχεί στο $\sin(\pi/8) = -\sin(-\pi/8)$].

Άσκηση 4.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο dy/dx της συνάρτησης y(x) που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(x\cdot y^2\right)^2+x^2\cdot y^3+x^3\cdot y=0$$

β) Υπολογίστε τις παραγώγους $\frac{dy}{dx}$ **και** $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης $y=\frac{e^x}{1+e^x}$

γ) Πυκνωτής φορτίζεται από ηλεκτρική πηγή τάσης E μέσω αντίστασης R. Εχοντας υπ' όψη ότι το φορτίο του πυκνωτή είναι q, το ρεύμα I=dq/dt και ότι γενικά ισχύει E-I·R-q/C=0 (1), όπου C η χωρητικότητα του πυκνωτή, να υπολογίσετε τις συναρτήσεις I = f(t) και q = f(t) παραγωγίζοντας την (1) ως προς τον χρόνο. Το αρχικό ρεύμα ισούται με I_o και το αρχικό φορτίο ίσο με μηδέν.
(15 βαθμοί)

Λύση

4α) Παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς x. Εχουμε:

$$\frac{d\left(\left(x\cdot y^2\right)^2+x^2\cdot y^3+x^3\cdot y\right)}{dx}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{d\left(\left(x\cdot y^2\right)^2+x^2\cdot y^3+x^3\cdot y\right)}{dx}=\frac{d\left(\left(x\cdot y^2\right)^2\right)}{dx}+\frac{d\left(x^2\cdot y^3\right)}{dx}+\frac{d\left(x^3\cdot y\right)}{dx}=$$

$$=2\cdot\left(x\cdot y^2\right)\cdot\left(x\cdot\frac{d\left(y^2\right)}{dx}+y^2\cdot\frac{dx}{dx}\right)+x^2\cdot\frac{d\left(y^3\right)}{dx}+y^{3.}\cdot\frac{d\left(x^2\right)}{dx}+x^3\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{d\left(x^3\right)}{dx}=$$

$$=2\cdot\left(x\cdot y^2\right)\cdot\left(x\cdot 2\cdot y\cdot\frac{dy}{dx}+y^2\right)+x^2\cdot 3\cdot y^2\cdot\frac{dy}{dx}+y^{3.}\cdot 2\cdot x+x^3\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot 3\cdot x^2=$$

$$=4\cdot x^2\cdot y^3\cdot\frac{dy}{dx}+2\cdot x\cdot y^4+3\cdot x^2\cdot y^2\cdot\frac{dy}{dx}+2\cdot x\cdot y^{3.}+x^3\cdot\frac{dy}{dx}+3\cdot x^2\cdot y=$$

$$=\left(4\cdot x^2\cdot y^3+3\cdot x^2\cdot y^2+x^3\right)\cdot\frac{dy}{dx}+\left(3\cdot x^2\cdot y+2\cdot x\cdot y^4+2\cdot x\cdot y^{3.}\right)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{3\cdot x\cdot y+2\cdot y^4+2\cdot y^{3.}}{4\cdot x\cdot y^3+3\cdot x\cdot y^2+x^2}}$$

4β) Παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς x. Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)}{dx}=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}\cdot\left(\frac{d\left(e^x\right)}{dx}\cdot\left(1+e^x\right)-e^x\cdot\frac{d\left(1+e^x\right)}{dx}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}\cdot\left(e^x\cdot\left(1+e^x\right)-e^x\cdot\left(\frac{d(1)}{dx}+\frac{d\left(e^x\right)}{dx}\right)\right)=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}\cdot\left(e^x+e^x\cdot e^x-e^x\cdot e^x\right)\qquad\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

και

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\right)}{dx}=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^4}\cdot\left(\frac{d\left(e^x\right)}{dx}\cdot\left(1+e^x\right)^2-e^x\cdot\frac{d\left(1+e^x\right)^2}{dx}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^4}\cdot\left(e^x\cdot\left(1+e^x\right)^2-e^x\cdot\left(\frac{d(1)}{dx}+\frac{d\left(e^{2\cdot x}\right)}{dx}+\frac{d\left(2\cdot e^x\right)}{dx}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^4}\cdot\left(e^x\cdot\left(1+e^x\right)^2-e^x\cdot\left(2\cdot e^{2\cdot x}+2\cdot e^x\right)\right)=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^4}\cdot\left(e^x\cdot\left(1+e^x\right)^2-2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(e^x+1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^4}\cdot\left(1+e^x\right)\cdot\left(e^x+e^{2x}-2\cdot e^{2\cdot x}\right)=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^3}\cdot\left(e^x-e^{2\cdot x}\right)=\frac{1}{\left(1+e^x\right)^3}\cdot e^x\cdot\left(1-e^x\right)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$$

4γ) Παραγωγίζοντας την E-I·R+q/C=0 έχουμε:

$$\frac{d\left(E-I\cdot R-\frac{q}{C}\right)}{dt}=\frac{d(E)}{dt}+\frac{d(-I\cdot R)}{dt}-\frac{d\left(\frac{q}{C}\right)}{dt}=0-R\cdot\frac{dI}{dt}-\frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt}=-R\cdot\frac{dI}{dt}-\frac{1}{C}\cdot I=0\quad\Rightarrow$$

$$R\cdot\frac{dI}{dt}=-\frac{1}{C}\cdot I\quad\Rightarrow\quad\frac{dI}{I}=-\frac{1}{R\cdot C}\cdot dt$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε (με ορισμένο ολοκλήρωμα, όπου I_o το ρεύμα όταν t = 0 s):

$$\int_{I_o}^{I}\frac{dI}{I}=-\int_0^t\frac{1}{R\cdot C}\cdot dt\quad\Rightarrow\quad\ln\frac{I}{I_0}=-\frac{1}{RC}\cdot t\quad\Rightarrow\quad\frac{I}{I_0}=e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\quad\Rightarrow\quad\boxed{I=I_o\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}}$$

(Η RC ονομάζεται σταθερά χρόνου)

Τώρα από την $I=I_o\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}$ έχουμε $I=\frac{dq}{dt}=I_o\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\quad\Rightarrow\quad dq=I_o\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\cdot dt$

Ολοκληρώνοντας (με αρχικό φορτίο ίσο με μηδέν)

$$\int_0^q dq=I_o\cdot\int_0^t e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\cdot dt\quad\Rightarrow\quad q=-I_o\cdot R\cdot C\cdot\left[e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\right]_0^t=I_o\cdot R\cdot C\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{q = I_o \cdot R \cdot C \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\right)}$$

Άσκηση 5.

α) Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$

β) Δίνεται σύρμα μήκους λ , το οποίο χωρίζουμε σε δύο τεμάχια. Με το ένα κατασκευάζουμε κύκλο και με το άλλο τετράγωνο. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών κύκλου και τετραγώνου γίνεται ελάχιστο όταν ο λόγος των τεμαχίων είναι π/4

(6 βαθμοί)

Λύση

5α) $y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$

$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 36(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ ή $x = 2$

x	$-\infty$	-1/3	2 $+\infty$
y’’	+	-	+
y	στρέφει τα κοίλα άνω	στρέφει τα κοίλα κάτω	στρέφει τα κοίλα άνω

Επειδή η y'' αλλάζει πρόσημο στο –1/3 και στο 2, η y παρουσιάζει σημεία καμπής στα –1/3 και 2.

5β) Έστω x ότι είναι το τμήμα με το οποίο φτάχνουμε τον κύκλο και λ-x το τετράγωνο.

Τότε x = 2πr ή r=x/2π. Το εμβαδόν κύκλου είναι $E_1 = \pi r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} \Rightarrow E = \frac{x^2}{4\pi}$

Με το λ-x φτάχνουμε το τετράγωνο. Κάθε πλευρά του τετραγώνου θα είναι (λ-x)/4 και το εμβαδόν του $E_2 = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2$.

Το άθροισμα των εμβαδών κύκλου και τετραγώνου θα είναι:

$E = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2$

$E' = \frac{x}{2\pi} + 2\frac{\lambda - x}{4}\frac{}{4}(-1) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x - \lambda}{8}$

$$E'' = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0$$

¨Αρα για κάθε ρίζα της Ε΄ θα έχουμε ελάχιστο

$$E' = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\pi} + \frac{x-\lambda}{8} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\lambda - x} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Άσκηση 6.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται με την συνάρτηση $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, για $0 \leq x \leq a$, όπου a = 6.4 cm, ξεκινώντας από την σχέση

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \cdot \frac{dx}{dx}$ όπου ds στοιχειώδες τμήμα της τροχιάς και να σχεδιάσετε την καμπύλη $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ για $0 \leq x \leq a$, όπου a = 6.4 cm

β) Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ και τους άξονες X και Y, για $0 \leq x \leq a$, όπου a = 6.4 cm.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $y = x^2 - 3 \cdot x + 2$, για $0 \leq x \leq 2$ και το εμβαδόν του επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 3 \cdot x + 2$ και τους άξονες X και Y, για $0 \leq x \leq 2$.

δ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες $y_1 = 2 \cdot x + 5$, $y_2 = \frac{x}{x^2 + 5}$ και τις παράλληλες ευθείες στον άξονα Y για x = 0 και x = 5.

(15 βαθμοί)

Λύση

6α) Επεξεργαζόμενοι τη σχέση $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \cdot dx}{dx} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο του y ως προς x, dy/dx της συνάρτησης $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a^2 - x^2)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (a^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2 \cdot x) = \frac{-x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{(a^2 - x^2)} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

Τελικά έχουμε το ολοκλήρωμα:

$$s = \int_0^a ds = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = a \cdot \int_0^a \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

το οποίο λύνουμε με αντικατάσταση: $x = a \cdot \sin\vartheta \;\; \Rightarrow \;\; dx = a \cdot \cos\vartheta \cdot d\vartheta$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

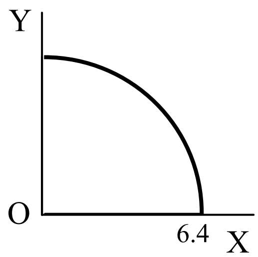
$$s = \int ds = a \cdot \int \frac{a \cdot \cos\vartheta \cdot d\vartheta}{(a^2 - a^2 \cdot \sin^2\vartheta)^{1/2}} = a \cdot \int \frac{\cos\vartheta \cdot d\vartheta}{(1 - \sin^2\vartheta)^{1/2}} = a \cdot \int d\vartheta$$

Ολοκληρώνοντας την τελική σχέση και επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές έχουμε:

$$s = \int ds = a \cdot \int_0^a d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = a \cdot \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = a \cdot \left(\arcsin\frac{a}{a} - \arcsin\frac{0}{a}\right) = a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{6.4 \cdot 3.14159}{2} cm \approx 10cm$$

$\boxed{s = 10\ cm}$

Η καμπύλη:



6β) Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το y είναι θετικό για κάθε $0 \le x \le a$. Συνεπώς προχωρούμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$E = \int d\varepsilon = \int_0^a y \cdot dx = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{1/2} \cdot dx$$

και αντικαθιστώντας το $x = a \cdot \sin\vartheta$ και $dx = a \cdot \cos\vartheta \cdot d\vartheta \;\; \Rightarrow$

$$E = \int_0^a \left(a^2 - a^2 \cdot \sin^2\vartheta\right)^{1/2} \cdot a \cdot \cos\vartheta \cdot dx = a^2 \cdot \int_0^a \cos^2\vartheta \cdot d\vartheta$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση: $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\vartheta)$ το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$E = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \int (1 + \cos 2\vartheta) \cdot d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \int d\vartheta + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \int \frac{1}{2} \cdot \cos 2\vartheta \cdot d2\vartheta =$$

$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \int d\vartheta + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int d\sin 2\vartheta$ επειδή δε $\sin 2\vartheta = 2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta$ και επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, τελικά έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a + \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\arcsin\frac{a}{a} - \arcsin 0\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\arcsin\frac{a}{a} - \arcsin 0\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(a \cdot \sqrt{a^2 - a^2} - 0 \cdot \sqrt{a^2 - 0}\right) = a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{6.4^2 \cdot 3.14159}{4} cm^2 = 32.2 cm^2$$

Τελικά $\boxed{E = 32.2cm^2}$

6γ) Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$O = \int_0^2 y \cdot dx = \int_0^2 (x^2 - 3 \cdot x + 2) \cdot dx = \int_0^2 x^2 \cdot dx - \int_0^2 3 \cdot x \cdot dx + \int_0^2 2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 3 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 2 \cdot [x]_0^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - 3 \cdot 2 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{O = \frac{2}{3}} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το εμβαδόν είναι (εξ ορισμού) θετικό. Συνεπώς πρέπει να προσδιορίσουμε τις περιοχές για τις οποίες η συνάρτηση είναι θετική ή αρνητική και να πάρουμε τις απόλυτες τιμές. Έτσι η συνάρτηση

$$y = x^2 - 3 \cdot x + 2 \text{ έχει ρίζες: } \quad x = \frac{+3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

Από την πρώτη και δεύτερη παράγωγο ως προς x προσδιορίζουμε ότι έχει ελάχιστο:

$dy/dx = 2x-3$ και $d^2y/dx^2 = 2$ $\Rightarrow$ $x = 3/2 = 1.5$ Ελάχιστο και συνεπώς η συνάρτηση είναι θετική για $0 \le x \le 1$ και αρνητική για $1 \le x \le 2$ και έχουμε:

$$E = \int_0^2 y \cdot dx = \left|\int_0^1 (x^2 - 3 \cdot x + 2) \cdot dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - 3 \cdot x + 2) \cdot dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 x^2 \cdot dx - 3 \cdot \int_0^1 x \cdot dx + \int_0^1 2 \cdot dx\right| + \left|\int_1^2 x^2 \cdot dx - 3 \cdot \int_1^2 x \cdot dx + \int_1^2 2 \cdot dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 3 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2 \cdot [x]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 3 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2 \cdot [x]_1^2\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \left|\frac{8}{3} - 6 + 4\right| = \left|\frac{5}{6}\right| + \left|-\frac{1}{6}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 1} \text{ τετραγωνική μονάδα}$$

6δ) Παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι θετικές για $0 \le x \le 5$, έτσι έχουμε:

$$E = \int_0^5 (y_2 - y_1) \cdot dx = \int_0^5 \frac{x}{x^2+5} \cdot dx - 2\int_0^5 x \cdot dx - 5 \cdot \int_0^5 dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{d(x^2+5)}{x^2+5} - \int_0^5 dx^2 - 5 \cdot \int_0^5 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+5)\right]_0^5 - \left[x^2\right]_0^5 - 5 \cdot [x]_0^5 = \frac{1}{2}\ln\frac{30}{5} - 25 - 25 = -49.1$$

Λόγω της παρατήρησης για το εμβαδόν, ότι είναι πάντα θετικό, προκύπτει ότι

$E = 49.1$ τετραγωνικές μονάδες.

Επίσης αν ξεκινούσαμε από την σχέση $(y_1 - y_2)$, απόλυτα ισοδύναμη με την $(y_2 - y_1)$ που χρησιμοποιήσαμε και το E θα ήταν απ' ευθείας θετικό.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 4}$

α) Να μελετήσετε τη $f(x)$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^5 f(x)\,dx$ και να σκιαγραφήσετε το αντίστοιχο

εμβαδόν στη γραφική παράσταση της $f(x)$.

(6 βαθμοί)

Λύση

7α)

Πεδίο ορισμού
Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \Re$.

Ρίζες
Η μοναδική ρίζα $f(x) = 0$ είναι $x = 0$.
Επίσης παρατηρούμε ότι η $f(x)$ μηδενίζεται για $x \to \pm\infty$, άρα ο x-άξονας είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης.

Ακρότατα
Η παράγωγος

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 4) - x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

μηδενίζεται για $x = \pm 2$. Εκεί βρίσκονται δηλαδή τα ακρότατα:

$$f(2) = \frac{2}{4 - 4 + 4} = \frac{1}{2} \qquad \text{μέγιστο}$$

$$f(-2) = \frac{-2}{4 + 4 + 4} = -\frac{1}{6} \qquad \text{ελάχιστο}$$

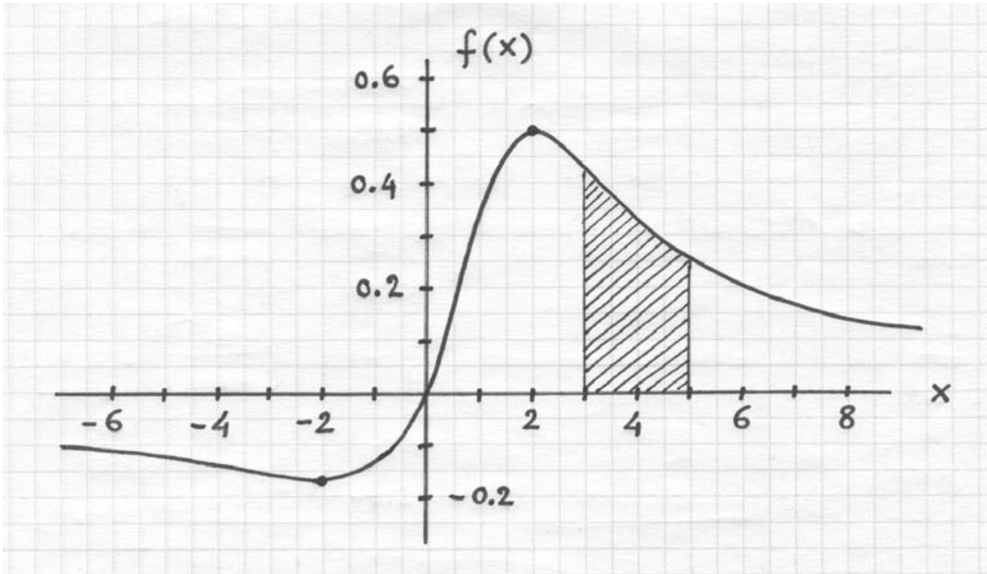
Για να επιβεβαιώσουμε ότι πρόκειται για μέγιστο/ελάχιστο υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 12x + 8)}{(x^2 - 2x + 4)^3},$$

που στο σημείο $x = 2$ μας δίνει $f''(2) = -1/4$ (αρνητικό, άρα στο σημείο αυτό η $f(x)$ έχει ένα μέγιστο) και στο $x = -2$ μας δίνει $f''(-2) = 1/36$ (θετικό, άρα εδώ η $f(x)$ έχει ένα ελάχιστο).

Γραφική παράσταση

Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν ανάμεσα στα $x = 3$ και $x = 5$ αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_3^5 f(x)\,dx$, το οποίο υπολογίζουμε στο μέρος β.



7β) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\begin{aligned}
\int_3^5 f(x)\,dx &= \int_3^5 \frac{x\,dx}{x^2-2x+4} \\
&= \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+4} + \int_3^5 \frac{dx}{x^2-2x+4} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_3^5 + \int_3^5 \frac{dx}{(x-1)^2+3}
\end{aligned}$$

Για να λύσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα βάζουμε πρώτα $x-1=t$ (και επομένως $dx = dt$, και πρέπει να προσαρμόσουμε και τα άκρα):

$$\int_3^5 \frac{dx}{(x-1)^2+3} = \int_2^4 \frac{dt}{t^2+3}$$

και στη συνέχεια βάζουμε $t=\sqrt{3}\,y$ (και επομένως $dt=\sqrt{3}\,dy$), για να πάρει το ολοκλήρωμα την κανονική μορφή με 1 στον παρονομαστή αντί για 3:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{dt}{t^2+3} &= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{2/\sqrt{3}}^{4/\sqrt{3}} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\arctan y\Big]_{2/\sqrt{3}}^{4/\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{4}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Συνολικά βρίσκουμε δηλαδή

$$\int_3^5 f(x)dx = \frac{1}{2}(\ln 19 - \ln 7) + \frac{1}{3}\left(\arctan\frac{4}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 0.4992644.. + 0.171614 = 0.6754062...$$

(0.6754062.. τετραγωνικές μονάδες).
Το αντίστοιχο εμβαδόν έχει σκιαγραφηθεί στη γραφική παράσταση της $f(x)$.

Άσκηση 8.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int x^2 \ln(x^2+1)dx$

β) $\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}dx$

γ) $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)dx$ **(9 βαθμοί)**

Λύση

8α) $\int x^2 \ln(x^2+1)dx = \int \ln(x^2+1)d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln(x^2+1) - \int \frac{x^3}{3}d[\ln(x^2+1)] =$

$\frac{x^3\ln(x^2+1)}{3} - \frac{1}{3}\int x^3\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^3\ln(x^2+1)}{3} - \frac{2}{3}\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx =$

$\frac{x^3\ln(x^2+1)}{3} - \frac{2}{3}\int(x^2-1)dx - \frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx =$

$\frac{x^3\ln(x^2+1)}{3} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\arctan x + C$

$8\beta)\quad \int\frac{2-x}{4x^2+4x-3}dx = \int\frac{2-x}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx = \int\left[\frac{\frac{3}{4}}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\frac{7}{4}}{4\left(x+\frac{3}{2}\right)}\right]dx =$

$\int\left[\frac{3}{8}\frac{1}{(2x-1)} - \frac{7}{8}\frac{1}{(2x+3)}\right]dx = \frac{3}{16}\ln(2x-1) - \frac{7}{16}\ln(2x+3) + C.$

8γ) θέτω $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}=t \Rightarrow \frac{x-1}{x}=t^3$ άρα $x=\frac{1}{1-t^3} \Rightarrow dx=\frac{3t^2}{\left(1-t^3\right)^2}dt$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)dx=\int t\frac{1}{\left(\frac{1}{1-t^3}\right)\left(\frac{1}{1-t^3}-1\right)}\frac{3t^2}{\left(1-t^3\right)^2}dt=$$

$$\int t\frac{1}{\left(\frac{1}{1-t^3}\right)\left(\frac{t^3}{1-t^3}\right)}\frac{3t^2}{\left(1-t^3\right)^2}dt=3\int dt=3t+C=3\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+C$$

Άσκηση 9.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}$

β) $\int \frac{dx}{1+\cot\frac{x}{2}}$

γ) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}dx$

(9 βαθμοί)

Λύση

9α) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x+2(\sin^2 x+\cos^2 x)}=\int \frac{dx}{\cos^2 x+2}=$

$$\left(\tan x=t \quad dx=\frac{dt}{1+t^2} \quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+2\frac{1+t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{2t^2+3}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{6}\int \frac{dt}{\frac{2}{3}t^2+1}=$$

$$\frac{2}{6}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t\right)+C=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\varepsilon\phi x\right)+C$$

9β) θέτω $\tan\frac{x}{2}=t \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\cot\frac{x}{2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{t}{t}+\frac{1}{t}}=\int \frac{2tdt}{(t+1)\left(1+t^2\right)}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\int \frac{2tdt}{(t+1)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+\Gamma}{t^2+1}\Rightarrow \left(t^2+1\right)A+(t+1)(Bt+\Gamma)=2t \quad (1)$$

Για $t=0$ η (1) γίνεται $A+\Gamma=0\Rightarrow \Gamma=-A$

Για $t=-1$ η (1) γίνεται $2A=-2\Rightarrow$ **A = -1** άρα **Γ = 1**

Για $t=1$ η (1) γίνεται $2A+2(B+\Gamma)=2\Rightarrow A+B+\Gamma=1\Rightarrow$

$B=1-(A+\Gamma)\Rightarrow$ **B = 1**

Άρα

$$\int \frac{2tdt}{(t+1)\left(1+t^2\right)}=\int\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}2t+\int \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$-\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+\arctan t+C=-\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+\ln\left|\tan^2\frac{x}{2}+1\right|+\frac{1}{2}x+C$$

9γ) $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}dx=-\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}d(\cos x)=-\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^8 x}d(\cos x)=$$

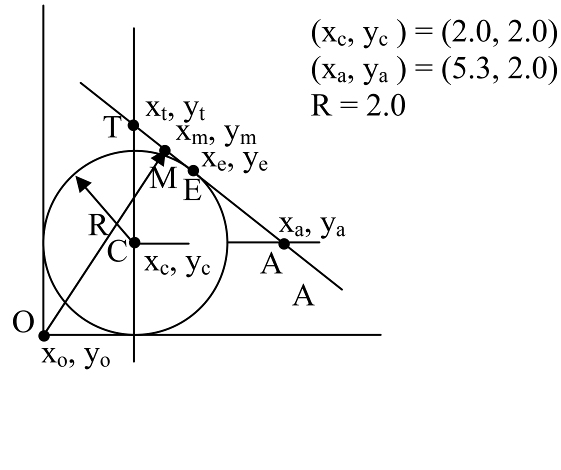
$$-\int \frac{1+\cos^4 x-2\cos^2 x}{\cos^8 x}d(\cos x)=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^8 x}-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+2\int \frac{d(\cos x)}{\cos^6 x}=$$

$$-\frac{\cos^{-7} x}{-7}-\frac{\cos^{-3} x}{-3}+2\frac{\cos^{-5} x}{-5}+C=\frac{1}{7}\frac{}{\cos^7 x}-\frac{2}{5}\frac{}{\cos^5 x}+\frac{1}{3}\frac{}{\cos^3 x}=$$

$$\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x$$

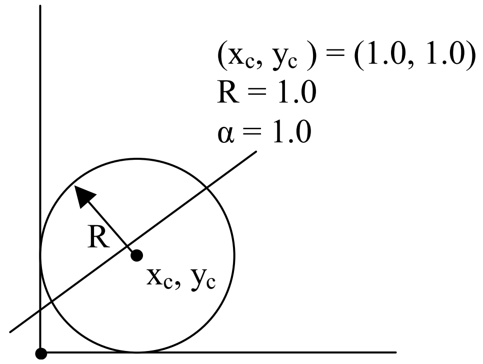
Άσκηση 10.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση από την αρχή των αξόνων του σημείου Μ, μέσου του ευθύγραμμου τμήματος ΤΕ της εφαπτομένης σε κύκλο στο σημείο Ε, η οποία διέρχεται από το σημείο Α και τέμνει την ευθεία η οποία



είναι κάθετη στον άξονα x και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου στο σημείο Τ.

β) Δίνεται κύκλος με εξίσωση $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ και ευθεία με εξίσωση $y = \alpha \cdot x + \lambda$. Υπολογίστε για ποιές τιμές του λ η ευθεία τέμνει τον κύκλο.



(10 βαθμοί)

Λύση

10α) Από την εξίσωση $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ (εξίσωση κύκλου)

και την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Ε $(x_a - x_c)\cdot(x_e - x_c) + (y_a - y_c)\cdot(y_e - y_c) = R^2$ υπολογίζουμε τα x_e και y_e.

Ειδικά στην περίπτωση μας, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$(5.3 - 2.0) \cdot (x_e - 2.0) + (2.0 - 2.0) \cdot (y_e - 2.0) = 4.0 \Rightarrow 3.3 \cdot x_e - 6.6 = 4.0 \Rightarrow$

$$x_e = \frac{10.6}{3.3} = 3.212 \Rightarrow \quad x_e = 3.212$$

$$y_e - x_c = \sqrt{R^2 - (x_e - x_c)^2} = \sqrt{4.0 - 1.469} = \sqrt{2.53} = 1.59 \quad \Rightarrow \ y_e = 3.59$$

$\boxed{(x_e, y_e) = (3.212, 3.59)}$

Έχοντας προσδιορίσει το σημείο Ε η εξίσωση η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Ε ισούται με:

$$\frac{(y - y_e)}{(x - x_e)} = \frac{(y_a - y_e)}{(x_a - x_e)} \quad \Rightarrow \quad \frac{(y - 3.59)}{(x - 3.21)} = \frac{(2.0 - 3.59)}{(5.3 - 3.21)} = \frac{-1.59}{2.09} = -0.76 \quad \Rightarrow$$

και τελικά, αφού η ΑΕ είναι τμήμα της ΑΤ, οι συντεταγμένες του Τ υπολογίζονται από την εξίσωση (αφού και $x_t = 2$):

$$\frac{(y_t - 3.59)}{(2.0 - 3.21)} = -0.76 \quad \Rightarrow \quad y_t = (-0.76)\cdot(-1.21) + 3.59 = 4.51$$

$\boxed{(x_t\ ,\ y_t) = (\ 2.0,\ 4.51)}$

Το μέσον M του τμήματος TE υπολογίζεται:

$$(x_m\ ,\ y_m) = \left(\frac{x_e + x_t}{2}, \frac{y_e + y_t}{2}\right) = \left(\frac{3.212 + 2.0}{2}, \frac{3.59 + 4.51}{2}\right) = (2.61{,}4.05) \qquad \Rightarrow$$

$\boxed{(x_m\ ,\ y_m) = (2.61{,}4.05)}$

και τελικά η απόσταση του M από το O ισούται με

$$OM = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} = \sqrt{2.61^2 + 4.05^2} = 4.81 \quad \Rightarrow \quad \boxed{OM = 4.81}$$

10β) Κάθε ζεύγος (x, y) της ευθείας $y = \alpha \cdot x + \lambda$

έχουμε $x = \dfrac{y - \lambda}{\alpha}$ εφόσον βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου (αν η ευθεία τέμνει τον κύκλο) πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του κύκλου $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

Ετσι,

$$\left(\frac{y-\lambda}{\alpha} - x_c\right)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \left(y - (\lambda + \alpha \cdot x_c)\right)^2 + \alpha^2 \cdot (y - y_c)^2 - \alpha^2 \cdot R^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 + (\lambda + \alpha \cdot x_c)^2 - 2\cdot(\lambda + \alpha \cdot x_c)\cdot y + \alpha^2 \cdot y^2 + \alpha^2 \cdot y_c^2 - 2\cdot\alpha^2 \cdot y \cdot y_c - \alpha^2 \cdot R^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 \cdot (1 + \alpha^2) - 2\cdot(\alpha^2 \cdot y_c + \lambda + \alpha \cdot x_c)\cdot y + (\lambda + \alpha \cdot x_c)^2 + \alpha^2 \cdot y_c^2 - \alpha^2 \cdot R^2 = 0$$

$$y^2 \cdot (1 + \alpha^2) - 2\cdot(\lambda + \alpha^2 \cdot y_c + \alpha \cdot x_c)\cdot y + \lambda^2 + 2\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot x_c + \alpha^2 \cdot x_c^2 + \alpha^2 \cdot y_c^2 - \alpha^2 \cdot R^2 = 0$$

Αν αντικαταστήσουμε μερικούς όρους με:

$A \equiv (1 + \alpha^2) = 2$

$B \equiv \alpha^2 \cdot y_c + \alpha \cdot x_c = 2$

$C \equiv \alpha^2 \cdot x_c^2 + \alpha^2 \cdot y_c^2 - \alpha^2 \cdot R^2 = 1$

η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$y^2 \cdot A - 2\cdot(B + \lambda)\cdot y + C + \lambda^2 + 2\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot x_c = 0$$

Για να έχουμε πραγματικές ρίζες y αυτής της εξίσωσης (συνεπώς το y να βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου), πρέπει η διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν. Συνεπώς

$$(\mathrm{B}+\lambda)^2 - \mathrm{A}\cdot\left(\mathrm{C}+\lambda^2+2\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot x_c\right)\geq 0 \qquad (x.1)$$

$$\mathrm{B}^2+\lambda^2+2\cdot\lambda\cdot\mathrm{B}-\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{A}\cdot\lambda^2-2\cdot\mathrm{A}\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot x_c\geq 0$$

$$(1-\mathrm{A})\cdot\lambda^2+2\cdot\lambda\cdot(\mathrm{B}-\mathrm{A}\cdot\alpha\cdot x_c)-\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}+\mathrm{B}^2\geq 0$$

Από την εξίσωση αυτή υπολογίζουμε το λ:

$$\lambda=\frac{-(\mathrm{B}-\mathrm{A}\cdot\alpha\cdot x_c)\pm\sqrt{(\mathrm{B}-\mathrm{A}\cdot\alpha\cdot x_c)^2-(1-\mathrm{A})\cdot(-\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}+\mathrm{B}^2)}}{1-\mathrm{A}}=$$

$$=\frac{-(2-2\cdot 1\cdot 1)\pm\sqrt{(2-2\cdot 1\cdot 1)^2-(1-2)\cdot(-2\cdot 1+4)}}{1-2}=\pm\sqrt{2}$$

και τελικά η εξίσωση (x.1) είναι ≥ 0 εφ΄ όσον $\boxed{-1.414<\lambda<1.414}$

$\boxed{\text{Σύντομη απάντηση για α=1}}$

Η εξίσωση του κύκλου γίνεται: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, ενώ η εξίσωση της ευθείας: $y=x+\lambda$, άρα έχουμε: $x^2-2x+1+y^2-2y+1=1\Rightarrow x^2-2x+y^2-2y+1=0$ και αντικαθιστώντας σ' αυτή τη σχέση την ευθεία έχουμε:

$$x^2-2x+(x+\lambda)^2-2(x+\lambda)+1=0\Rightarrow x^2-2x+x^2+\lambda^2+2\lambda x-2x-2\lambda+1=0\Rightarrow 2x^2+2x(\lambda-2)+(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

όπου για να έχουμε δύο ρίζες , δηλαδή τομή της ευθείας με τον κύκλο σε δύο σημεία η διακρίνουσα του ανωτέρω τριωνύμου θα πρέπει να είναι θετική , άρα:

$$4(\lambda-2)^2-8(\lambda^2-2\lambda+1)\succ 0\Rightarrow$$

$$4\lambda^2-16\lambda+16-8\lambda^2+16\lambda-8\succ 0\Rightarrow -4\lambda^2-8\succ 0\Rightarrow 4(\lambda^2-2)\prec 0\Rightarrow 4(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})\prec 0$$

και αυτό συμβαίνει μεταξύ των ριζών άρα οι ζητούμενες τιμές είναι: $-\sqrt{2}<\lambda<\sqrt{2}$